REPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE 1
****
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
****
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE 1
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

NORMES DE RIESZ ET TREILLIS DE BANACH

Mémoire de D.I.P.E.S II de Mathématiques

Présenté par :

NDONGMO JOMEKOP Bernard Joel

Matricule : CM-UDS-13SCI1345

Licencié en Mathématiques

Sous la direction de :

Dr CIAKE CIAKE Fidèle

Chargé de cours

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé 1

Année Académique 2018-2019

MEMOIRE DE DIPES 2

École Normale Supérieure de Yaoundé

Exposé présenté par :

NDONGMO JOMEKOP Bernard Joel

Matricule : CM-UDS-13SCI1345

Sous la direction de : Dr Fidèle CIAKE CIAKE

Année académique 2018-2019

♣ Dédicaces ♣

Ce travail est dédié à mon grand frère NDONGMO TEYTSA : comme reconnaissance de la patience, tolérance, courage, persévérance qu'il m'a accordé, pour son assistance morale et financière.

♣ Remerciements ♣

Je ne saurais commencer ce travail sans avoir à remercier tous ceux qui, par leurs conseils et leur dévouement, m'ont aidé à la réalisation de ce travail.

Mes remerciements vont à Dr. Fidèle CIAKE CIAKE, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période de ce travail d'initiation à la recherche. Je remercie aussi :

- tous les enseignants du département de Mathématiques de l'Ecole normale supérieure de Yaoundé.
- mes parents NDONGMO André et NGUIMATSIA Julienne
- Ma tante et maman DONGMO géneviève
- Mes frères et soeurs
- et tous mes amis.

♣ Déclaration sur l'honneur ♣

Le présent travail est une oeuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

NDONGMO JOMEKOP Bernard Joel

♣ Résumé ♣

Dans ce mémoire, nous étudions la norme de Riesz et les treillis de Banach. Nous définissons un espace de Riesz et ses propriétés. Dans ces espaces de Riesz, nous étudions une norme dite norme de Riesz, ce qui permet de construire un espace vectoriel normé dit treillis de Banach. Entre deux treillis de Banach, nous étudions les propriétés des opérateurs positifs.

Mots clés : Espaces de Riesz, Normes de Riesz, Treillis de Banach.

♣ Abstract ♣

In this dissertation, we investigate the Riesz norm and properties. From the ordered vector space, we define a Riesz space and its properties. In a Riesz space, we define an norm call Riesz norm. We define positives operators betwen two Banach lattices.

Key words :Riesz spaces, Riesz norm , Banach Lattices .

♣ Sommaire ♣

♣ INTRODUCTION ♣

L'étude des opérateurs positifs a commencé au début du 19e siècle. Cette étude était liée aux intégrales et les matrices à entrées positives. Cependant, les opérateurs positifs ont été plus tard étudiés de manière systématique et très proche du développement des espaces de Riesz. La théorie d'espace de Riesz à été développée en 1930 par Freudenthal et L. V Kantorovich. Sur cet espace de Riesz on peux définir une norme appelée norme de Riesz pour ainsi construire un espace que nous appelerons dans ce mémoire espace normé de Riesz.

A partir de ces espaces de Riesz, on peut aussi contruire des espaces qui ont des propriétés plus détaillées des relations d'ordre qui presentent également un intérêt. Par exemple les espaces de fonctions classiques sont des treillis par rapport à l'ordre défini par la positivité ponctuelle. De plus, la norme d'un élément de cet espace et la norme de son module coïncident et au fur et à mesure que le module augmente, la norme augmente également. Les espaces ayant ces propriétés sont appelés treillis de Banach. Ils ont fait l'objet de nombreuses études et possédent une structure riche et bien comprise.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante : Nous rappelons dans le premier chapitre les préliminaires qui sont utilisés dans la construction des espaces de Riesz . Dans le deuxième chapitre, nous présentons la notion d'espace de Riesz et ses propriétés. A la fin de ce chapitre nous définissons les operateurs positifs entre deux espaces de Riesz. Dans Le troisième chapitre, nous étudions la norme de Riesz qui fait d'un espace de Riesz un treillis de Banach. On étudie aussi les operateurs positifs entre deux treillis de Banach.

⋆ ⋆ CHAPITRE UN ⋆ ⋆

PRELIMINAIRES

1.1 Espaces vectoriels ordonnés et espaces topologiques

1.1.1 Espaces vectoriels ordonnés

Définition 1.1.1. *Soit E un ensemble non vide. Une relation d'ordre dans E est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.*

Une relation interne $\leq$ sur E est une relation d'ordre si pour tous x, y et z éléments de E on a :

$i)$ $x \leq x$ *(réflexivité)*

$ii)$ *(*$x \leq y$ *et* $y \leq x$*)* $\Longrightarrow x = y$ *(antisymétrie)*

$iii)$ *(*$x \leq y$ *et* $y \leq z$*)* $\Longrightarrow x \leq z$ *(transitivité).*

$(E, \leq)$ *est appelé ensemble ordonné*

Définition 1.1.2. *Soient* $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné et F une partie de E ; un élément* x *de E est :*

$i)$ *un majorant de F s'il est supérieur ou égal à tous les éléments de F ;*

$$\forall y \in F, y \leq x$$

.

$ii)$ *Un minorant de F s'il est inférieur ou égal à tous les éléments de F ;*

$$\forall y \in F, x \leq y$$

.

Remarque 1.1.1. $i)$ *Si F possède un majorant* x *alors on dit que F est une partie majorée.*

$ii)$ *Si F possède un minorant* x *alors on dit que F est une partie minorée*

Définition 1.1.3. $i)$ *Dans un ensemble partiellement ordonné E, La borne supérieure d'une partie F de E est le plus petit majorant de F.*

Elle est classiquement notée sup(F).

$ii)$ *Dans un ensemble partiellement ordonné E, La borne inférieure d'une partie F de E est le plus grand minorant de F.*

Elle est classiquement notée inf(F).

Définition 1.1.4 (Définition d'un espace vectoriel ordonné). .

Soit E un ensemble non vide, une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ et une structure d'ordre sont dites compatibles sur E si elles satisfont aux axiomes suivants :

(1.1) la relation $x \leq y$ entraine $x + z \leq y + z$ quel que soit $z \in E$

(1.2) la relation $x \geq 0$ entraine $\alpha x \geq 0$ pour tout x dans E et tout scalaire $\alpha \geq 0$.

L'ensemble E, muni de ces deux structures, est appelé espace vectoriel ordonné.

Remarque 1.1.2. *L'axiome (1.1) signifie que la structure d'ordre et la structure de groupe additif sur E sont compatible, autrement dit, E muni de ces deux structures est un groupe ordonné.*

De même, il résulte de (1.2) que pour tout scalaire $\lambda > 0$, les relations $x \leq y$ et $\lambda x \leq \lambda y$ sont équivalentes.

Définition 1.1.5. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et F une partie de E. On dit que F est un filtre de E s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

$i)$ $\forall\, x, y \in E\ \exists\, z \in F : z \leq x$ *et* $z \leq y$

$ii)$ $\forall\, x \in F$ *et* $y \in E$, *si* $x \leq y$ *alors* $y \in F$.

1.1.2 Espaces topologiques

Définition 1.1.6. *Une structure topologique τ sur un ensemble X est définie par la donnée d'une famille θ de parties de X vérifiant les trois axiomes suivants (axiomes des ouverts) :*

(o_1) *Toute réunion d'éléments de θ est élément de θ*

(o_2) *une intersection finie d'éléments de θ est un élément de θ*

(o_3) *$\emptyset$ et X appartiennent à θ.*

(X, τ) est appelé espace topologique de topologie τ, de famille d'ouverts θ.

Exemple 1.1.1. *La topologie sur X est appelée topologie grossière sur X si la famille des ouverts est $\theta = \{\emptyset, X\}$, la topologie discrète sur X si $\theta = P(X)$.*

La topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ est celle dont la famille d'ouverts est :

$\theta = \{\omega \subset \mathbb{R}, \omega$ est une union d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ $\}$.

Définition 1.1.7. *Un espace topologique séparé (au sens de Hausdorff) est un espace topologique dans lequel deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints.*

Définition 1.1.8. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif* $\mathbb{K}$ *(* $\mathbb{K}=$ $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K}=$ $\mathbb{C}$ *).*
Une fonction f *de E dans F est dite homogène de degré* α *si*
$\forall\, t \in K\ \forall\, x \in E\ f(tx) = t^{\alpha} f(x)$.

Remarque 1.1.3. *Pour* $\alpha = 1$ *on dit tout simplement que* f *est homogène.*

1.2 Espaces vectoriel normé

1.2.1 Définition d'une norme

Définition 1.2.1. *Soit E un K-espace vectoriel, une norme sur E est une application*
$N : E \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ *satisfaisant les hypothéses suivantes :*
(1) $\forall x \in E, N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ *(séparation)*
(2) $\forall(\lambda, x) \in K \times E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *(homogénété)*
(3) $\forall(x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire)*
Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Remarque 1.2.1. *: Soit* (E, N) *un espace vectoriel normé*
$i)$ $N(0) = 0$.
$ii)$ $\forall x \in E$, $N(x) \geq 0$.
$iii)$ *Si la propriété (1) (séparation), n'est pas vérifiée, on dit que N est une sémi-norme.*
$iv)$ $(x, y) \in E \times E \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$. .

1.2.2 Normes usuelles

On montre que les applications ci-dessous sont des normes sur E :
(i) $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $x \longmapsto |x|$
(ii) $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$, $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}_n, p \in [1, +\infty[\, : x \longmapsto ||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
(iii) $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R} : x \longmapsto ||x||_\infty = \sup_{i \in (1,2,....,n)} |x_i|$

$(4i)$ Norme d'une application lineaire continue $u \in \mathcal{L}(E,F)$ où $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie :

$$u \longmapsto ||u|| = \sup_{x \in B_F(0,1)} ||u(x)||_F$$

où $B_F(0,1)$ désigne la boule fermée unité :$B_F(0,1) = \{x \in E : ||x||_E \leq 1\}$.
Notons qu'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue sur E si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad tel \quad que \quad \forall x \in E : ||u(x)||_F \leq M||x||_E$$

(5i) $E = \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{i=0}^{n} a_i X_i \in \mathbb{R}_n[X] : P \longmapsto ||P|| = \sup_{i \in \{0,1,\ldots,n\}} |a_i|$.

1.2.3 Normes équivalentes

Définition 1.2.2. *Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes si :*

$$\exists(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad tel \quad que : \forall x \in E, \lambda N_1(x) \leq N_2(x) \leq \mu N_1(x).$$

Et on note alors $N_1 \sim N_2$ sur E.

Remarque 1.2.2. *La relation ainsi définie est bien une relation d'équivalence :*
En effet
$i)$ *On a $N_1 \sim N_1$ en choisissant $\lambda = \mu = 1$ d'où la réflexivité.*
$ii)$ *Si $\lambda N_1(x) \leq N_2(x) \leq \mu N_1(x)$ alors $\frac{1}{\mu} N_2(x) \leq N_1(x) \leq \frac{1}{\lambda} N_2(x)$ d'où la symétrie.*
$iii)$ *Si $\lambda N_1(x) \leq N_2(x) \leq \mu N_1(x)$ et $\alpha N_2(x) \leq N_3(x) \leq \beta N_2(x)$ Alors $\lambda\alpha N_1(x) \leq N_3(x) \leq \mu\beta N_1(x)$ D'où la transitivité.*

Théorème 1.2.1. $i)$ *Deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si et seulement si l'application*
Id : $(E, N_1) \to (E, N_2)$ est bicontinue (ou encore si "si l'identité est un homéomorphisme").
$ii)$ *Deux normes N_1 et N_2 sont non équivalentes si et seulement s'il existe une suite (x_n) d'éléments de E telle que la suite $(\frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)})$ ne soit pas bornée.*

Exemple 1.2.1. *sur $\mathbb{R}^n$, les normes $||.||_1, ||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes.*

<u>Contre exemple</u> : Sur $E = C([0;1], \mathbb{R})$, on considère les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ définies par :

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \quad et \quad ||f||_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

On considére la suite (f_n) d'élément de E définie par :

$$f_n(x)\begin{cases} -n^2x+n \quad \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0 \quad \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

On a

$$||f_n||_\infty = \sup_{i\in[0;1]} |f_n(t)| = n \quad et \quad ||f_n||_1 = \int_0^1 |f_n(t)|dt = \frac{1}{2}$$

d'où : $\frac{||f_n||_\infty}{||f_n||_1} = 2n$. Donc il n'existe pas de réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, ||f_n||_\infty \leq M||f_n||_1$

Donc les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Théorème 1.2.2. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
Si E est de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Attention : Ce théoreme est faux si le corps de base n'est pas complet.

Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et N une norme quelconque sur E.Munissons E de la norme $||\cdot||_\infty$:

Rappelons que pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on a : $||x||_\infty = \sup_{i\in 1,2,...,n} |x_i|$.

Lemme 1.2.1. *Si E est de dimension finie, alors toute norme N est une application continue de $(E, ||.||_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$.*

Démonstration. Nous allons montrer que l'application N est lipschitzienne.

Soit x $\in E$, on a : $N(x) = N(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)$. D'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme N, on a :

$$N(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(e_i)||x||_\infty.$$

Posons $M = \sum_{i=1}^{n} N(e_i)$. ($M > 0$ car, les e_i étant non nuls, on a $N(e_i) \neq 0$.

D'où : $N(x) \leq M||x||_\infty$

On peut donc écrire : $\exists M > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in E^2, N(x - y) \leq M||x - y||_\infty$

Or d'après l'inégalité triangulaire renversée :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$$

On peut donc écrire : $\exists M > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq M||x - y||_\infty$

Ce qui signifie que l'application $N : (E, ||.||_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$ est M-lipchizienne donc continue sur E. $\square$

1.3 Espace de Banach

Définition 1.3.1. *Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, on dit que $(E||.||)$ est complet si toute suite de Cauchy de points de E est convergente*
Un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$ est dit de Banach si $(E, ||.||)$ est complet

1.3.1 Exemples d'espaces de Banach

Voici quelques exemples d'espaces de Banach, qui sont des espaces de fonctions.
Soit $(F, ||.||_F)$ un espace de Banach,
$i)$ $B(A, F)$, l'espace des applications continues bornées de $A \longrightarrow F$ où A est un ensemble, muni de la norme sup : $||.||_B = sup_{x\in A}||f(x)||_F$ est un espace de Banach.
$ii)$ $C_0(E, F)$, espace des applications continues tendent vers 0 à l'infini de E , espace vectoriel normé de dimension finie, à valeurs dans F, muni de la norme Sup $||.||_B$ est un espace de Banach.

1.3.2 Séries dans les espaces de Banach

On sait que dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, les séries absolument convergentes sont convergentes, on sait également qu'une série normalement convergente de fonctions continues est uniformément convergente vers une limite continue.

Définition 1.3.2. *Soit E un espace vectoriel normé et (x_n) une suite de point de E. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$ est convergente .*

Définition 1.3.3. *Soit E un espace vectoriel normé et (x_n) une suite de E. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est normalement convergente si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} ||x_n||$ est convergente.*

Proposition 1.3.1. *Dans un espace de Banach, toute série normalement convergente est convergente.*

Démonstration. En effet, si la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est normalement convergente alors, pour tout $p \geq 0$

$$||S_N + p - S_N|| = ||\sum_{n=N+1}^{N+p} x_n|| \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} ||x_n|| \leq \sum_{n\leq N+1} ||x_n|| = R_N \longrightarrow 0$$

Ainsi la suite (S_N) est de Cauchy, et donc convergente puisque l'espace ambiant est un espace de Banach. □

Proposition 1.3.2. *Si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, elle est convergente.*

Proposition 1.3.3. *Un espace vectoriel normé où toute série normalement convergente est convergente est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E, nous allons construire une sous-suite de (x_n) qui converge. D'après la proposition1.3.2, la suite (x_n) sera donc convergente. Puisque (x_n) est de Cauchy, il existe $N_1 \geq 1$ tel que,

$$||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{2} \quad \forall \quad n, m \geq N_1.$$

Puis il existe $N_2 > N_1$ tel que,

$$||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{4} \quad \forall n, m \quad \geq N_2.$$

Par réccurence, on construit une suite croissante d'entiers $N_1 < N_2 < ...$ telle que

$$||x_n - x_m|| \leq 2^{-k} \quad \forall \quad n, m \quad \geq N_k.$$

En particulier

$$||x_{N_{k+1}} - x_{N_k}|| \leq 2^{-k}.$$

Or

$$\sum_{k\geq 0}(x_{N_{k+1}} - x_{N_k}) \leq \sum_{k\geq 0}(||x_{N_{k+1}} - x_{N_k}||)$$

La série

$$\sum_{k\geq 0}(x_{N_{k+1}} - x_{N_k})$$

étant normalement convergente, elle admet une limite dans E, que nous noterons S. De plus, cette série est télescopique :

$$S_j = \sum_{k=1}^{j} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k}) = x_{N_j} - x_{N_1}$$

de sorte que

$$x_{N_j} \longrightarrow x_{N_1} + S \quad lorsque \quad j \longrightarrow +\infty$$

Ainsi (x_n) admet une sous-suite convergente. $\square$

⋆ ⋆ CHAPITRE DEUX ⋆ ⋆

ESPACE DE RIESZ

2.1 Espace de Riesz

2.1.1 Définition d'un espace de Riesz

Définition 2.1.1. *un espace de Riesz est un espace vectoriel ordonné dont deux éléments quelconques x, y admettent une borne supérieure $(sup(\{x, y\}))$ et une borne inférieure $(inf(\{x, y\}))$.*

Exemple 2.1.1. *L'espace $\mathbb{R}^A$ de toutes les fonctions numériques définies dans un ensemble quelconque A muni de la relation d'ordre $\leq$ definie par $f \leq g$ si et seulement si $\forall t \in A, f(t) \leq g(t)$ est un espace de Riesz.*

En effet, deux fonctions numériques quelconques f, g définies dans A admettent une borne supériure (resp inférieure) égale à l'application $t \mapsto$ sup(f(t), g(t) (resp à l'application $t \mapsto inf(f(t), g(t))$.

Définition 2.1.2. *Soit E un espace de Riesz et x un élément de E.*

$i)$ $x^+ = sup(x, 0)$ (partie positive de x),

$ii)$ $x^- = (-x)^+ = sup(-x, 0)$ (partie négative de x),

$iii)$ $|x| = sup(x, -x)$ (valeur absolue de x).

Proposition 2.1.1. *[3] Soit E un espace de Riesz et x et y deux éléments de E.*

$i)$$x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$, et $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$.

$ii)$ $x \leq y \Longrightarrow x^+ \leq y^+$ et $x^- \geq y^-$.

$iii)$ Quelque soient x et y, on a l'égalité du triangle $|x + y| \leq |x| + |y|$.

$iv)$ Si A et B sont deux parties de E ayant chacune une borne supérieure, $A + B$ admet également une borne supérieure, et on a : $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$.

Dans toute la suite nous allons poser $\sup\{x, y\} = x \vee y$ et $\inf\{x, y\} = x \wedge y$

Théorème 2.1.1. *[3] Si x et y sont deux éléments de l'espace de Riesz, alors :*
(1) $x \wedge y = -[(-x) \wedge (-y)]$ *et* $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$.
(2) $x + y = x \wedge y + x \vee y$.
(3) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ *et* $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$
(4) $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$ *et* $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$.

Démonstration. (1) on a $x \leq x \vee y$ et $y \leq x \vee y$ ce qui nous donne $-(x \vee y) \leq -x$ et $-(x \vee y) \leq -y$, et comme $-(x \vee y) \leq (-x) \wedge (-y)$. On a aussi, si $-x \leq z$ et $-y \geq z$,alors $-z \geq x$ et $-z \geq x$, et plus $-z \geq x \vee y$. Donc, $-(x \vee y) \geq z$ est vrai et ceci montre que $-(x \vee y)$ est la borne inférieure de l'ensemble $\{-x, -y\}$. On a donc, $(-x) \wedge (-y) = -(x \vee y)$. Pour le cas de $x \wedge y$ on remplace x par $-x$ et y par $-y$ dans cette preuve précédente.

(2) On a $x \wedge y \leq y$, donc $y - x \wedge y \geq 0$ et comme $x \leq x + y - x \wedge y$. De même, $y \leq x + y - x \wedge y$. Par conséquent, nous avons $x \vee y \leq x + y - x \wedge y$ ou $x \wedge y + x \vee y \leq x + y$. En outre, partant de $y \leq x \vee y$ nous voyions que $x + y \leq x \wedge y + x \vee$, et on a le résultat.

(3) On a Clairement, $x + y \leq x + y \vee z$ et $x + z \leq x + y \vee z$, et toute fois $(x + y) \vee (x + z) \leq x + y \vee z$. Nous avons aussi $y = -x + (x + y) \leq -x + (x + y) \vee (x + z)$, et $z \leq -x + (x + y) \vee (x + z)$, comme $y \vee z \leq -x + (x + y) \vee (x + z)$. De plus, $x + y \vee z \leq (x + y) \vee (x + z)$, d'où $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z)$. Pour l'autre cas on fait une preuve similaire.

(4) Fixons $\alpha > 0$. Clairement on a, $(\alpha x) \vee (\alpha y) \leq \alpha(x + y)$. Si $\alpha x \leq z$ et $\alpha y \leq z$, alors les inégalité $x \leq \frac{1}{\alpha} z$ et $y \leq \frac{1}{\alpha} z$ sont toujours vraies , et comme $x \vee y \leq \frac{1}{\alpha} z$. On a $\alpha(x \vee y) \leq z$, et ceci montre que $\alpha(x \vee y)$ est une borne supérieure de l'ensemble $\{\alpha x, \alpha y\}$. Toutefois, $(\alpha x) \vee (\alpha y) = \alpha(x \vee y)$. Pour l'autre égalité on fait une preuve identique. □

Lemme 2.1.1. *[3]*
Si x, $x_1, x_2, ..., x_n$ *sont les éléments positifs d'un espace de Riesz, alors*

$$x \wedge (x_1 + x_2 + ... + x_n) \leq x \wedge x_1 + x \wedge x_2 + ... + x \wedge x_n$$

.

Théorème 2.1.2. *Si x est un vecteur arbitraire de l'espace de Riesz E, alors :*
(1) $x = x^+ - x^-$.
(2) $|x| = x^+ + x^-$.
(3) $x^+ \wedge x^- = 0$.
(4) Si $x = y - z$ *avec y, z dans* E^+*, alors* $y \geq x^+$ *et* $z \geq x^-$.
(5) Si x = y - z avec $y \wedge z = 0$*, alors* $y = x^+$ *et* $z = x^-$.

Démonstration. (1) D'après le Théorème 2.1.2 $x = x+0 = x \vee 0 + x \wedge 0 = x \vee 0 - (-x) \vee 0 = x + (-x)^-$.

(2) On utilise toujours le théorème 2.1.2 et (1), ce qui donne

$|x| = x \vee (-x) = (2x) \vee 0 - x = 2(x \vee 0) - x = 2x + (-x) = (2x)^+ - (x^+ - x^-) = x + x^+$.

(3) Notons que $x^+ \wedge x^- = (x^+ - x^-) \wedge 0 + x = x \wedge 0 + x^- = -[(-x) \vee 0] + x^- = -x^- + x^- = 0$

.

(a) Supposons que $x = y - z$ avec $y \geq 0$ et $z \geq 0$. De $x = x^+ - x^-$, on a $x^+ = x^- + y - z \leq x^- + y$, et à partir du lemme précédent on $x^+ = x^+ \wedge x^+ \leq x^+ \wedge (x^- + y) \leq x^+ \wedge x^- + x^+ \wedge y = x^+ \wedge y \leq y$. Similaire ment , $x^- \leq z$.

(a) Soit x = y - z avec $y \wedge z = 0$. Alors, en utilisant le théorème 2.1.2, on voit que $x^+ = (y - z) \wedge 0 = y \vee z - z = (y + z - y \wedge z) - = y$. Donc $x^- = z$ □

Théorème 2.1.3. *Si x et y sont les éléments d'un espace de Riesz E, alors on a :*

(1) $x = (x-y)^+ + x \wedge y$.

(2) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ *et* $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

(3) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$.

(4) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$

. *(5)* $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}||x + y| - |x - y||$.

(6) $|x + y| \wedge |x - y| = ||x| - |y||$.

(7) $|x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$

Démonstration. (1) utilisant le théorème 2.1.2 précédent on a

$x+y+|x-y| = x \vee y - y + x \wedge y = (x-y) \vee (y-y) + x \wedge y = (x-y) \vee 0 + x \wedge y = (x-y)^+ + x \wedge y$

(2) pour la première identité notons que

$x + y + |x - y| = x + y + (x - y) \vee (y - x) = [(x + y) + (x - y)] \vee [(x + y) + (y - x)] = (2x) \vee (2y) = 2(x \vee y)$.

(3) C 'est une conséquence de (2)

(4) Utilisons (2)$|x+y| - |x-y| = (x+y) \vee (-x-y) + |x-y| = (x+y+|x-y|) \vee (-x-y+||x-y)$

$= 2([x \vee y] \vee [(-x) \vee (-y)])$

$= 2([x \vee (-x)] \vee [y \vee (-y)]) = 2(|x| \vee |y|)$.

(5) En utilisant (2) (4) *on a*

$||x + y| - |x - y|| = 2(|x + y| \vee |x - y|) - (|x + y| + |x - y|)$

$= 2(|x| + |y|) - 2(|x| \vee |y|) = 2(|x| \wedge |y|)$.

(6) $Notons \quad que$

$|x+y|\wedge|x-y| = [(x+y)\vee(-x-y)]\wedge[(x-y)\vee(y-x)] = [(x+y)\vee(-x-y)]\wedge(x-y)\vee [(x+y)\vee(-x-y)]\wedge(y-x) = [(x+y)\wedge(x-y)]\vee[(-x-y)\wedge(y-x)]\vee ... \vee[(x+y)\wedge (y-x)]\vee[(-x-y)\wedge(y-x)] = [x+y\wedge(-y)]\vee[-y+(-x)\wedge x]\vee ... \vee[y+x\wedge(-x)]\vee[-x+ (-y)\wedge y] = [x+y\wedge(-y)]\vee[-x+y\wedge(-y)]\vee .... \vee[-y+(-x)\wedge x]\vee[y+x\wedge(-x)] = [x\vee(-x)+y\wedge(-y)]\vee[(-y)\vee y+x\wedge(-x)] = [|x|-|y|]\vee[|y|-|x|] = ||x|-|y||.$

$(7) \quad utilisons \quad (3) \quad et \quad (5)$

$|x+y|\vee|x-y| = ||x+y|-|x-y|| + |x+y|\wedge|x-y| = 2(|x|\wedge|y|) + ||x|-|y|| = 2(|x|\wedge|y|) + (|x|\vee|y| - |x|\wedge|y|)$

$= |x|\wedge|y| + |x|\vee|y| = |x|+|y|.$ □

Remarque 2.1.1. *les identités dans (2) ci-dessus montre qu'un espace vectoriel ordonné est un espace de Riesz si et seulement si la valeur absolue $|x| = x\vee(-x)$ existe pour tout vecteur x.*

Définition 2.1.3. *Dans un espace de Riesz, deux éléments x et y sont dit disjoints (et on note $x \perp y$) si $|x|\wedge|y| = 0$.*

Remarque 2.1.2. *Notons à partir du théorème 2.1.3 qu'on a $x \perp y$ si et seulement si* $|x+y| = |x-y|$.

Définition 2.1.4. *Deux sous ensemble A et B d'un espace de Riesz sont disjoint (et on note $A \perp B$) si $a \perp b$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$.*

Si A est un sous ensemble non vide d'un espace de Riesz E, alors son complémentaire est défini par :

$A^c = \{x \in E : x \perp y \,\forall\, y \in A\}$

On note que $A \cap A^c = \{0\}$

Si A et B sont des sous-espaces d'un espace de Riesz, alors on a :

$$|A| = \{|a| : a \in A\}$$

$$A^+ = \{a^+ : a \in A\}$$

$$A^- = \{a^- : a \in A\}$$

$$A \vee B = \{a \vee b : a \in Aetb \in B\}$$

$$A \wedge B = \{a \wedge b : a \in Aetb \in B\}$$

$$x \vee A = \{x \vee a : a \in A\}$$

$$x \wedge A = \{x \wedge a : a \in A\}$$

Théorème 2.1.4. *Soit A un sous-ensemble non vide d'un espace de Riesz E. Si $sup(A)$ existe, alors pour chaque vecteur x $\sup(x \wedge A)$ existe et*

$$sup(x \wedge A) = x \wedge supA$$

De façon similaire, si $inf A$ existe, alors $inf(x \vee A)$ existe et

$$inf(x \vee A) = x \vee inf A$$

.

Démonstration. Supposons que $sup(A)$ existe. Soit $y = supA$ et fixons un vecteur x. Clairement, pour chaque $a \in A$ on a $x \wedge a \leq x \wedge y$ i.e, $x \wedge y$ est un majorant de l'ensemble $x \wedge A$. On voit que $x \wedge y$ est le plus grand majorant de l'ensemble $x \wedge A$ car supposons qu'il existe un z vérifiant $x \wedge a \leq z$ pour tout a dans A. De plus pour chaque $a \in A$ on a $a = x \wedge a + x \vee a - x \leq z + x \vee y - x$, donc $y \leq z + x \vee y - x$. Ce qui implique $x \wedge y = x + y - x \vee y \leq z$, et on voit que $sup(x \wedge A)$ existe et que $sup(x \wedge A) = x \wedge sup(A)$
Ce qui nous permet d'avoir des résultats suivants . $\square$

Théorème 2.1.5. *Pour tout éléments x, y et z dans un espace de Riesz on a les inégalité suivantes.*
(1) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
(2) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ et $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$(inégalité de Birkhoff's).

Démonstration. (1) clairement, $x + y \leq |x| + |y|$ et $-x - y \leq |x| + |y|$. D'où $|x + y| = (x + y) \vee (-x - y) \leq |x| + |y|$.
Maintenant on observe que l' inégalité $|x| \leq |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y|$ implique $|x| - |y| \leq |x + y|$. De même, $|y| - |x| \leq |x + y|$, et de plus $||x| - |y|| \leq |x + y|$ est toujours vraie
(2) On a :

$$\begin{aligned} x \vee z - y \vee z &= [(x-z) \vee 0 + z] - [(y-z) \vee 0 + z] \\ &= (x-z)^+ - (y-z)^+ \\ &= [(x-y) + (y-z)]^+ - (y-z)^+ \\ &\leq [(x-y)^+ + (y-z)^+] - (y-z)^+ \\ &= (x-y)^+ \leq |x-y|. \end{aligned}$$

Similairement, $y \vee z - x \vee z \leq |x-y|$, et comme $|x \vee z - y \vee z| \leq |x-y|$.
En particulier, notons que dans tout espace de Riesz on a

$$|x^+ - y^+| \leq |x-y| \quad et \quad |x^- - y^-| \leq |x-y|.$$

□

Définition 2.1.5. *Une suite $(x_n)_n$ dans un espace de Riesz est dite décroissante (on note $x_n \downarrow$) si pour $m \geq n$ implique $x_n \geq x_m$.*

La notation $x_n \downarrow x$ veut dire $x_n \downarrow$ et $inf(x_n) = x$. De même pour les notations $x_n \uparrow$ et $x_n \uparrow x$.

Théorème 2.1.6. *(Propriété de décomposition) Si $|x| \leq |y_1 + y_2 + .. + y_n|$ dans un espace de Riesz, alors il existe $x_1, x_2, ..., x_n$ satisfaisant $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$ et $|x_i|| \leq |y_i|$ pour chaque i = 1, ... , n. De plus, si x est positive, alors les x_i seront positives.*

Définition 2.1.6. *Deux éléments x, y de E sont dits étrangers si $inf(|x|, |y|) = 0$*

Proposition 2.1.2. *[3]*
$i)$ x et y étrangers si et seulement si $sup(|x|, |y|) = |x| + |y|$,
$ii)$ 0 est le seul élément étranger à lui-même,
$iii)$ pour tout $x \in E, x^+$ et x^-sont étrangers et peuvent être caractérisés comme les seuls éléments étrangers $y \geq 0, z \geq 0$ tel que $x = y - z$.
$iv)$ Si y est étranger à x, tout $z \in E$ tel que $|z| \leq |y|$ est étranger à x.

v) Si y et z sont étrangers à x, il en est de même de $|y| + |z|$,

vi) Si une partie A de E est formée d'éléments étrangers à x, si A admet une borne supérieure, cette borne supérieure est encore étrangére à x.

Lemme 2.1.2. *[3] Si $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in J}$ sont deux suites finies d'éléments positifs de E telles que $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} y_i$, il existe une suite finie $(z_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ d'éléments positifs de E telle que $x_i = \sum_{j\in J} z_{ij}$ pour tout $i \in I$ et $y_j = \sum_{i\in I} z_{ij}$ pour tout $j \in J$.*

2.1.2 Génération d'un espase de Riesz par ses éléments positifs

Dans cette section nous allons nous intéresser aux éléments positifs d'un espace de Riesz.

Définition 2.1.7. *Soit E un espace vectoriel ordonné, et A une partie de E.*
A est un cône convexe si $ax + by$ appartient à A, pour tous scalaire strictement positifs a, b et tous x, y dans A.

Proposition 2.1.3. *Cette définition est équivalente à : A est à la fois un cône (c'est-à-dire que $aA \subset A$ pour tout $a > 0$) et un convexe (c'est-à-dire qu'il est stable par combinaisons convexe).*

Théorème 2.1.7. *Soit E un espace vectoriel ordonné, l'ensemble E_+ des éléments positifs de E est un cône convexe de sommet O.*

Théorème 2.1.8. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et E_+ son cône convexe de sommet O, tel que $E_+ \cap (-E_+) = \{O\}$. Pour que la structure d'ordre ainsi définie sur E définisse une structure d'espace de Riesz, il faut et il suffit que :*
(1) E_+ engendre E, c'est-à-dire que tout z ∈ E soit de la forme $y - x$, ou x et y appartiennent à E_+,
(2) E_+ vérifie l'une des deux conditions suivantes :
(a) deux éléments quelconques de E_+ admettent dans E_+ une borne supérieure,
(b) deux éléments quelconques de E_+ admettent dans E_+ une borne inférieure.

2.1.3 Espaces complètement réticulés

Définition 2.1.8. *On dit qu'un espace de Riesz E est complètement réticulé si toute partie majorée non vide de E admet une borne supérieure dans E.*

Définition 2.1.9. *L'enveloppe supérieure d'une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'application d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$ est l'application*

$$x \mapsto \sup_{i\in I}(f_i(x))$$

Exemple 2.1.2. *(1) Si A est un ensemble quelconque, l'espace $\mathbb{R}^A$ des fonctions numériques définies dans A est complètement réticulé, la borne supérieure dans $\mathbb{R}^A$ d'une famille majorée étant son enveloppe supérieure.*

(2) Soit F un ensemble quelconque, l'espace $\mathcal{B}(F)$ des fonctions numériques bornées dans F muni de la structure d'ordre induite par celle de $\mathbb{R}^F$, est complétement réticulé.

Par contre, si F est un espace topologique, l'espace $\mathcal{C}(F)$ des fonctions numériques continues dans F (muni de la structure d'ordre induite par celle de $\mathbb{R}^F$) est un espace de Riesz qui en général n'est pas complètement réticulé.

Proposition 2.1.4. *Pour qu'un espace vectoriel ordonné E soit complètement réticulé, il faut et il suffit que E soit un espace de Riesz, et vérifie l'une des deux conditions suivantes :*
(i) tout ensemble non vide A, formé d'élément positifs de E majorée et filtrant pour la relation $\leq$, admet une borne supérieure dans E,
(ii) tout ensemble non vide A, formé d'élément positifs de E et filtrant pour la relation $\geq$, admet une borne inférieure dans E.

Démonstration. Supposons que E soit un espace de Riesz satisfaisant à la condition (i). Soit B une partie majorée non vide de E, l'ensemble C des bornes supérieures des parties finies de E est filtrant pour la relation $\leq$, soit a un de ses élément, et C_a l'ensemble des $x \in C$qui sont supérieurs à a, si nous prouvons que C_a admet une borne supérieure, cette borne sera aussi la borne supérieure de B. Or, $C_a - a$ est un ensemble d'éléments positifs, majoré et filtrant pour la relation $\leq$, il a donc une borne supérieure b, et par suite a+b est la borne supérieure de C_a.

D'autre part, la condition (ii) entraine (i) : en effet, si F est un ensemble non vide d'éléments positifs de E, majoré et filtrant pour $\leq$, et si c est un majorant de F, c-F est un ensemble d'éléments positifs, filtrant pour $\leq$, s'il admet une borne inférieure m, c-m est la borne supérieure de F. □

Proposition 2.1.5. *Soit E un espace de Riesz, muni d'une topologie séparée compatible avec sa structure d'espace vectoriel ordonné. Si, pour tout ensemble $H \subset E$ majoré et filtrant pour la relation $\leq$, le filtre des sections de H est convergent, E est complètement réticulé.*

Sous-espace et espaces produits d'espaces complètement réticulés

Soient E un espace complètement réticulé, H un sous-espace vectoriel de E. La structure d'ordre induite sur H par celle de E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de H, mais l'espace vectoriel ordonné H ainsi défini n'est nécessairement pas un espace complètement réticulé. De façon précise, il peut se faire que H ne soit pas un espace de Riesz, ou que H soit un espace de Riesz non complètement réticulé, ce dernier cas est celui du sous-espace $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. En outre, lorsque H est un espace de Riesz (complètement réticulé ou non) il se peut que la borne supérieure dans H de deux éléments de H soit distincte de leur borne supérieure dans E. Enfin, il est possible que H soit complètement réticulé, que les bornes supérieures de toute partie finie de H soient les même dans E et dans H, mais qu'il existe des parties infinies de H, majorées dans H, et dont les bornes supérieures dans E et dans H soient distinctes.

Définition 2.1.10. *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'espaces vectoriels ordonnés et dans l'espace produit $E = \prod\limits_{i\in I} E_i$, la relation d'ordre produit des relations d'ordre des espaces facteurs est la relation*

$$\forall i \in I, x_i \leq y_i.$$

cette relation d'ordre est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E.
E muni de cette structure, est appelé l'espace produit des espaces ordonnés E_i.

Proposition 2.1.6. *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces vectoriels ordonnés. Pour que l'espace produit $E = \prod_{i\in I} E_i$ soit un espaces de Riesz (resp. un espace complètement réticulé), il faut et il suffit que chacun des espaces E_i soit un espace de Riesz (resp. un espace complètement réticulé).*

Démonstration. Supposons que tous les E_i soient complètement réticulés, soient A une partie majorée non vide de E, $a = (a_i)$ un majorant de A. Pour tout $i \in I$, A est majoré par a_i, et admet donc une borne supérieure b_i dans E_i, il est clair que (b_i) est la borne supérieure de A dans E.

Réciproquement, supposons E complètement réticulé. Soit A_k une partie majorée de $E_k, A_k^{'}$ la partie de E formée des $x = (x_i)$ tels que $x_k \in A_k$ et $x_i = 0$ pour $i \neq k$. Il est immédiat que $A_k^{'}$ est majoré dans A, donc admet une borne supérieure $b = (b_i)$, d'après la définition de la relation d'ordre produit, on a nécessairement $b_i = 0$ pour $i \neq k$ et b_k est borne supérieure de A_k, ce qui achève la démonstration. □

Proposition 2.1.7. *Pour qu'un espace vectoriel ordonné E soit somme directe ordonnée de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires V et W, il faut et il suffit que* $\forall x \in V, y \in W$ *on a* $x + y \geq 0$ *implique* $x \geq 0$ *et* $y \geq 0$.

Démonstration. En effet, comme $x \geq 0$ et $y \geq 0$ entrainent $x + y \geq 0$ dans E, la condition de l'énoncé exprime que $(x, y) \longrightarrow x+y$ transforme l'ensemble des éléments positifs de $V \times W$ en l'ensemble des éléments positifs de E. □

Bandes dans un espace complètement réticulé

Définition 2.1.11. *Dans un espace complètement réticulé E, on dit qu'un sous-espace vectoriel B de E est une bande s'il satisfait aux conditions suivantes :*
(1) les relations $x \in B, y \in E$ *et* $|y| \leq |x|$ *entrainent* $y \in B$,
(2) pour toute partie non vide X de B, majorée dans E, la borne supérieure supX de X dans E appartient à B.

Exemple 2.1.3. *Dans l'espace* $\mathbb{R}^A$ *des fonctions numériques finies définies dans un ensemble A, l'ensemble des fonctions nulles en tous les points d'une partie M de A est une bande.*

Remarque 2.1.3. *Dans l'espace* $\mathbb{R}^A$*, le sous-espace B(A) des fonctions numériques bornées dans A satisfait à la condition (1) de la définition précédente. En outre, pour toute partie X de B(A) majorée dans B(A), l'enveloppe supérieure de X appartient à B(A). Mais, si A est infini, une partie de B(A) peut être majorée dans* R^A *sans être majorée dans B(A), et par suite B(A) n'est pas une bande dans* R^A*. Il résulte aussitôt de la définition précédente que, si B est une bande dans E, pour toute partie non vide X de B, minorée dans E,* $inf(X)$ *appartient à B. Toute bande B dans E, munie de la structure d'espace vectoriel ordonné induite par celle de E, est un espace complètement réticulé, et pour toute partie* $X \subset B$*, majorée dans B, la borne supérieure de X dans B est identique à sa borne supérieure dans E.*

Proposition 2.1.8. $i)$ *Toute intersection d'une famille de bandes dans un espace complètement réticulé E est encore une bande.*
$ii)$ *Pour toute partie* $M \subset E$*, il existe une plus petite bande contenant M (puisque E est lui-même une bande) ; on dira que cette bande est une bande engendrée par M.*

Les propriétés des bandes dans un espace complètement réticulé reposent sur la proposition suivante :

Proposition 2.1.9. *Soient E un espace complètement réticulé, A une partie non vide de E formée d'éléments positifs, telle que :*
(1) $A + A \subset A$*;*
(2) les relations $x \in A$ *et* $0 \leq y \leq x$ *entrainent* $y \in A$*. Soit M l'ensemble des bornes supérieure dans E des parties de A majorées dans E. Dans ces conditions, tout élément* $x \leq 0$ *de E peut s'écrire sous la forme y + x, où* $y \in M$ *est la borne supérieure des éléments* $v \in A$ *tels que* $v \leq x$*, et où z est un éléments positifs étrangers à tous les éléments de M.*

Démonstration. En effet, on a $y \leq x$. Tout revient à montrer que $z = x - y$ est étranger à tout élément $t \in A$, ou encore que $u = inf(z, t)$ est nul. Par hypothèse, on a $u \in A$ et $u \leq x - y$, donc $u + y \leq x$; pour tout $v \in A$ tel que $v \leq x$, on a par définition $v \leq y$, donc $u + v \leq u + y \leq x$; comme $u + v \in A$ par hypothèse, on a aussi $u + v \leq y$ par définition de y ; enfin, comme $u + y$ est la borne supérieure dans E des éléments $u + v$ tels que $v \in A$ et $v \leq x$, on a $u + y \leq y$, d'où $u \leq 0$, ce qui achève la démonstration. □

Théorème 2.1.9. *(F.Riesz) Soit* A *une partie d'un espace complètement réticulé E. L'ensemble* A' *des éléments étrangers à tous les éléments de* A *est une bande ; la bande* A'' *des éléments étrangers à tous les éléments de* A' *est identique à la bande engendrée par* A*, et E est somme directe ordonnée des bandes* A' *et* A''*.*

Démonstration. Les propriétés des éléments étrangers et la définition d'une d'une bande, montrent aussitôt que A' est une bande, donc aussiA''. D'après la proposition 2.1.5 et la définition d'une bande, tout élément $x \geq 0$ de E peut s'écrire $x = y + z$, où $y \in A'$ et A'', y et z étant positif, comme tout élément de E est différent de deux éléments positifs, on a $E = A' + A''$ d'autre part, 0 étant le seul élément étranger à lui même, on a $A' \cap A'' = 0$, ce qui prouve que E est la somme directe de A' et A''. Enfin, comme les composantes dans A' et A'' d'un élément positif de E sont positifs, E est somme directe ordonnée de A' et A''.

Reste à montrer que A'' est identique à la bande B engendrée par A. Or, E est somme directe de B et de la bande B' formée des éléments étrangers à tous les éléments de B, comme $A \subset B$, on a $B' \subset A'$; mais d'autre part $B \subset A''$, et E est aussi somme directe de A' et A'', on a donc nécessairement $B = A'', B' = A'$. □

Proposition 2.1.10. *Soient E un espace complètement réticulé, M une partie de E, B la bande engendrée par M. Soit* M_1 *l'ensemble des éléments positifs de E dont chacun est majoré par un* *élément de la forme $\sum_i |x_i|$ où $x_i \in M$, soit M_2 l'ensemble des bornes supérieures des parties majorées de M_1, l'ensemble M_2 est identique à l'ensemble des éléments positifs de B.*

Démonstration. On a évidemment $M_2 \subset B$ par définition d'une bande, d'autre part, si B' est la bande des éléments étrangers a à tous les éléments de M_1, le théorème précédent montre que E est somme directe ordonnée de B et B'. Mais la proposition précédente prouve que tout élément positif de E est somme d'un élément de M_2 et d'un élément de B', d'où la proposition. □

Corollaire 2.1.1. *Soit a un élément d'un espace complètement réticulé E. Soient B_a la bande engendrée par a, B'_a la bande des éléments étrangers à a. Pour tout élément $x \geq 0$ de E, la composante de x dans B_a et B'_a est égale à $\sup_{n \in N}(\inf(n|a|, x))$.*

Cela résulte de la proposition 2.1.9 et la proposition 2.1.10 appliquée à $M = \{a\}$.

Remarque 2.1.4. $i)$ *les bandes engendrées par a et $|a|$ sont identique.*
$ii)$ *Si a et b sont deux éléments étrangers de E, A et B les bandes engendrées par a et b respectivement, tout élément de A est étranger à tout élément de B,*
En effet, b appartient à la bande A' des éléments étrangers à a, d'où $B \subset A'$, et d'après le Théorème précédent tout élément de A est étranger à tout élément de A'.

2.2 Formes linéaires et operateurs positives un espace de Riesz

2.2.1 Formes linéaires sur un espace de Riesz

Formes linéaires positives sur un espace de Riesz

Définition 2.2.1. *Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Une forme linéaire sur E est une application de E dans $\mathbb{K}$ qui est linéaire.*

Définition 2.2.2. *Etant donné un espace vectoriel ordonné E, on dit qu'une forme linéaire L sur E est positive si, pour tout $x \geq 0$ dans E, on a $L(x) \geq 0$.*
Comme $L(y) - L(x) = L(y - x)$, il revient au même de dire que la relation $x \leq y$ entraîne $L(x) \leq L(y)$, ou encore que L est une fonction croissante dans E.

Exemple 2.2.1. *(1) Soient A un ensemble quelconque, E un sous-espace de l'espace $\mathbb{R}^A$ de toutes les fonctions numériques définies dans A. Pour tout élément $a \in A$, l'application $f \longmapsto f(a)$ est une forme linéaire positive sur E.*

(2) Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, E l'espace de Riesz formé des fonctions numériques réglées dans I, l'application $f \longmapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire positive sur E.

(3) Soient F un ensemble quelconque, ν un ultrafiltre sur F, E l'espace de Riesz $B(F)$ l'ensemble des fonctions numériques bornées dans F. Pour tout $f \in E$, $\lim_\nu f(t)$ existe, car $f(\nu)$ est base d'ultrafiltre sur l'ensemble relativement compact $f(\nu)$, et par suite est convergente. En outre, si $f \geq 0$, on a $\lim_\nu f(t) \geq 0$ en vertu du principe de prolongement des inégalités, l'application $f \longmapsto \lim_\nu f$ est donc une forme linéaire positive sur E. Si on prend pour ν l'ultrafiltre formé des ensembles contenant un élément $a \in F$, on retrouve la forme linéaire positive $f \longmapsto f(t)$ (1).

Proposition 2.2.1. *Soient E un espace vectoriel ordonné, L une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$L(x + y) = L(x) + L(y)$$

et que la relation $x \geq 0$ entraine $L(x) \geq 0$, alors, pour tout scalaire λ et tout $x \geq 0$, on a $L(\lambda x) = \lambda L(x)$.

Démonstration. Comme $L(-x) = -L(x)$ (L étant une representation du groupe additif E dans R), on peut se borner au cas où $\lambda \geq 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, on a $L(nx) = nL(x)$, d'où $L((\frac{1}{n})x) = \frac{1}{n}L(x)$ et par suite $L(rx) = rL(x)$ pour tout nombre rationnel $r \geq 0$. D'autre part L est croissante dans E, si r et r' sont deux nombres rationnels tels que $r \leq \lambda \leq r'$, on a donc $rL(x) \leq L(\lambda x) \leq r'L(x)$, comme $rL(x)$ et $r'L(x)$ différent d'aussi peu qu'on veut de $\lambda L(x)$, on a $L(\lambda x) = \lambda L(x)$. □

Proposition 2.2.2. *Soient E un espace vectoriel réel, C un cône convexe de sommet O dans E tel que $E = C - C$ et $x \longmapsto M(x)$ une application de C dans $\mathbb{R}$ telle que, pour $x \in C, y \in C$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, on ait $M(\lambda x + \mu y) = \lambda M(x) + \mu M(y)$. Alors il existe une forme linéaire et une seule L qui prolonge M à E.*

Démonstration. En effet, par hypothèse, tout $z \in E$ peut s'écrire $z = y - x$ où x, y appartiennent à C, en outre, si $z = y' - x'$ avec $x' \in C, y' \in C$, on a $M(y) - M(x) = M(y') - M(x')$, en effet, de la relation $y - x = y' - x'$, on tire $y + x' = x + y'$, et par suite $M(y) + M(x') = M(x) + M(y')$. Désignons par $L(z)$ la valeur commune de $M(y) - M(x)$ pour toute expression de z comme différence $y - x$ de deux éléments de C, on vérifie immédiatement que L est une forme linéaire sur E prolongeant M, l'unicité de L résulte de ce que C engendre l'espace E. □

Proposition 2.2.3. *Soient E un espace vectoriel ordonné filtrant, P l'ensemble des éléments ≥ 0 de E, $x \longmapsto M(x)$ une application de P dans $\mathbb{R}$, à valeur positifs et telle que $M(x+y) = M(x) + M(y)$ quels que soient x, y dans P. Il existe alors une forme linéaire positive et une seule L qui prolonge M à E.*

Démonstration. Comme $E = P - P$, le même raisonnement que dans la proposition précédente prouve d'abord l'existence et l'unicité d'une application additive L de E dans $\mathbb{R}$ prolongeant M. La proposition 2.1.7 montre alors que, pour $\lambda \geq 0$ et pour tout $x \in P$, on a $L(\lambda x) = \lambda L(x)$, d'où résulte aussitôt que L est une forme linéaire. □

Forme lineaire relativement bornées

Soit E un espace vectoriel ordonné filtrant. Soit Q l'ensemble des formes linéaires positives sur E, c'est une partie du dual algébrique E^* de E (espace de toutes les formes lineaires sur E). Il est immédiat que $Q + Q \subset Q$ et $\lambda Q \subset Q$ pour tout scalaire $\lambda > 0$ (en d'autres termes, Q est un cône convexe dans E^*). En outre, on a $Q \cap (-Q) = \{0\}$, car si L et -L sont toutes deux des formes linéaires positives, on a $L(x) \geq 0$ et $L(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$, d'où $L(x) = 0$, pour tout $x \geq 0$, et par suite $L = 0$.

L'ensemble Q définit donc sur E^* une relation d'ordre $L \leq M$, équivalente à "$M - L$ est une forme linéaire positive sur E " ou encore à " pour tout $x \geq 0, L(x) \leq M(x)$ ", les éléments positifs dans E^* pour cette structure d'ordre sont les formes linéaires positives. Soit Ω le sous-espace vectoriel de E^* engendré par Q, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires sur E qui sont différences de deux formes linéaires positives, nous allons donner une autre caractérisation des éléments de Ω lorsque E est un espace de Riesz.

Définition 2.2.3. *Etant donné un espace de Riesz E, on dit qu'une forme linéaire L sur E est relativement bornée si, pour tout $x \geq 0$ dans E, L est bornée dans l'ensemble des $y \in E$ tels que $|y| \leq x$.*

Théorème 2.2.1. *(1) Pour qu'une forme linéaire L sur un espace de Riesz E soit relativement bornée, il faut et il suffit qu'elle soit la différence de deux formes linéaires positives.*
(2) L'espace vectoriel ordonné Ω des formes linéaires positives relativement bornées sur E est un espace de Riesz complètement réticulé.

Démonstration. Si $L = U - V$, où U et V sont deux formes linéaires positives sur E, la relation

$-x \leq y \leq x$ entraine

$$-U(x) \leq U(y) \leq U(x) \quad \text{et} \quad -V(x) \leq V(y) \leq V(x),$$

d'où aussitôt $|L(x)| \leq U(x) + V(x)$, L est donc relativement bornée.

Supposons inversement que L soit relativement bornée; tout revient à prouver qu'il existe une forme linéaire positive N telle que, pour tout $x \geq 0$, on ait $N(x) \geq L(x)$ car alors $N - L$ sera une forme linéaire positive. Or, si une forme linéaire positive N a cette propriété, on a pour tout $x \geq 0$ et pour $0 \leq y \leq x, N(y) \geq L(y)$, et par suite $N(x) \geq \sup\limits_{0 \leq y \leq x} L(y)$, si nous prouvons que la la fonction numérique $x \mapsto M(x) = \sup\limits_{0 \leq y \leq x} L(y)$, définie dans l'ensemble P des éléments positifs de E, se prolonge en une forme linéaire positive sur E (qu'on notera encore M), nous aurons démontré la première partie du théorème, et prouvé en outre que M est la borne supérieure de O et L dans Ω. Comme $M(x) \geq 0$ dans P, tout revient à prouver que, pour deux éléments quelconques $x \geq 0, x' \geq 0$ de E, on a $M(x + x') = M(x) + M(x')$ d'après la définition, on a

$$M(x) + M(x') = \sup_{0 \leq y \leq x} L(y) + \sup_{0 \leq y' \leq x'} L(y') = \sup_{O \leq y \leq x, 0 \leq y' \leq x'} L(y + y') \leq M(x + x').$$

D'autre part, pour tout z tel que $0 \leq z \leq x + x'$, on a $x + x' = z + u$ avec $u \geq 0$, en vertu du lemme de décomposition, il existe donc deux éléments y, y' tels que $0 \leq y \leq x$, $0 \leq y' \leq x'$ et que $z = y + y', u = (x - y) + (x' - y')$, d'où

$$L(z) = L(y) + L(y') \leq M(x) + M(x')$$

et par suite $M(x + x') = \sup\limits_{\leq z \leq x + x'} L(z) \leq M(x) + M(x')$, ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème. De plus, nous avons montré ainsi que Ω est un espace de Riesz, et que, pour toute forme linéaire relativement bornée L sur E, et pour tout $x \geq 0$, on a

$$(1) \quad L^+(x) = \sup_{0 \leq y \leq x} L(y)$$

Reste à voir que Ω est complètement réticulé; pour cela il suffit de montrer qu'un ensemble H de formes linéaires positives, majoré et filtrant pour la relation $\leq$, a une borne supérieure dans Ω.

Or, on a plus généralement le lemme suivant : □

Lemme 2.2.1. *Soient E un espace vectoriel ordonné filtrant, E^* son dual, ordonné en prenant pour éléments positifs les formes linéaires positives. Soit (u_α) une famille filtrante croissante* *d'éléments de E^*. Si, pour tout $x \geq 0$ dans E, on a $\sup u_\alpha(x) < \infty$, alors la famille (u_α) admet une borne supérieure u dans E^*, et pour tout $x \geq 0$ dans E, on a*

$$(2) \quad u(x) = \sup_\alpha u_\alpha(x).$$

Démonstration. Dans l'ensemble P des $x \geq 0$ dans E, définissons en effet l'application u par la formule (2), il est immédiat que pour $\lambda \geq 0$ et $x \in P$, on a $u(\lambda x) = \lambda u(x)$, pour prouver le lemme, il suffit donc, en vertu de la proposition 2.2.1 , de montrer que l'on a

$$u(x+y) = u(x) + u(y)$$

pour x, y dans P. Or cela est immédiat si l'on remarque que l'on a $u(x) = lim u_\alpha(x)$ suivant l'ensemble filtrant des indices (Théorème de la limite monotone).
De la formule (1) on déduit aussitôt que si L et M sont formes linéaires relativement bornées sur E, on a, pour tout $x \geq 0$

$$\begin{cases} sup(L,M)(x) = \sup\limits_{y \geq 0, z \geq 0, y+z=x} (L(y) + M(z)) \\ inf(L,M)(x) = \inf\limits_{y \geq 0, z \geq 0, y+z=x} (L(y) + M(z)) \end{cases}$$

En particulier, si dans la première de ces formules, on remplace M par $-L$, il vient que

$$|L|(x) = \sup_{y \geq 0, z \geq 0, y+z=x} L(y-z).$$

Or, si $x = y+z$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$, on a $-x \leq y - z \leq x$, inversement, la relation $|u| \leq x$ entraine $L(u) \leq |L|(|u|) \leq |L|(x)$ on en déduit la formule

$$(4) \quad |L|(x) = \sup_{|y| \leq x} L(y) \text{pour tout} \quad x \geq 0$$

,

d'où en particulier

$$(5) \quad |L(x)| \leq |L|(|x|) \text{pour tout} x \in E.$$

□

Proposition 2.2.4. *Pour que deux formes linéaires positives L et M sur un espace de Riesz soient étrangères dans l'espace Ω, il faut et il suffit que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \geq 0$ dans E, il existe deux éléments $y \geq 0, z \geq 0$ de E tels que $x = y + z$ et $L(y) + M(z) \leq \varepsilon$.*

Proposition 2.2.5. *Soit L une forme linéaire positive sur un espace de Riesz E. pour qu'une forme linéaire positive M sur E appartienne à la bande engendrée par L dans Ω, il faut et il suffit que, que pour $x \geq 0$ dans E et tout nombre $\varepsilon \geq 0$, il existe un nombre $\delta \geq 0$ tel que les relations $0 \leq y \leq x$ et $L(x) \leq \delta$ entraînent $M(y) \leq \varepsilon$.*

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Si $M \geq 0$ appartient à la bande engendrée par L dans Ω, on a $M = \sup_n(inf(nL, M))$ Si on pose

$$U_n = M - inf(nL, M),$$

U_n est donc une forme linéaire positive sur E et on a $inf_n U_n = 0$ dans Ω, par suite $U_n(x)$ tend vers 0 lorsque n crôit indéfiniment, et il existe n tel que $U_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Le nombre n étant ainsi fixé, on a $U_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout y tel que $0 \leq y \leq x$ donc la relation $0 \leq y \leq x$ entraîne

$$M(y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + inf(nL, M)(y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + nL(y),$$

si y est tel que $L(y) \leq \frac{\varepsilon}{2n}$,on a donc $M(y) \leq \varepsilon$, ce qui établit notre assertion.
Montrons maintenant que la condition est suffisante. Pour toute forme linéaire positive M sur E, on peut écrire M = U + V, où U appartient à la bande engendrée par L dans Ωet où V est étrangére à L, U et Vétant positive. Si M satisfait à la condition de l'énoncé, il en est de même de V = M - U, puisque $0 \leq V \leq M$. Nous allons en déduire que V = 0. En effet, pour tout $x \geq 0$dans E et tout nombre $\eta > 0$, il existe deux éléments $y \geq 0, z \geq 0$de E tels que $x = y + z$ et $L(y) + V(z) \leq \eta$; donnons-nous arbitrairement un nombre $\varepsilon > 0$, et choisissons $\eta \leq \varepsilon$ tel que les relations $0 \leq u \leq x$ et $L(u) \leq \eta$entraînent $V(u) \leq \varepsilon$; y et z étant alors déterminés comme ci-dessus, on a $L(y) \leq \eta$, donc $V(y) \leq \varepsilon$ et par suite

$$V(x) = V(y) + V(z) \leq \varepsilon + \eta \leq 2\varepsilon$$

□

2.2.2 Opérateur positif dans un espace de Riesz

Définition 2.2.4. *Un opérateur est une application lineaire entre deux espaces vectoriels.*

Donc soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, une application $T : E \longrightarrow F$ est appelé opérateur si et seulement si $T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x) + T(\beta y)$ pour tout x, y dans E et α, β dans .$\mathbb{R}$

Définition 2.2.5. *Soient E et F deux espaces de Riesz, un opérateur $T : E \longrightarrow F$ est appelé opérateur positif si pour tout $x \in E_+$, $T(x) \in F_+$.*

Théorème 2.2.2. *[3] Un opérateur $T : E \longrightarrow F$ entre deux espaces de Riesz est un opérateur positif si et seulement si $T(E_+) \subseteq F_+$ (aussi si et seulement si $x \leq y$ implique $T(x) \leq T(y)$).*

Lemme 2.2.2. *Si $T : E \longrightarrow F$ est un opérateur positive entre deux espaces de Riesz, alors pour chaque $x \in E_+$ on a :*
$|T(x)| \leq T(|x|)$.

Démonstration. Si $x \in E$, alors $\pm x \leq |x|$ et la positivité de T donne $\pm|T(x)| \leq T(|x|)$, qui est équivalent a $|T(x)| \leq T(|x|)$. □

Théorème 2.2.3. *(Kantorovich) Supposons que E et F sont deux espaces de Riesz avec F Archimedien. Soit $T : E^+ \longrightarrow F^+$ une application additive, vérifiant $T(x+y) = T(x)+T(y)$ pour tout x, y dans E^+ . Alors T a un unique extension d'opérateur positive de E à F. en plus, l'extension (noté par T aussi) est donné par*

$$S(x) = T(x^+) - T(x^-)$$

pour tout x dans E.

Démonstration. Soit $T : E^+ \longrightarrow F^+$ une application additive . Considérons l'application $S : E \longrightarrow F$ définit par

$$S(x) = T(x^+) - T(x^-)$$

.

Clairement, $S(x) = T(x)$ pour chaque $x \in E^+$. Comme, l'application S est une extension de T sur E. Or $x = x^+ - xm$ pour tout x dans E, il suit que S est la seule extension possible T dans E. De plus pour complété la preuve, on montre que S est linéaire . Il reste à prouve que S est additive et homogène.

Pour l'additivité de S on observe que si un vecteur x de E peut s'écrire comme différence de deux, vecteurs positive, prendre $x = x_1 - x_2$ avec $x_1, x_2 \in E^+$, alors $S(x) = T(x_1) + T(x_2)$. Fixons $x \in E$ et supposons $x = x^+ - x^- = x_1 - x_2$, où $x_1, x_2 \in E^+$. Alors $x_1 - x_2 = x^+ - x^-$, et comme T est additive sur E^+ on a :
$T(x^+) + T(x_2) = T(x^+ + x_2) = T(x_1 + x^-) = T(x_1) + T(x^-)$

Or $S(x) = T(x^+) - T(x^-) = T(x_1) - T(x_2)$

De cette propriété on peut montre aisément que S est additive. Si $x, y \in E$, alors notons que

$$\begin{aligned}
S(x+y) &= S(x^+ + y^+ - (x^- + y^-)) \\
&= T(x^+ + y^+) - T(x^- + y^-) \\
&= T(x^+) + T(y^+) - T(x^-) - T(y^-) \\
&= [T(x^+) - T(x^-)] + [T(x^+) - T(y^-)] \\
&= S(x) + S(y).
\end{aligned}$$

En particulier, l'additivité de S implique que $S(rx) = rS(x)$ pour tout $x \in E$ et tout nombre rationnel r.

Il reste à montrer que S est homogène. Pour ça, on prouve premièrement que S est monotone i.e montre que $\forall x, y \in E; x \leq y$ implique $S(x) \leq S(y)$ dans F.

Soient x et y dans E avec $x \leq y$ alors $y - x \in E^+$, et par l'additivité de S on a $S(x) = S((y-x)+x) = S(y-x) + S(x) = T(y-x) + S(x) \geq S(x)$.

Maintenant fixons $x \in E^+$ et $\lambda \geq 0$. Soient deux suites à terme positive (r_n) et (t_n) telles que $r_n \uparrow \lambda$ et $t_n \downarrow \lambda$. Inégalité $r_n x \leq \lambda x \leq t_n x$ et le fait que S est monotone implique

$$r_n S(x) = S(r_n x) \leq S(\lambda x) \leq S(t_n x) = t_n S(x)$$

pour chaque n. En utilisant le fait F est archimedien, on a $\lambda S(x) = S(\lambda x)$. Finalement, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, alors

$$\begin{aligned}
S(\lambda x) &= S(\lambda x^+ + (-\lambda)x^-) = S(\lambda x^+) + S((-\lambda)x^-) \\
&= \lambda S(x^+) - S(x^-) = \lambda[T(x^+) - T(x^-)] = \lambda S(x)
\end{aligned}$$

D'où S est homogène □

Remarque 2.2.1. *Soit $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction additive et non linéaire, et soit F un lexicographe plane. Considérons $T : \mathbb{R}^+ \longrightarrow F^+$ définit par $T(x) = (x, \Phi(x))$ pour tout x dans $\mathbb{R}^+$. Notons que T est additive et que si T est une extension d'un opérateur de $\mathbb{R}$ à F, alors sera linéaire .*

Or, une application $t : E^+ \longrightarrow F^+$ a une unique extension d'opérateur positif de E à F si et seulement si T est additive dans E^+.

L'espace vectoriel de tout les opérateurs de E à F qui est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 2.2.4. *L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ muni de l'ordre $T \geq S$ si et seulement si $T - S$ est un opérateur positive (i.e $T(x) \geq S(x)$ pour tout $x \in E^+$) est un espace vectoriel ordonné.*

Définition 2.2.6. *Pour un opérateur $T : E \longrightarrow F$ entre deux espaces de Riesz. On dira que T a un module noté |T| si*

$$|T| = T \vee (-T)$$

existe dans le sens que |T| est une borne supérieure de l'ensemble -T, T dans $\mathcal{L}(E, F)$.
Dans l'ordre d'étude des propriétés du module, on voit la propriété de décomposition des espace de Riesz.

Théorème 2.2.5. *Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur entre deux espaces de Riesz tel que* $\sup \{|T(y)| : |y| \leq x\}$ *existe dans F pour chaque $x \in E^+$. Alors le module de T existe et*

$$|T| = \sup \{|T(x)| : |y| \leq x\}$$

pour tout $x \in E^+$

Démonstration. Soit $S : E^+ \longrightarrow F^+$ par $S(x) = \sup |T(x)| : |y| \leq x$ pour tout $x \in E^+$. Or $|y| \leq x$ implique $| \pm y| = |y| \leq x$, il suit qu'on a $S(x) = \sup T(y) : |y| \leq x$ pour chaque $x \in E^+$. On prétend que S est additive .
A cet effet, soit $u, v \in E^+$. Si $|y| \leq u$ et $|z| \leq v$, alors $|y + z| \leq |y| + |z| \leq u + v$, et il suit de $T(y) + T(z) = T(y + z) \leq S(u + v)$ que $S(u) + S(v) \leq S(u + v)$.
D'autre part, si $|y| \leq u+v$, alors par le théorème précédent il existe y_1 et y_2 avec $|y_1| \leq u, |y_2| \leq v$, et $y = y_1 + y_2$. Alors $T(y) = T(y_1) + T(y_2) \leq S(u) + S(v)$, donc $S(u + v) \leq S(u) + S(v)$.
Ainsi $S(u + v) = S(u) + S(v)$. Par le théorème précédent l'application S est un opérateur positif de E à F.
A cet effet, S est une borne supérieure de $\{-T, T\}$, notons premièrement que $T \leq s$ et $-T \leq S$dans $\mathcal{L}(E, F)$. maintenant supposons que $\pm T \leq R$ dans $\mathcal{L}(E, F)$. Clairement, R est un opérateur positif. Fixons $x \in E^+$. Si $|y| \leq x$, alors

$$T(x) = T(y^+) + T(y^-) \leq R(y^+) + T(y^-) = R(|y|) \leq R(x)$$

. De plus, $S(x) \leq R(x)$ pour chaque $x \in E^+$, et comme $S = T \vee (-T)$ dans $\mathcal{L}(E, F)$. $\square$

Il est important d'observer que si le module d'un opérateur $T : \vee E \longrightarrow F$ existe, alors

$$|T(x)| \leq |T|(|x|)$$

pour tout $x \in E$.

⋆ ⋆ CHAPITRE TROIS ⋆ ⋆

NORME DE RIESZ ET TREILLIS DE BANACH

3.1 Norme de Riesz

Définition 3.1.1 (Définition norme de Riesz). .

Soit E un espace de Riesz, une norme $||.||$ sur E est appelé norme de Riesz si

$$\forall x, y \in E \quad |x| \leq |y| \Longrightarrow ||x|| \leq ||y||$$

.

Un espace de Riesz E muni d'une norme de Riesz $||.||$ est appelé espace normé de Riesz. La définition de la norme de Riesz permet avoir une propriété tres importante.

Proposition 3.1.1. $||x|| = |||x|||, \forall x \in E$.

Démonstration. Soit $x \in E$ et $y = |x|$ on a $|x| \leq |(|x|)|$, ainsi $||x|| \leq |||x|||$. On prend maintenant $|x|$ et $y = x$, on a aussi $|(|x|)| \leq |x|$ et donc $|||x||| \leq ||x||$.

□

Exemple 3.1.1. *Soit l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ de 2×2 des matrices réelles muni de la relation d'ordre $\leq$ définit par $A \leq B$ si et seulement si $A - B \in M_2(\mathbb{R}_+)$. la norme définit par :*

$$||(a_{ij})|| = \max_j\{\sum_i |a_{ij}|; i, j = 1, 2\}$$

sur cet espace est une norme de Riesz

En effet soient (a_{ij}) et (b_{ij}) deux éléments de $M_2(\mathbb{R})$ tel que $|(a_{ij})| \leq |(b_{ij})|$

on a : $\quad |(a_{ij})| \leq |(b_{ij})| \Longrightarrow (|a_{ij}|) \leq (|b_{ij}|)$ *car* $|(a_{ij})| = (|a_{ij}|)$ *et* $|(b_{ij})| = (|b_{ij}|)$

$$\Longrightarrow \max_j\{\sum_i |a_{ij}|; i,j = 1,2\} \leq \max_j\{\sum_i |b_{ij}|; i,j = 1,2\}$$
$$\Longrightarrow ||(a_{ij})|| \leq ||(b_{ij})||.$$

Exemple 3.1.2. *l'espace vectoriel l^∞ de tout suite borné de nombre réel muni de l'ordre $\leq$ définit par $a \leq b$ si et seulment si $b - a \in l^\infty_+$, la norme sup définit par :*

$$||a|| = \sup\{|a_i| : i \in \mathbb{N}\}$$

, pour tout $a = (a_1, a_2, ...) \in l^\infty$ est une norme de Riesz. Où l^∞_+ désigne l'ensemble de tout les suites bornées à termes réels positives .
En effet soient $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux éléments de l^∞ tel que $|a| \leq |b|$
On a : $$|a| \leq |b| \Longrightarrow (|a_i|) \leq (|b_i|)\ \forall\, i \in \mathbb{N}$$
$$\Longrightarrow \sup\{|a_i| : i \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|b_i| : i \in \mathbb{N}\}$$
$$\Longrightarrow ||a|| \leq ||b||.$$

Exemple 3.1.3. *Soit $C([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle fermé $[a, b]$ muni de l'ordre $\leq$ définit par $f \leq g$ si et seulment si $(g - f)(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, la norme définit par :*

$$||f|| = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$$

est une norme de Riesz.
En effet soient f et g deux éléments de $C([a, b])$ tels que $|f| \leq |g|$
On a : $$|f| \leq |g| \Longrightarrow |f(t)| \leq |g(t)|\ \forall\, t \in [a, b]$$
$$\Longrightarrow \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\} \leq \max\{|g(t)| : t \in [a, b]\}$$
$$\Longrightarrow ||f|| \leq ||g||.$$

3.1.1 Sémi-norme de Riesz

Définition d'une sémi-norme de Riesz

Définition 3.1.2. *Un sous-ensemble A d'un espace de Riesz E est appelé solide si $\forall x, y \in E : |x| \leq |y|$ et $y \in A$ on a $x \in A$.*

Définition 3.1.3. *Soit E un espace de Riesz. On dit qu'une sémi-norme p sur E est une sémi-norme de Riesz quand $|x| \leq |y|$ dans E implique $p(x) \leq p(y)$.*

Théorème 3.1.1. *[4] Une sémi-norme p sur E est une sémi-norme de Riesz si et seulement si la boule unité de E est un ensemble solide c'est à dire, l'ensemble*

$$U_p := \{x \in E : p(x) \leq 1\}$$

est un ensemble solide.

Démonstration. Il est évident que si p est une sémi-norme de Riesz, alors U_p est un ensemble solide. D'autre part, si U_p est un ensemble solide et $|x| \leq |y|$ vrai dans E, alors nous avons :

$$|\frac{1}{p(y)+\epsilon}x| \leq |\frac{1}{p(y)+\epsilon}y| \quad \text{et} \quad \frac{1}{p(y)+\epsilon}y \in U_p,$$

et comme $\frac{1}{p(y)+\varepsilon}x \in U_p$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, $p(x) \leq p(y) + \varepsilon$ est valable pour tout $\varepsilon \geq 0$. Par consequent $p(x) \leq p(y)$ ce qui prouve que p est une semi-norme de Riesz. □

Exemple 3.1.4. *Dans l'espace des fonctions continues $C\,[0,1]$ la sémi-norme définit par :*

$$||f|| = \int_0^1 |f(t)|dt$$

est une semi-norme de Riesz.

Définition 3.1.4. *Soit E un espace vectoriel partiellement ordonné. Un sous-ensemble A de E est solvex si pour tout $x \in E, x_1, ..., x_n \in A$, et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in]0,1]$ avec $\sum_k \lambda_k = 1$ tel que $x \in \{\sum_k \varepsilon_k \lambda_k x_k : \varepsilon_k = \pm 1\}$ on a $x \in A$*

Lemme 3.1.1. *[1] Soit E un espace vectoriel partiellement ordonné. Tout ensemble solvex de E est solid et convexe. Si E est un espace de Riesz , alors un ensemble est solvex si et seulment si il est solide et convexe*

3.1.2 Pre-semi-norme de Riesz

Nous allons définir la pre-seminorme à partir des ensembles solvex.

Définition 3.1.5. *Soit E un espace vectoriel partiellement ordonné . Une semi-norme de E est dit pre-Riesz si la boule unité est solvex.*

Théorème 3.1.2. *[1] (i) un sous-espace de Riesz est solvex si et seulement s'il est solide et convexe.*
(ii) une semi-norme de l'espace de Riesz est pre-Riesz si et seulement si elle est une semi-norme de Riesz. Nous avons la reformulation suivante.

Proposition 3.1.2. *[1] Soient E un espace vectoriel partiellement ordonné et p une semi-norme sur E. Alors p est pre-semi-norme si et seulement si*
$p(x) = inf\{p(x_1) \vee p(x_2) \vee ..... \vee p(x_n) \ : \ x_1, ..., x_n \in E \quad tel \quad que \quad on \quad a\lambda_1, ..., \lambda_n \in]0, 1]\, avec \sum_k \lambda_k = 1 et x \in \{\sum_k \varepsilon_k \lambda_k x_k : \varepsilon_k = \pm 1\}\}$ *pour tout* $x \in E$.

3.2 Treillis de Banach

Définition 3.2.1 (Treillis de Banach). .
Un treillis de Banach est un espace normé de Riesz complet.

3.2.1 Exemples de treillis de Banach

Exemple 3.2.1. *Soit l'espace vectoriel* $M_2(\mathbb{R})$ *de* 2×2 *des matrices réels avec la relation d'ordre* $\leq$ *définit par* $A \leq B$ *si et seulement si* $A - B \in M_2(\mathbb{R}_+)$ *et avec la norme* $||(a_{ij})|| = \max_j \{\sum_i |a_{ij}|; i, j = 1, 2\}$ *est un treillis de Banach.*

Exemple 3.2.2. *L'espace vectoriel* l^∞ *de tout suite borné de nombre réel muni de l'ordre* $\leq$ *définit par* $a \leq b$ *si et seulement si* $b - a \in l^\infty_+$ *et la norme sup* $||a|| = \sup\{|a_i| : i \in \mathbb{N}\}$, *pour tout* $a = (a_1, a_2, ...) \in l^\infty$ *est un Treillis de Banach. Où* l^∞_+ *désigne l'ensemble de tout les suites bornées à termes réels positives .*

Exemple 3.2.3. *Soit* $C([a, b])$ *l'ensemble de tout les fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle fermé* $[a, b]$ *muni de l'ordre* $\leq$ *définit par* $f \leq g$ *si et seulement si* $(g - f)(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [a, b]$ *et avec la norme* $||f|| = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$, $(C\,[a, b]\,, \leq, ||.||)$ *forme un tréillis de Banach.*

Définition 3.2.2. *Un espace de Riesz E est dit Archimedien si* $\inf_{n \in \mathbb{N}}\{n^{-1}x\} = 0$ *pour tout* $x \in E$

Proposition 3.2.1. *Cette définition est équivalente aux deux propriétés suivantes :*
1) *pour chaque nombre réel* $x \geq 0$ *la suite* $(nx)_n$ *est non bornée sur* $\mathbb{R}$.
2) $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ *dans* $\mathbb{R}$ $\forall\, x > 0$.

Théorème 3.2.1. *[2] Un espace de Riesz (et en général un espace vectoriel ordonné) E est Achimedien si* $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ *dans E pour tout* $x \in E^+$.

Exemple 3.2.4. *Tout espace classique de l'analyse fonctionnel (notamment les espaces des fonctions et les espaces* L_P *) sont Archimediens.*

Proposition 3.2.2. *Tout espace normé de Riesz est Archimedien.*

Démonstration. Soient x et y tels que $0 \leq y \leq \{n^{-1}x\}, x \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Par la propriété de la norme de Riesz, on a

$$||y|| \leq ||n^{-1}x|| = n^{-1}||x||$$

pour tout n et donc $||y|| = 0$, d'où $y = 0$. Par consequent $\inf\{n^{-1}x\} = 0$. □

Proposition 3.2.3. *Soit E un treillis de Banach. Alors,*

(a) tout operateur de treillis est continu,

(b) le cone positif E_+ *est fermé,*

(c) tout intervalle ordonné de E est fermé et borné.

(d) si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et* $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$ *dans E, alors*

$$x = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Démonstration. (a) Considerons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de E telles que $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = y$. En utilisant l'inégalité de Birkhoff et la proposition 3.2.2 précedente, on a

$$|x_n \wedge y_n - x \wedge y| \leq |x_n \wedge y_n - x \wedge y| + |x_n \wedge y - x \wedge y| \leq |y_n - y| + |x_n - x|$$

et aussi par la défintion de la norme de Riesz,

$$||x_n \wedge y_n - x \wedge y|| \leq ||y_n - y|| + ||x_n - x||$$

. (b) On a $E^+ = \{x \in X; x^- = 0\}$ et l'opérateur de treillis $X \ni x \longrightarrow x^- \in X$ est continue, E^+ est fermé.

(d) Pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(x_n - x_k) = x - x_k$$

et $x_n - x_k \in E^+ \forall n \geq k$ comme $x - x_k \in E^+ \ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Donc x est la borne supérieure de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'autre part, si $x_n \leq y \ \forall\ n$, alors $0 \leq y - x_n \longrightarrow y - x$, en utilisant (a) on a $y \geq x$ et en plus $x = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Considerons $f \in [x, y]$. Alors de $x \leq f \leq y$ il suit que $0 \leq f - x \leq y - x$ et de plus $||f - x|| \leq ||y - x||$. Donc

$$||f|| = ||f - x + x|| \leq ||x|| + ||y - x||$$

. Pour prouver que $[x, y]$ est un fermé ; On utilise la cloture du çone positif . Si $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [x, y]$ et $h_n \longrightarrow h$ dans E . Alors $y - x_n \geq 0$ et $h_n \geq x \geq 0$, de plus $y - h \geq 0$ et $h - x \geq 0$. $\square$

3.2.2 Opérateurs positifs et treillis de Banach

Définition 3.2.3 (Définition opérateur positif dans un treillis de Banach). .

Soit E, F deux treillis de Banach . Un opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$est dit positif si $T(x) \geq 0$ pour tout $x \in E^+$.

Exemples d'operateurs positifs dans un treillis de Banach

Considerons le treillis de Banach l^∞ de l'exemple précédent. On a Les opérateurs positifs suivants :
(1) L'opérateur nul $(a_1, a_2, ...) \mapsto (0, 0, ...)$.
(2) L'opérateur identité $(a_1, a_2, ...) \mapsto (a_1, a_2, ...)$.
(3) L'opérateur shift à gauche $(a_1, a_2, ...) \mapsto (0, a_1, a_2, ...)$.

Proposition 3.2.4. *[2] Si E est un treillis de Banach et T un operateur positive de E alors,*

$$||T|| = \sup\{||T(x)|| : 0 \leq x, ||x|| \leq 1\}.$$

Théorème 3.2.2. *Soit $T : E \to F$ un opérateur positif entre deux Treillis de Banach E et F. Alors on a :*
(i) T préserve l'ordre,
(ii) $|T(x)| \leq T(|x|)$,
(iii) $(T(x))^+ \leq T(x^+)$ et $(T(x))^- \leq T(x^-)$,

(vi) *Si* $T, S \in L(E, F)$ *et* $0 \leq S \leq T$, *alors* $||S|| \leq ||T||$.

Démonstration. (i) Supposons $x \leq y$ dans E. Alors $0 \leq y - x$, ainsi $0 \leq T(y - x) = T(y) - T(x)$.
(ii) nous avons $|T(x)| = T(x) \vee -T(x) = T(x) \vee T(-x)$. On a aussi $x \leq x \vee -x$ et $-x \leq x \vee -x$. Il suit de (i) que $T(x) \leq T(x \vee -x) = T(|x|)$. Similairement, $T(-x) \leq T(|x|)$. De plus $T(|x|)$ est une borne supérieure de $\{T(x), -T(x)\}$. On a en plus $|T(x)| = T(x) \vee -T(x)$ est la borne sup de $\{T(x), -T(x)\}$, donc il suit que $|T(x)| \leq T(|x|)$.
(iii) Similaire à (ii).
(vi) Dans la proposition 3.2.4 précédente, on a $||.||$ qui définit une norme de Riesz . Donc on a

$$||S|| = \sup\{||S(x)|| : 0 \leq x, ||x|| \leq 1\} \leq \sup\{||T(x)|| : 0 \leq x, ||x|| \leq 1\} = ||T||.$$

□

Théorème 3.2.3. *Chaque opérateur positif défini d'un treillis de Banach vers un espace normé de Riesz est continu.*

Démonstration. Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur positif défini d'un treillis de Banach E vers un espace normé de Riesz F. Supposons, à titre de contradiction, que T n'est pas continu. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ de E satisfaisant

$$||x_n|| = 1 \quad \text{et} \quad ||T(x_n)|| \geq n^3,$$

pour chaque n. Au vu du fait que $|T(x_n)| \leq T(|x_n|)$ nous pouvons aussi supposer que $x_n \geq 0$ pour chaque n. A partir de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{||x_n||}{n^2} \geq 0$ et la complétude de la norme de E, il s'ensuit que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n^2}$ est normalement convergente dans E. Aussi clairement, $0 \leq \frac{x_n}{n^2} \leq x$ est valable pour tout n, et ainsi $n \leq ||T(\frac{x_n}{n^2})|| \leq ||T(x)|| \leq \infty$ vrai également pour chaque n, ce qui est impossible. Ainsi, T est continu. □

Corollaire 3.2.1 (Goffman). *Toutes les normes de Riesz qui font de l'espace de Riesz un treillis de Banach sont équivalentes.*

Démonstration. Soit E un espace de Riesz et $||.||_1, ||.||_2$ deux normes de Riesz de sorte que $(E, ||.||_1), (E, ||.||_2)$ soient deux treillis de Banach alors d'après le Théorème 3.2.5 précédent l'opérateur d'identité $T : (E, ||.||_1) \longrightarrow (E, ||.||_2)$ est un homéomorphisme, ce qui garantit que les normes $||.||_1, ||.||_2$ sont équivalentes. □

♣ Implication Pédagogiques ♣

Ce mémoire est rédigé dans le but d'obtenir le diplôme de professeur de l'enseignement secondaire. Ainsi avant de conclure ce travail, il est important pour nous de mentionner son importance sur les enseignements au secondaire.

Ce memoire nous offre l'occasion de faire nos premiers pas dans le monde de la recherche, premiers pas d'autonomie en termes d'investigations scientifiques et de déploiement de nos aptitudes à comprendre, à construire un raisonnement logique sans oublier la maîtrise indispensable des outils des nouvelles technologies de l'information et de la communication. Ces outils étant incontournables pour tout enseignant en ce moment où les apprenants sont aspirés par les tablettes, téléphones androides, ordinateurs portables....

En outre nous pouvons dire que ce travail nous a :

- Permis de forger "l'honnêteté scientifique" : Le fait de reconnaitre que telle chose n'est pas notre découverte ou invention et de mentionner donc son auteur;

- Permis de mieux nous imprégner des nouvelles technologies de l'information et de la communication : les outils technologiques tels que le micro-ordinateur, vidéo-projecteur, l'utilisation des logiciels (word, Latex) et internet ont été d'un grand appui au cours de la rédaction de ce memoire. Ces moyens d'information et de communication (en particulier internet) pourront être utiles d'une part à l'enseignant dans la mesure où il devra s'arrimer à cela pour compléter l'insuffisance d'information contenues dans les manuels scolaires. Ils peuvent également l'assister dans la préparation, la saisie et la présentation d'une leçon ou d'une épreuve.

♣ conclusion ♣

Dans ce mémoire, il était question pour nous d'étudier les normes de Riesz et les Treillis de Banach. A partir d'un espace vectoriel ordonné, nous avons construit un espace de Riesz et ses propriétés. Dans ces espaces de Riesz, nous avons construit une norme dite de Riesz, une semi-norme de Riesz, ce qui permet de construire un espace vectoriel normé dit treillis Banach. Entre deux treillis de Banach, on a définit les opérateurs positifs et ses propriétés, chaque opérateur positif défini d'un treillis de Banach vers un espace normé de Riesz est continu et toutes les normes de Riesz qui font de l'espace de Riesz un treillis de Banach sont équivalentes. A la fin, nous avons donné l'importance de ce mémoire dans notre formation d'enseignant. Car ce memoire nous a permis, de forger "l'honnêteté scientifique", de mieux nous imprégner des nouvelles tectnologies de l'information et la communication.

Cependant, nous n'avons pas montre les applications de cette théorie dans la vie active. Dans un avenir proche, nous comptons améliorer ce travail en prenant en compte les applications dans la résolution des équations.

♣ Bibliographie ♣

[1] ONNO VAN GAANS (2003). Seminorms on ordered vector spaces that extend to riesz seminorms on larger riesz spaces. *Department of Applied Mathematical Analysis, Faculty ITS, Delft University of Technology*.

[2] KELVIN MUZUNDU (2012). positive operators on banach lattices. *Postgraduate Seminar*.

[3] CHARALAMBOS D. ALIPRANTIS and OWEN BURKISHAW (2006). Positive operators. *Springer-Verlag*.

[4] CHARLES J. K.BATTY and DEREK W.ROBINSON (1983). positive one-parameter semigroup on ordered banach space. *D. Reidel publishing Company*.