couverture.pdf

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE I
****
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE YAOUNDE
****
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

N
E S

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE I
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE OF YAOUNDE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

EQUATIONS D'EINSTEIN-VLASOV EN SYMETRIE CYLINDRIQUE

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de l'obtention du diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire Deuxième grade en Mathématiques.

Par :

TCHIO CHIME Serge Guérin

***Matricule :* 12V0788**

Maitre ès Sciences

Sous la direction de :

TEGANKONG David

Chargé de Cours

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé 1

Année académique : 2015-2016

♣ Dédicace ♣

Je dédie ce mémoire :

♣ au couple Nina Flore et TAKAM SOH Arthur.

♣ Déclaration sur l'honneur ♣

Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

TCHIO CHIME Serge Guérin

♣ Remerciements ♣

La réalisation de ce mémoire a été une opportunité merveilleuse de rencontrer et d'échanger avec de nombreuses personnes. Je ne saurais pas les citer toutes sans dépasser le nombre de pages raisonnablement admis pour ce genre de travail. Je reconnais que chacune a, à des degrés divers, mais avec une égale bienveillance, apporter une contribution positive à sa finalisation. Mes dettes de reconnaissance sont, à ce point de vue, énormes à leur égard. Je pense particulièrement :

- ♠ au Dr TEGANKONG David pour sa disponibilité tout au long de la rédaction de ce travail, pour la finesse de ses attitudes sur le plan aussi bien humain que scientifique.
- ♠ À mes encadreurs M. ETO Inspecteur Pédagogique Nationale de Mathématiques et M. MBA DEFOSSO Gerry PLEG en service au lycée de Nkol-Eton de Yaoundé, pour leur disponibilité et leurs divers conseils, les valeurs de liberté, d'autonomie et de fidélité qu'ils m'ont fait partager.
- ♠ À l'ensemble du corps enseignant de mathématiques de l'ENS et de l'université de Yaoundé 1 plus particulièrement au Pr TCHAPNDA Blaise, Pr NOUTCHEGUEME Norbert, Pr NNANG Hubert, Dr CIAKE Fidèle, Dr TEMGOUA, Dr MBA Alphonse, pour leur accompagnement tout au long de notre formation.
- ♠ À la grande famille TAMBO où je me suis continuellement senti à l'aise, je leur en sais infiniment gré pour leurs précieux conseils pratiques et le soutien total et sans faille dans les moments délicats.
- ♠ À toute ma famille pour leur soutien moral et amour inconditionnel.
- ♠ À tout le personnel du Collège Saint Augustin, pour leur soutien à la fois moral et matériel.
- ♠ À tous mes amis et camarades de promotion en particulier ; Tsoyi, Loé, Banebé, Fomekong, Tankam, Soh, Kouamou, Nguefo, Tchounké, Feudjio, Motcheka, Mbok.
- ♠ À tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail, qu'ils trouvent en ce travail, l'expression de ma profonde considération.

♣ Table des matières ♣

♣ *Résumé* ♣

Les équations d'Einstein-Vlasov dans le contexte de la relativité générale, modélisent l'évolution en temps d'une particule (étoiles, galaxies) se déplaçant librement dans l'espace. Dans ce mémoire, nous écrivons les équations d'Einstein avec constante cosmologique et l'équation de Vlasov dans un système de coordonnées cylindriques (t, r, z, θ)*. On obtient ainsi un système complet d'E.D.P formé d'équations du premier ordre (Vlasov) et d'équations du second ordre (Einstein). Par la suite, nous distinguons les équations de contraintes des équations d'évolution. Enfin nous donnons des résultats d'existence et d'unicité locale et globale dans le temps pour la solution de ce système.*

Mots clés : *Relativité générale, Équations d'Einstein, Équation de Vlasov, Variété Lorentzienne, Coordonnées Cylindriques.*

♣ Abstract ♣

In the context of general relativity, the Einstein-Vlasov equations model the time evolution of a self gravitating collisionless particle (stars, galaxies) in the space. In this brief, we write the Einstein equations with a cosmological constant and the Vlasov equation in a cylindrical symmetry system (t, r, z, θ)*. We thus obtain a complete P.D.E system formed with equations of first order (Vlasov) and second order (Einstein). Then we distinguish the evolution equations from constraints equations. At the end we give some results of local and global existence and unicity in time to the solution of this system.*

Key words : *General Relativity, Einstein equations, Vlasov equation, Lorentzian manifold, Cylindrical symmetry.*

♣ Introduction ♣

La dynamique des matières gravitationnelles est un sujet d'une grande importance en théorie de la relativité générale, y sont étudiées différentes formes de matière à l'instar des étoiles, des particules (les électrons en plasma par exemple), des galaxies, des météorites et bien d'autres. Cette étude est faite sous l'hypothèse qu'il n'ya pas d'interactions entre les différentes particules intervenantes lors de l'étude ou du moins elles sont suffisamment rares pour être négligées. Cf Fjallborg Mikael (2006 : 4). Les équations d'Einstein sont l'expression mathématique de la relativité générale et plus généralement de toute la physique de la gravitation. La forme générale de ces équations signifie : **(Une mesure de la courbure moyenne de l'espace temps) = (Une mesure de la densité d'énergie)**. Résoudre les équations d'Einstein, c'est déterminer à la fois la source du champ de gravitation et le champ de gravitation. Ces équations expriment et concentrent les idées principales d'Einstein gouvernant la relativité générale. La conviction d'Einstein est la suivante : il doit exister une loi qui lie le contenu matériel et l'énergie de la matière avec le champ gravitationnel qui détermine l'élément de longueur et toute la géométrie de l'espace temps. Étant donné le tenseur d'Einstein, la formulation complète et exacte de l'équation d'Einstein en découle directement : Cf Choquet Y-Bruhat (2009 : 39)

$$R_{\alpha\beta} - (\frac{1}{2}R + \Lambda)g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}$$

Il s'agit d'un système de 10 équations aux dérivées partielles non linéaires pour 20 inconnues, ce qui rend sa résolution très complexe. Dans l'optique d'une possible résolution de ce problème, on écrit la métrique dans un système de coordonnées locales imposant une certaine symétrie, par exemple : la symétrie de surface, la symétrie cylindrique, la symétrie sphérique, la symétrie axiale ... Selon le choix du tenseur impulsion énergie (second membre de l'équation ci-dessus), les équations d'Einstein peuvent être couplées aux équations de maxwell, à l'équation de Vlasov, aux équations de Yang-Mills, avec un champ scalaire pour ne citer que ceux là. Lorsque le second membre de cette équation est nul, on parle d'équations d'Einstein dans le vide. Cf Choquet Y-Bruhat (2009 : 34). Les équations d'Einstein-Vlasov modélisent l'évolution en temps d'une particule se déplaçant sans interactions dans l'espace. Dans notre travail, la métrique est choisie en symétrie cylindrique et le tenseur impulsion énergie est engendré par une fonction positive f, solution de l'équation de Vlasov (parfois appelée équation de Liouville). L'hypothèse selon laquelle les particules étudiées se déplacent librement est caractérisée ici par l'équation $L_X f = 0$, où L_X désigne la dérivée de Lie. Ceci permet d'écrire dans un système de coordonnées locales, le système d'Einstein-Vlasov avec constante cosmologique : Cf (Rendall A. D. 1997 : 37, Fjallborg Mikael 2006 : 14, Noundjeu P. et Tegankong D. 2016 : 2)

$$\begin{aligned} \partial_t f + \frac{p^i}{p^0}\partial_{x_i} f - \frac{1}{p^0}\Gamma^i_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta \partial_{p^i} &= 0 \\ R_{\alpha\beta} - (\frac{1}{2}R + \Lambda)g_{\alpha\beta} &= \frac{8\pi G}{c^2}T_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Dans ce système, les inconnues sont, une variété Lorentzienne M de dimension 4, munie d'un tenseur métrique g et une fonction de distribution de particules f. En symétrie cylindrique, cette métrique est de la forme : Cf Gourgoulhon (2012-1013)

$$ds^2 = -\alpha e^{2(\eta-\gamma)}dt^2 + e^{2(\eta-\gamma)}dr^2 + e^{2\gamma}(dz + Ad\theta)^2 + r^2 e^{-2\gamma}d\theta^2 \qquad (1)$$

Où ; α, γ, A et η sont toutes des fonctions inconnues des variables t et r. Avec $t, z \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in (0, 2\pi)$.

Il est donc question dans le présent mémoire d'établir ces équations dans un système de coordonnées locales (x^α, p^α).

Pour cela, nous allons dans un premier chapitre, définir toutes les notions qui interviennent dans les chapitres suivants.

Dans un second chapitre, nous effectuons des calculs qui aboutissent à l'obtention du tenseur d'Einstein, nécessaire pour l'établissement du système d'Einstein-Vlasov.

Le troisième et dernier chapitre se consacre, à établir le système d'Einstein-Vlasov, puis à donner des théorèmes d'existence et d'unicité locale et globale dans le temps de la solution de ce système.

★ ★ Chapitre Un ★ ★

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1.1 Quelques notions de géométrie différentielle

Dans cette section, nous avons adopté les définitions et notations telles qu'elles ont été faites dans le livre de géométrie de Talpart. Cf (Talpart Y. : 1993)

Définition 1.1.1. (Espace topologique)

Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{O}$ une famille de parties de E vérifiant :

i) $\emptyset, E \in \mathcal{O}$

ii) $\forall A, B \in \mathcal{O}, A \cap B \in \mathcal{O}$

iii) $\forall\, (O_i)_{i\in I} \subset \mathcal{O}, \bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$

Le couple $(E, \mathcal{O})$ est appelé espace topologique et $\mathcal{O}$ est appelé ensemble des ouverts de E.

Définition 1.1.2. (Espace topologique séparé)

Un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est dit Hausdorff-séparé ou tout simplement séparé s'il n'y a pas d'ambiguité, si $\forall x, y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe $U \in \mathcal{O}$ contenant x et $V \in \mathcal{O}$ contenant y avec $U \cap V = \emptyset$.

Dans la suite lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité, on notera tout simplement E pour désigner un espace topologique.

Définition 1.1.3. (Application de classe C^∞)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. On pose :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \text{ et } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Soit $f\,:\,\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ une application. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ si $\forall\,\alpha\in\mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|\leq k,\ D^\alpha f$ existe et est continue. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^k,\ \forall\,k\in\mathbb{N}$.

Définition 1.1.4. (Cartes locales et C^k-compatibilité)

Soit E un espace topologique. On appelle carte locale de dimension n sur E, la donnée d'un couple (U,φ) tel que :

i) U est un ouvert de E

ii) l'application $\varphi:U\longrightarrow\varphi(U)\subseteq\mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

n est appelé dimension de la carte. Deux cartes (U,φ) et (V,ψ) sur un espace topologique M sont dites C^k-compatibles lorsque $U\cap V=\emptyset$ ou $U\cap V\neq\emptyset$ et l'application de transition
$\psi o\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\longrightarrow\psi(U\cap V)$ est un C^k-difféomorphisme.

Définition 1.1.5. (Atlas)

Soit E un espace topologique séparé. Un atlas de dimension n $(n\in\mathbb{N}^*)$, de classe $C^k(k\in\mathbb{N})$ sur E est la donnée d'une famille $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ telle que :
$\forall i\in I$, (U_i,φ_i) sont des cartes C^k-compatibles de dimension n recouvrant E.

Définition 1.1.6. (Variété topologique - sous-variété)

Une variété topologique de dimension $n\in\mathbb{N}^*$ est un espace topologique séparé dont chaque point possède un voisinage ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.
Un sous-ensemble M de $\mathbb{R}^n$ est applelé sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $d(d<n)$, de classe C^k si $\forall x\in M$, il existe U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x et $\varphi:U\longrightarrow\varphi(U)\subseteq\mathbb{R}^n$ de classe C^k tels que $\varphi(U\cap M)=\varphi(U)\cap\mathbb{R}^d$.

Définition 1.1.7. (Variété différentielle)

Une variété différentielle de classe C^k et de dimension n est un espace topologique séparé muni d'un atlas maximal (au sens de l'inclusion) de classe C^k et dans lequel toutes les cartes sont de dimension n.

Définition 1.1.8. (Courbe différentielle en un point)

Soit M une variété différentiable, I une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}$ contenant 0. x un point de M. Une courbe différentielle de M en x est une application différentiable $\begin{array}{c}c:I\longrightarrow M\\ t\longmapsto c(t)\end{array}$ telle que $c(0)=x$.

$\Gamma=c(I)\subset M$ est appellé arc parametré de M et le couple (I,c), une paramétrisation de l'arc Γ.

Définition 1.1.9. (courbes tangentes en un point)

Deux courbes c_1 et c_2 sont dites tangentes en un point x si pour toute carte locale (U,φ) d'une variété différentielle M,

on a :

$$\begin{cases} c_1(0) = c_2(0) = x \\ \frac{d(\varphi \circ c_1)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi \circ c_2)}{dt}(0) \end{cases}$$

Par suite, on définit la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des arcs parametrés de M par $c_1 \ \mathcal{R} \ c_2$ si et seulement si c_1 et c_2 sont tangents en x.

$\mathcal{R}$ ainsi définie est une relation d'équivalence et une classe d'équivalence suivant la relation $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\begin{aligned} [c]_x : \quad C^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g \qquad &\longmapsto [c]_x(g) = \frac{d}{dt}(g \circ \varphi)(\varphi(x)) \end{aligned}$$

Où, $C^\infty(M) = \{\gamma : \mathcal{R} \longrightarrow M \ differentiable \ telle \ que \ \gamma(0) = x\}$

Définition 1.1.10. (Vecteur tangent - Espace tangent)

Soit M une variété différentielle et $x \in M$. Un vecteur tangent à M en x est une classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$ définie ci-dessus.

L'espace tangent à M en x est l'ensemble des vecteurs tangents à M en x. Noté T_xM, c'est un espace vectoriel de dimension égale à celle de M.

Théorème et définition 1.1.1. (Fibré tangent)

Soit M une variété différentielle.

$TM = \biguplus_{x \in M} T_xM$ est une variété différentielle de dimension égale à deux fois la dimension de M. Elle est appelée Fibré tangent à M.

Définition 1.1.11. (Champ de vecteurs)

Soit M une variété différentielle. Un champ de vecteurs est une application

$$\begin{aligned} X : \quad M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto X(x) = X_x \qquad X_x \in T_xM. \end{aligned}$$

Un champ de vecteur est dit différentiable si l'application qui le définit est une application C^∞. On note par $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs différentiables définis sur M.

convention de sommation d'Einstein :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $B = \{e_1, e_2, ...e_n\}$ une base de E.

Soit $x \in E$, alors, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$; $x_i \in \mathbb{K}$

Un indice tel que i sur lequel on effectue la somme est appelé indice muet. La convention d'Einstein consiste à supprimer le signe $\sum$ et d'indiquer l'indice muet en haut et en bas.

ainsi $x = x^i e_i \qquad i = 1, 2, \ldots n$

Dans toute la suite, on adoptera la convention de sommation d'Einstein ci-dessus.

Définition 1.1.12. (Dérivation)

Soit M une variété différentielle.

Un champ de vecteurs X sur M définit une dérivation sur $C^\infty(M)$ par :

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ g &\longmapsto Xg \end{aligned} \qquad \text{Où } Xg = X^i \frac{dx^i}{dt},$$

vérifiant :

i) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall g, h \in C^\infty(M), X(ag + bh) = aXg + bXh.$

ii) $\forall g, h \in C^\infty(M), X(gh) = gXh + hXg.$

Définition 1.1.13. (Produit de 2 champs de vecteurs)

Le produit de 2 champs de vecteurs X et Y sur M est défini par :

$XY(g) = X(Yg), \qquad \forall g \in C^\infty(M).$

Proposition 1.1.1. Le produit de 2 champs de vecteurs ne définit pas une dérivation.

Preuve. Soient X et Y deux champs de vecteurs.

$\forall g, h \in C^\infty(M),$

$$\begin{aligned} XY(gh) &= X(Y(gh)) \\ &= X(gYh + hYg) \\ &= gX(Yh) + XgYh + hX(Yg) + XhYg \end{aligned}$$

Mais,

$g(XY)h + h(XY)g = gX(Yh) + hX(Yg).$

il vient que, $XY(gh) \neq g(XY)h + h(XY)g.$

Définition 1.1.14. (Crochet)

Soit M une variété différentiable.

On appelle crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y, le champ de vecteurs noté $[\cdot,\cdot]$ et défini par :

$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] = XY - YX \end{aligned}$$

L'opérateur crochet définit une dérivation sur $C^\infty(M)$. En coordonnées locales, on a :
$[X, Y] = (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i)\, \partial_i$

Définition 1.1.15. (Dérivée de Lie)
La dérivée de Lie d'un champ de vecteurs X par rapport à un autre champ de vecteurs Y est le champ de vecteurs $L_X(Y)$ défini par $L_Y(X) = [X, Y]$.

Définition 1.1.16. (Applications n-linéaires)
Soient n un entier naturel ≥ 1, $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ est dite n-linéaire si elle est linéaire par rapport à chacun des n facteurs.
Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Remarque 1.1.1. Lorsque $E_1 = E_2 = ... = E_n = E$ et $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme n-linéaire sur E

Définition 1.1.17. (Tenseur élémentaire)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $x \in E$ et $y \in F$. On appelle tenseur élémentaire l'application

$$\begin{aligned} x \otimes y :\quad E^* \times F^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha(x) \cdot \beta(y) \end{aligned}$$

où "$\cdot$" désigne le produit dans $\mathcal{K}$ et E^* (respectivement F^*) le dual algébrique de l'espace E (respectivement de F).

Définition 1.1.18. (Produit tensoriel)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $x \in E$ et $y \in F$.
On appelle produit tensoriel de E par F l'ensemble $E \otimes F$ défini par :
$E \otimes F =< \{x \otimes y, x \in E, y \in F\} >$.

Dans tout ce qui va suivre, M désigne une variété différentiable de dimension n.

Définition 1.1.19. (Tenseur covariant)
Un tenseur de type $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ ou p-fois covariant au point $x \in M$ est une forme p-linéaire définie sur $(T_xM)^p$.
On désigne par $\otimes^p T_x^* M \equiv T_{xp}^0$, l'espace des formes p-linéaires sur T_xM.

Exemple 1.1.1. Un tenseur 2-fois covariant ou de type $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ au point x est une forme bilinéaire symétrique définie sur $T_xM \times T_xM$.

Définition 1.1.20. (Tenseur contravariant)

Un tenseur de type $\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}$ ou q-fois contravariant au point x est une forme q-linéaire définie sur $(T_x^*M)^q$

On désigne par $\otimes^q T_xM \equiv T_{x0}^q$ l'espace de toutes les formes q-linéaires sur T_x^*M.

Définition 1.1.21. (Tenseur mixte)

Un tenseur mixte de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ ou tenseur p-fois covariant et q-fois contravariant au point $x \in M$ est une forme $(p+q)$-linéaire définie sur $(T_xM)^p \times (T_x^*M)^q$.

On désigne par T_{xp}^q l'ensemble des tenseurs de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ au point $x \in M$.

Définition 1.1.22. (Fibré tensoriel)

On appelle fibré tensoriel, la variété différentielle T_p^qM définie par :

$T_p^qM = \bigcup\limits_{x \in M} (\{x\} \times T_{xp}^q)$

Définition 1.1.23. (Champ de tenseurs)

Un champ de tenseur de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ sur M est une application différentiable

$$\begin{aligned} T: \quad M &\longrightarrow T_p^qM \\ x &\longmapsto T(x) = (x, t_x), \qquad t_x \in T_{xp}^q. \end{aligned}$$

1.2 Rappels de géométrie riemannienne

Dans toute la suite, V_4 désigne une variété différentiable de dimension 4, le corps de base est $\mathbb{R}$. On adopte la convention de sommation d'Einstein où les indices grecs α, β, γ, ... vont de 0 à 3 et les indices latins i, j, k, ... vont de 1 à 3.

Définition 1.2.1. (Variété lorentzienne)

Une variété hyperbolique ou lorentzienne est la donnée du couple (M, g) où, M est une variété différentielle de dimension 4 et g est un champ de tenseur 2-covariant de classe C^{p-1} sur M, $p \geq 1$ appelé tenseur métrique et qui vérifie :

- g est symétrique ;
- $\forall x \in M$, g induit sur T_xM une forme bilinéaire non dégénérée
  $g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$;
- g est de signature $(+,-,-,-)$ ou $(-,+,+,+)$: on dit que g est de signature hyperbolique.

Remarque 1.2.1.

i) Dans la définition précédente, le dernier point signifie que la forme quadratique associée à g admet une décomposition en un carré positif et 3 carrés négatifs (ou en un carré négatif et 3 carrés positifs).

ii) Dans un repère naturel (e_α) de V_4, g s'écrit en coordonnées locales par
$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta \qquad g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha, e_\beta)$. g est alors vue comme une matrice carrée symétrique d'ordre 4 dont les composantes sont les $g_{\alpha\beta}$. On note alors $g = (g_{\alpha\beta})$. La matrice g est inversible et son inverse est notée $(g^{\alpha\beta})$. On a : $g^{\alpha\lambda}\, g_{\lambda\beta} = \delta^\alpha_\beta$ (symbole de Kronecker).

Définition 1.2.2. (Repère orthonormé)

Le repère (e_α) est dit orthonormé (dans (V_4, g)) si g s'écrit :

$$g = ds^2 = (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2 \text{ en signature } (+,-,-,-)$$

ou $$ds^2 = g = -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2 \text{ en signature } (-,+,+,+)$$

Un événement $x \in V_4$ est représenté par $x = (x^0, x^i)$ avec $x^0 = t$ appelée coordonnée temporelle et x^i coordonnées d'espace. Ainsi, pour tout système de coordonnées locales (x^α) dans V_4, x^0 représente le temps t et x^i l'espace. Cette représentation est dûe à Minkwoski dans les années 1908. Cf (Talpart Y. 1993 : 267, Gourgoulhon 2012 - 2013)

Définition 1.2.3. (Espace-temps)

Un espace-temps est la donnée d'un couple (M, g) avec (M, g) variété lorentzienne.

Exemple 1.2.1.

$\star$ $(\mathbb{R}^4, \eta)$ est l'espace temps de Minkwoski où la métrique η dite métrique de Minkwoski est définie par : $\eta = -(dt)^2 + \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2$ avec $g_{00} = -1$,

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases} \qquad \text{ou } \eta = (dt)^2 - \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2 \text{ (suivant la signature de } \eta)$$

⋆ $(\mathbb{R} \times S^3, g)$ est l'espace temps de Sitter. S^3 désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^4$, la métrique g s'écrit : $g = dt^2 - a^2ch^2(\frac{t}{a})[d\alpha^2 + sin^2\alpha(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)]$.
$t \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
g est de signature $(+,-,-,-)$ avec $g_{00} = 1$, $g_{11} = -a^2ch^2(\frac{t}{a})$, $g_{22} = -a^2ch^2(\frac{t}{a})sin^2\alpha$, $g_{33} = -a^2ch^2(\frac{t}{a})sin^2\alpha sin^2\theta$ et les autres coefficients sont nuls.

Un élément u de T_xV_4 est encore appelé vecteur contravariant et ses composantes dans une base (e_α) de T_xV_4 sont notées (u^α), c'est-à-dire $u = u^\alpha e_\alpha$. Un élément u^* de $T_x^*V_4$ est encore appelé vecteur covariant et ses composantes dans la base duale (θ^α) de (e_α) sont notées (u^*_α), c'est-à-dire $u^* = u^*_\alpha\theta^\alpha$. On sait que $g \equiv g_x : T_xV_4 \times T_xV_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique, donc $\forall u \in T_xV_4$, u fixé, l'application $v \longmapsto g(u,v)$ est une forme linéaire sur T_xV_4, donc $u^* = g(u,\cdot) \in T_x^*V_4$.
On a :
$u^* = u^*_\alpha\theta^\alpha$ où $u^*_\alpha = u^*(e_\alpha)$. D'où

$$\begin{aligned} u^*_\alpha &= u^*(e_\alpha) \\ &= g(u, e_\alpha) \\ &= g(u^\beta e_\beta, e_\alpha) \\ &= u^\beta g(e_\alpha, e_\beta) \\ &= g_{\alpha\beta}u^\beta \end{aligned}$$

Par analogie, avec l'inverse $g^{\alpha\beta}$ qui est une forme bilinéaire symétrique sur $T_x^*V_4$, on associe à tout vecteur covariant $u^* \in T_x^*V_4$ un vecteur contravariant par $u^\beta = g^{\alpha\beta}u^*_\alpha$. Ainsi g permet d'associer canoniquement à tout vecteur contravariant u un vecteur covariant u^* et réciproquement. Par la suite, u sera identifié à u^* et on parlera de u tout simplement et de ses composantes covariantes u_α et contravariantes u^β liées par les relations :
$u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta \quad$ et $\quad u^\alpha = g^{\alpha\beta}u_\beta$.
La généralisation de ce résultat aux tenseurs d'ordre p quelconques est immédiate car un tenseur est une combinaison de tenseur élémentaire de la forme $x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_p$. Ainsi, on a :
$T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}g_{\beta\mu}T^{\gamma\mu} \qquad T^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\mu}T_{\gamma\mu}$
$T^\alpha_\beta = g^{\alpha\mu}T_{\mu\beta} \qquad T^\alpha_\beta = g_{\beta\mu}T^{\mu\alpha}$

Définition 1.2.4. (Connexion linéaire - Symboles de Christoffel)
Une connexion linéaire sur V_4 est la donnée d'une application

$$\begin{aligned} \bigtriangledown : \quad TV_4 &\longrightarrow T^*V_4 \otimes TV_4 \\ v &\longmapsto \bigtriangledown v \end{aligned}$$

définie sur les champs de tenseurs différentiables sur V_4 et qui est telle que

$$\begin{aligned} \bigtriangledown(u+v) &= \bigtriangledown u + \bigtriangledown v \\ \bigtriangledown fu &= df \otimes v + f \bigtriangledown v \end{aligned} \tag{1.1}$$

pour toute fonction différentiable f.
$\bigtriangledown v$ est appelée différentielle absolue ou covariante de v. Si $v = v^\alpha e_\alpha$ dans la base naturel (e_α) de $T_x V_4$ alors les composantes locales du tenseur mixte $\bigtriangledown v$ notées $\bigtriangledown_\alpha v^\beta$ sont données par

$$\bigtriangledown_\alpha v^\beta = \partial_\alpha v^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\lambda} v^\lambda \tag{1.2}$$

(1.2) montre que la connaissance des 64 coefficients $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ détermine entièrement $\bigtriangledown$ dans une carte locale de V_4.
Les coefficients $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ de la relation (1.2) sont appelés coefficients de Christoffel associés à la connexion $\bigtriangledown$

Remarque 1.2.2. Les composantes covariantes locales du tenseur $\bigtriangledown v$ notées $\bigtriangledown_\alpha v_\beta$ sont données par

$$\bigtriangledown_\alpha v_\beta = \partial_\alpha v_\beta + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} v_\lambda$$

Définition 1.2.5. (Identités de Ricci)
Soit $x \in V_4$. On considère $T_x V_4$ muni de sa base naturelle (e_α).
La relation $\partial_\mu g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}$ est appelée identités de Ricci.

Proposition 1.2.1. Les coefficients de Christoffel en coordonnées locales s'obtiennent du tenseur métrique par :

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) \tag{1.3}$$

Preuve. D'après les identités de Ricci, on a :

$$\partial_\alpha g_{\mu\beta} = g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha} + g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}$$

$$\partial_\beta g_{\alpha\mu} = g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$$

$$\partial_\mu g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}$$

D'où,

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu}\partial_\alpha g_{\mu\beta} &= \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} + g^{\lambda\mu} g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha} \\ &= \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \delta^\mu_\beta \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu}\partial_\beta g_{\alpha\mu} &= g^{\lambda\mu} g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \\ &= \delta^{\mu}_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu}\partial_\mu g_{\alpha\beta} &= g^{\lambda\mu} g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} + g^{\lambda\mu} g_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} \\ &= \delta^{\mu}_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} + \delta^{\mu}_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) &= \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} + \delta^{\mu}_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \delta^{\mu}_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \\ &= 2\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Ce qui donne alors le résultat (1.3)

Remarque 1.2.3. Puisque le tenseur métrique g est symétrique, alors les symboles de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ ci-dessus sont symétriques par rapport aux indices inférieurs (ici, α et β), c'est-à-dire $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}$.

On va à présent généraliser la notion de dérivée covariante d'un champ de vecteurs pour le cas d'un champ de tenseurs. Si (e_α) est la base naturelle de $T^p_q V_4$ et (θ^α) sa base duale alors pour tout tenseur T, on a

$$T = T^{\alpha_1\cdots\alpha_p}{}_{\beta_1\cdots\beta_q} e_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes e_{\alpha_p}\otimes\theta^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\theta^{\beta_q}$$

La dérivée covariante de T est donnée par : Cf (Talpart Y. 1993 : 288)

$$\nabla_\rho T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q} = \partial_\rho T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q} + \sum_{r=1}^{p}\Gamma^{\alpha_r}{}_{\sigma\rho} T^{\alpha_1\ldots\overset{\overset{\mathrm{r}}{\downarrow}}{\sigma}\ldots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\underset{\underset{\mathrm{r}}{\uparrow}}{\sigma}\ldots\beta_q} - \sum_{r=1}^{q}\Gamma^{q}{}_{\beta_r\rho} T^{\alpha_1\ldots\overset{\overset{\mathrm{r}}{\downarrow}}{\sigma}\ldots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\underset{\underset{\mathrm{r}}{\uparrow}}{\sigma}\ldots\beta_q}$$

Exemple 1.2.2.

- Pour un tenseur de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\nabla_\alpha T^{\lambda}_{\mu} = \partial_\alpha T^{\lambda}_{\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}T^{\gamma}_{\mu} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\mu}T^{\lambda}_{\gamma}$$

- Pour un tenseur de type $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$\nabla_\nu T^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} = \partial_\nu T^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}T^{\sigma\beta}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}T^{\alpha\sigma}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}T^{\alpha\beta}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}T^{\alpha\beta}_{\lambda\sigma}$$

Définition 1.2.6. (Tenseur de courbure)

Le tenseur de courbure ou tenseur de Riemann $R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}$ associé à la connexion linéaire $\triangledown$ est un tenseur mixte de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur V_4 défini en coordonnées locales par :

$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} \tag{1.4}$$

Proposition 1.2.2. Le tenseur de courbure $R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}$ est antisymétrique par rapport aux indices α et β, c'est-à-dire $R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = -R^{\lambda}{}_{\mu\beta\alpha}$

Preuve. D'après (1.4), on a :

$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}$$

Mais,

$$R^{\lambda}{}_{\mu\beta\alpha} = \partial_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu}$$

En utilisant la remarque $(1.2.3)$, on a

$$\begin{aligned} R^{\lambda}{}_{\mu\beta\alpha} &= -(\partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}) \\ &= -R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} \end{aligned}$$

Définition 1.2.7. (Torsion de courbure)

On appelle torsion de la courbure linéaire $\triangledown$, le tenseur S de composantes locales :

$$S^{\lambda}_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}.$$

Théorème et définition 1.2.1. (Connexion de Lévi-Civita)

Il existe sur V_4 une connexion linéaire et une seule $\triangledown$ telle que :

1. $\triangledown$ est sans torsion, c'est-à-dire $S = 0$.
2. $\triangledown g = 0$.

Une telle connexion est appelée connexion riemannienne ou connexion de Levi-Civita.

Preuve. Cf (Choquet Y-Bruhat 2009 : 9, Gourgoulhon 2012-1013)

Définition 1.2.8. (Tenseur de Ricci)

Le tenseur de Ricci est le tenseur de composantes $R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}$ obtenu par contraction de l'indice supérieur et du deuxième indice inférieur du tenseur de Courbure (on parle de trace)

Son expression en fonction des coefficients de Christoffel est :

$$R_{\alpha\beta} = \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha} + \Gamma^{r}_{\beta\alpha}\Gamma^{\mu}_{\mu r} - \Gamma^{r}_{\mu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\beta r}$$

Le tenseur de Ricci est un tenseur symétrique.

Définition 1.2.9. (Courbure riemannienne)
La courbure riemannienne scalaire R de (V_4, g) est le scalaire obtenu par contraction des deux indices du tenseur de Ricci :

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

1.3 Changement de variables dans les intégrales

Définition 1.3.1. (Application mesurable)
Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables.
Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite mesurable lorsque $\forall A \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

Théorème 1.3.1. (Changement de variables)
Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^1 de U sur V. Pour toute fonction f Lebesgue mesurable positive, $f : V \longrightarrow [0, +\infty)$, la fonction $f \circ \varphi \mid D\varphi \mid$ est Lebesgue mesurable sur U et on a :

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x)) \mid D\varphi(x) \mid dx \tag{1.5}$$

$D\varphi$ ici représente la matrice jacobienne de φ au point x et $\mid D\varphi(x) \mid$ la valeur absolue du jacobien.

Preuve. Cf Dixmier J. (1987 : 31)

Nous avons le cas particulier suivant :

Proposition 1.3.1. (Cas des intégrales triples)
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^3$, $\triangle$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$ inclus dans V.
Soit f une application continue sur $\triangle$, D un ouvert de $\mathbb{R}^3$ inclus dans U et $\varphi : U \longrightarrow V$ de classe C^1 telle que $\varphi(D) = \triangle$. On suppose de plus que l'ensemble des points de $\triangle$ qui ont plusieurs antécédents dans D est négligeable.
L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & D && \longrightarrow \triangle \\ & (u, v, w) && \longmapsto \varphi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \end{aligned}$$

définit un changement de variables et $J(u,v,w) = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$, le jacobien de φ en un point quelconque de U induit une application continue de D dans $\mathbb{R}$.

Alors on a :

$$\int\int\int_{\triangle} f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{D} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \mid J(u,v,w) \mid dudvdw \tag{1.6}$$

Exemple 1.3.1. En coordonnées cylindriques, on a : $x = \rho cos\theta$, $y = \rho sin\theta$ et $z = z$.

J = $\begin{pmatrix} cos\theta & -\rho sin\theta & 0 \\ sin\theta & \rho cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad D = \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ et $\qquad \triangle = \mathbb{R}^3$

On a alors, $|J| = \rho$ et

$$\int\int\int_{\triangle} f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{D} f(\rho cos\theta, \rho sin\theta, z)\rho d\rho d\theta dz$$

⋆ ⋆ Chapitre Deux ⋆ ⋆

LE TENSEUR D'EINSTEIN EN SYMÉTRIE CYLINDRIQUE

Notation et Convention

1 Dans tout ce qui va suivre, les indices grecs α, β, γ,... varient de 0 à 3 et les indices latins,i, j, k,... de 1 à 3. Nous adopterons la convention de sommation d'Einstein suivante :

$$a_\alpha b^\alpha = \sum_\alpha a_\alpha b^\alpha$$

2 Nous adopterons les notations suivantes $\partial_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ où f est une fonction différentiable.

2.1 Introduction

Einstein établit ses équations entre les années 1905 et 1915 dans la théorie dite théorie de la **relativité générale** où il stipule que le contenu matériel et énergétique d'un milieu détermine sa géométrie. Pour de plus amples informations sur le sujet veuillez consulter Choquet Y-Bruhat (2009 : 37). Les travaux d'Einstein lui ont permis d'établir les équations suivantes :

$$R_{\alpha\beta} - (\frac{1}{2}R + \Lambda)g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \tag{2.1}$$

où $R_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur de Ricci

Λ la constante cosmologique

$g_{\alpha\beta}$ le tenseur métrique

R la coubure Riemannienne scalaire

G la constante gravitationnelle qui vaut $6.6742.10^{-11}m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

c la célérité de la lumière qui vaut environ $3.10^9 m.s^{-1}$

$T_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'impulsion énergie dont la forme (valeur) dépend du choix du modèle de la matière. Dans cette écriture, on pose $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - (\frac{1}{2}R + \Lambda)g_{\alpha\beta}$: on l'appelle **tenseur d'Einstein** avec constante cosmologique. Il convient donc d'affirmer que l'obtention de ce tenseur passe par la détermination de $R_{\alpha\beta}$ et R. Ainsi, il sera question dans ce chapitre de déterminer les symboles de Christoffel qui nous permettront par la suite de calculer le tenseur de Ricci et la courbure scalaire.

2.2 Le tenseur métrique

La métrique g en coordonnées cylindriques (t, r, z, θ) comme nous l'avons déjà mentionné plus haut est définie en (1), elle est donc de signature (-, +, +, +). C'est un outil mathématique important permettant de calculer les longueurs des géodésiques. Sous forme matricielle cette métrique s'écrit :

$$\mathrm{g} = \begin{pmatrix} -\alpha e^{2(\eta-\gamma)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(\eta-\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\gamma} & Ae^{2\gamma} \\ 0 & 0 & Ae^{2\gamma} & r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma} \end{pmatrix}$$

$g_{00} = g_{tt} = -\alpha e^{2(\eta-\gamma)}$, $\quad g_{11} = g_{rr} = e^{2(\eta-\gamma)}$, $\quad g_{22} = g_{zz} = e^{2\gamma}$,
$g_{23} = g_{z\theta} = Ae^{2\gamma}$, $\quad g_{33} = g_{\theta\theta} = r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}$. C'est une matrice inversible puisque son déterminant $|g|$ vaut $-\alpha r^2 e^{4(\eta-\gamma)} \neq 0$.

Sa matrice inverse est alors donnée par :

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(\gamma-\eta)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2} & \frac{-Ae^{2\gamma}}{r^2} \\ 0 & 0 & \frac{-Ae^{2\gamma}}{r^2} & \frac{e^{2\gamma}}{r^2} \end{pmatrix}$$

$g^{00} = g^{tt} = -\frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{\alpha}$ $\quad g^{11} = g^{rr} = e^{2(\gamma-\eta)}$ $\quad g^{22} = g^{zz} = e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2}$
$g^{23} = g^{z\theta} = -\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}$ $\quad g^{33} = g^{\theta\theta} = \frac{e^{2\gamma}}{r^2}$.

2.3 Les coefficients de Christoffel

Les coefficients de Christoffel représentent l'évolution des vecteurs de base d'un point à l'autre de l'espace temps, due à la courbure de ce dernier. Ces coefficients dépendent de la métrique de la variété sur laquelle on s'y trouve. Cf (Talpart Y. 1993 : 286, Choquet Y-Bruhat 2009 : 13) En système de coordonnées locales, les symboles de Christoffel sont définis par :

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta})$$

On en dénombre 64 coefficients au total et pour des raisons de symétrie, on ne va en calculer que 40 soit 24 coefficients non nuls. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} g^{t\mu}(\partial_t g_{\mu t} + \partial_t g_{t\mu} - \partial_\mu g_{tt}) \\
&= \frac{1}{2} g^{tt}\partial_t g_{tt} \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{\alpha})(\partial_t(-\alpha e^{2(\eta-\gamma)})) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\partial_t\alpha + \partial_t\eta - \partial_t\gamma
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^t_{tt} = \Gamma^0_{00} = \tfrac{1}{2\alpha}\partial_t\alpha + \partial_t\eta - \partial_t\gamma}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2} g^{t\mu}(\partial_t g_{\mu r} + \partial_r g_{t\mu} - \partial_\mu g_{tr}) \\
&= \frac{1}{2} g^{tt}\partial_r g_{tt} \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{\alpha})(\partial_r(-\alpha e^{2(\eta-\gamma)})) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\partial_r\alpha + \partial_r\eta - \partial_t\gamma
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^0_{01} = \Gamma^t_{tr} = \tfrac{1}{2\alpha}\partial_r\alpha + \partial_r\eta - \partial_t\gamma}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2} g^{t\mu}(\partial_r g_{\mu r} + \partial_r g_{r\mu} - \partial_\mu g_{rr}) \\
&= -\frac{1}{2} g^{tt}\partial_t g_{rr} \\
&= -\frac{1}{2}(-\frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{\alpha})(\partial_t(e^{2(\eta-\gamma)})) \\
&= \frac{1}{\alpha}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^0_{11} = \Gamma^t_{rr} = \frac{1}{\alpha}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma)}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{22} &= \frac{1}{2}g^{t\mu}(\partial_z g_{\mu z} + \partial_z g_{z\mu} - \partial_\mu g_{zz}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{tt}\partial_t g_{zz} \\
&= -\frac{1}{2}(-\frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{\alpha})(\partial_t(e^{2\gamma})) \\
&= \frac{1}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta}\partial_t\gamma
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^0_{22} = \Gamma^t_{zz} = \frac{1}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta}\partial_t\gamma}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{33} &= \frac{1}{2}g^{t\mu}(\partial_\theta g_{\mu\theta} + \partial_\theta g_{\theta\mu} - \partial_\mu g_{\theta\theta}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{tt}\partial_t g_{\theta\theta} \\
&= -\frac{1}{2}(-\frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{\alpha})(\partial_t(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})) \\
&= \frac{e^{4\gamma-2\eta}(A\partial_tA + A^2\partial_t\gamma) - r^2e^{-2\eta}\partial_t\gamma}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^0_{33} = \Gamma^t_{\theta\theta} = \frac{e^{4\gamma-2\eta}(A\partial_tA + A^2\partial_t\gamma) - r^2e^{-2\eta}\partial_t\gamma}{\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{23} &= \frac{1}{2}g^{t\mu}(\partial_z g_{\mu\theta} + \partial_\theta g_{z\mu} - \partial_\mu g_{z\theta}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{tt}\partial_t g_{z\theta} \\
&= -\frac{1}{2}(-\frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{\alpha})(\partial_t(Ae^{2\gamma})) \\
&= \frac{1}{2\alpha}e^{4\gamma-2\eta}\partial_tA + \frac{1}{\alpha}Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_t\gamma
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^0_{23} = \Gamma^t_{z\theta} = \frac{1}{2\alpha}e^{4\gamma-2\eta}\partial_tA + \frac{1}{\alpha}Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_t\gamma}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}g^{r\mu}(\partial_t g_{\mu t} + \partial_t g_{t\mu} - \partial_\mu g_{tt}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{tt} \\
&= -\frac{1}{2}e^{2(\gamma-\eta)}(\partial_r(-\alpha e^{2(\eta-\gamma)})) \\
&= \frac{1}{2}\partial_r\alpha + \alpha\partial_r\eta - \alpha\partial_r\gamma
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^1_{00} = \Gamma^r_{tt} = \tfrac{1}{2}\partial_r\alpha + \alpha\partial_r\eta - \alpha\partial_r\gamma}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2}g^{r\mu}(\partial_t g_{\mu r} + \partial_r g_{t\mu} - \partial_\mu g_{tr}) \\
&= \frac{1}{2}g^{rr}\partial_t g_{rr} \\
&= \frac{1}{2}e^{2(\gamma-\eta)}(\partial_t(e^{2(\eta-\gamma)})) \\
&= \partial_t\eta - \partial_t\gamma
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^1_{01} = \Gamma^r_{tr} = \partial_t\eta - \partial_t\gamma}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{z\mu}(\partial_z g_{\mu z} + \partial_z g_{z\mu} - \partial_\mu g_{zz}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{zz} \\
&= -\frac{1}{2}e^{2(\gamma-\eta)}(\partial_r e^{2\gamma}) \\
&= -e^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^1_{22} = \Gamma^r_{zz} = -e^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{r\mu}(\partial_r g_{\mu r} + \partial_r g_{t\mu} - \partial_\mu g_{rr}) \\
&= \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{rr} \\
&= \frac{1}{2}e^{2(\gamma-\eta)}(\partial_r(e^{2(\eta-\gamma)})) \\
&= \partial_r\eta - \partial_r\gamma
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^1_{11} = \Gamma^r_{rr} = \partial_r\eta - \partial_r\gamma}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{23} &= \frac{1}{2}g^{r\mu}(\partial_z g_{\mu\theta} + \partial_\theta g_{z\mu} - \partial_\mu g_{z\theta}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{z\theta} \\
&= -\frac{1}{2}e^{2(\gamma-\eta)}(\partial_r(Ae^{2\gamma})) \\
&= -\frac{1}{2}e^{4\gamma-2\eta}\partial_r A - Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^1_{23} = \Gamma^r_{z\theta} = -\tfrac{1}{2}e^{4\gamma-2\eta}\partial_r A - Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2}g^{r\mu}(\partial_\theta g_{\mu\theta} + \partial_\theta g_{\theta\mu} - \partial_\mu g_{\theta\theta}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\theta\theta} \\
&= -\frac{1}{2}e^{2(\gamma-\eta)}(\partial_r(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})) \\
&= r^2e^{-2\eta}\partial_r\gamma - Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_r A - A^2e^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^1_{33} = \Gamma^r_{z\theta} = r^2e^{-2\eta}\partial_r\gamma - Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_r A - A^2e^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{02} &= \frac{1}{2}g^{z\mu}(\partial_t g_{\mu z} + \partial_z g_{t\mu} - \partial_\mu g_{tz}) \\
&= \frac{1}{2}g^{zz}\partial_t g_{zz} + \frac{1}{2}g^{z\theta}\partial_t g_{z\theta} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t e^{2\gamma}) + \frac{1}{2}(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t(Ae^{2\gamma})) \\
&= \partial_t\gamma - \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^2_{02} = \Gamma^z_{tz} = \partial_t\gamma - \tfrac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{03} &= \frac{1}{2}g^{z\mu}(\partial_t g_{\mu\theta} + \partial_\theta g_{t\mu} - \partial_\mu g_{t\theta}) \\
&= \frac{1}{2}g^{zz}\partial_t g_{z\theta} + \frac{1}{2}g^{z\theta}\partial_t g_{\theta\theta} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t(Ae^{2\gamma})) + \frac{1}{2}(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t(r^2e^{-2\gamma} + Ae^{2\gamma})) \\
&= \frac{\partial_t A}{2} + 2A\partial_t\gamma - \frac{A^2e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^2_{03} = \Gamma^z_{t\theta} = \frac{\partial_t A}{2} + 2A\partial_t\gamma - \frac{A^2e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}g^{z\mu}(\partial_r g_{\mu z} + \partial_z g_{r\mu} - \partial_\mu g_{rz}) \\
&= \frac{1}{2}g^{zz}\partial_r g_{zz} + \frac{1}{2}g^{z\theta}\partial_r g_{z\theta} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r e^{2\gamma}) + \frac{1}{2}(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r(Ae^{2\gamma})) \\
&= \partial_r\gamma - \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^2_{12} = \Gamma^z_{rz} = \partial_r\gamma - \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{13} &= \frac{1}{2}g^{z\mu}(\partial_r g_{\mu\theta} + \partial_\theta g_{r\mu} - \partial_\mu g_{r\theta}) \\
&= \frac{1}{2}g^{zz}\partial_r g_{z\theta} + \frac{1}{2}g^{z\theta}\partial_r g_{\theta\theta} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r(Ae^{2\gamma})) + \frac{1}{2}(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r(r^2e^{-2\gamma} + Ae^{2\gamma})) \\
&= \frac{\partial_r A}{2} + 2A\partial_r\gamma - \frac{A^2e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^2_{13} = \Gamma^z_{r\theta} = \frac{\partial_r A}{2} + 2A\partial_r\gamma - \frac{A^2e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{02} &= \frac{1}{2}g^{\theta\mu}(\partial_t g_{\mu z} + \partial_z g_{t\mu} - \partial_\mu g_{tz}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_t g_{\theta z} + \frac{1}{2}g^{z\theta}\partial_t g_{zz} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t(Ae^{2\gamma})) \\
&= \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^3_{02} = \Gamma^\theta_{tz} = \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2}g^{\theta\mu}(\partial_t g_{\mu\theta} + \partial_\theta g_{t\mu} - \partial_\mu g_{t\theta}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_t g_{\theta\theta} + \frac{1}{2}g^{z\theta}\partial_t g_{z\theta} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t r^2 e^{-2\gamma} + Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t(Ae^{2\gamma})) \\
&= -\partial_t\gamma + \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^3_{03} = \Gamma^\theta_{t\theta} = -\partial_t\gamma + \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{12} &= \frac{1}{2}g^{\theta\mu}(\partial_t g_{\mu z} + \partial_z g_{r\mu} - \partial_\mu g_{rz}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta z} + \frac{1}{2}g^{z\theta}\partial_r g_{zz} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r(Ae^{2\gamma})) \\
&= \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^3_{12} = \Gamma^\theta_{rz} = \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2}g^{\theta\mu}(\partial_r g_{\mu\theta} + \partial_\theta g_{r\mu} - \partial_\mu g_{r\theta}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta} + \frac{1}{2}g^{z\theta}\partial_r g_{z\theta} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r(Ae^{2\gamma} + r^2e^{-2\gamma})) + \frac{1}{2}(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r(Ae^{2\gamma})) \\
&= \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A + \frac{1}{r} - \partial_r\gamma
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma^3_{13} = \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A + \frac{1}{r} - \partial_r\gamma}$$

Tous les autres coefficients sont nuls.

2.4 Le Tenseur de Ricci

Dans le cadre de la théorie de la relativité, le champ gravitationnel est interprété comme une déformation (courbure) de l'espace temps . Cette déformation est exprimée par le tenseur de Ricci dont le nom a été attribué à l'honneur de son inventeur Grégori Ricci-Cubastro. Cf Le tenseur de Ricci-Wikipédia (2015 : 15h) Le tenseur de Ricci est un tenseur d'ordre 2 obtenu comme le contracté du tenseur de courbure complet défini en coordonnées locales par :

$$R^{\lambda}_{\alpha\nu\beta} = (\partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}) + (\Gamma^{\lambda}_{\nu\gamma}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha}). \tag{2.2}$$

Et par la suite le tenseur de Ricci est donné par :

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= g_{\lambda\nu} R^{\lambda}_{\alpha\nu\beta} \\ &= (\partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}) + (\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

C'est un tenseur à 16 coefficients, et pour des raisons de symétrie on ne calculera que 10 de ces coefficients dont 6 non nuls. Ainsi on a :

i)

$$R_{tt} = R_{00} = \partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{tt} - \partial_t \Gamma^{\lambda}_{\lambda t} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{tt} - \Gamma^{\lambda}_{t\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda t}$$

Mais,

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{tt} - \partial_t \Gamma^{\lambda}_{\lambda t} &= \partial_t \Gamma^{t}_{tt} + \partial_r \Gamma^{r}_{tt} - \partial_t (\Gamma^{t}_{tt} + \Gamma^{r}_{rt} + \Gamma^{z}_{zt} + \Gamma^{\theta}_{\theta t}) \\ &= \partial_r \Gamma^{r}_{tt} - \partial_t (\Gamma^{r}_{rt} + \Gamma^{z}_{zt} + \Gamma^{\theta}_{\theta t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{tt} &= \Gamma^{\nu}_{tt}(\Gamma^{t}_{t\nu} + \Gamma^{r}_{r\nu} + \Gamma^{z}_{z\nu} + \Gamma^{\theta}_{\theta\nu}) \\ &= (\Gamma^{t}_{tt})^2 + \Gamma^{t}_{tt}(\Gamma^{r}_{rt} + \Gamma^{z}_{zt} + \Gamma^{\theta}_{\theta t}) + \Gamma^{r}_{tt}(\Gamma^{t}_{tr} + \Gamma^{r}_{rr} + \Gamma^{z}_{zr} + \Gamma^{\theta}_{\theta r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{t\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda t} &= \Gamma^{t}_{t\nu}\Gamma^{\nu}_{tt} + \Gamma^{r}_{t\nu}\Gamma^{\nu}_{rt} + \Gamma^{z}_{t\nu}\Gamma^{\nu}_{zt} + \Gamma^{\theta}_{t\nu}\Gamma^{\nu}_{\theta t} \\ &= (\Gamma^{t}_{tt})^2 + (\Gamma^{r}_{tr})^2 + (\Gamma^{z}_{tz})^2 + (\Gamma^{\theta}_{t\theta})^2 + 2\Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{r}_{tt} + 2\Gamma^{z}_{t\theta}\Gamma^{\theta}_{zt} \end{aligned}$$

De sorte que,

$$\begin{aligned} R_{tt} = {} & \partial_r \Gamma^{r}_{tt} - \partial_t (\Gamma^{r}_{rt} + \Gamma^{z}_{zt} + \Gamma^{\theta}_{\theta t}) + \Gamma^{t}_{tt}(\Gamma^{r}_{rt} + \Gamma^{z}_{zt} + \Gamma^{\theta}_{\theta t}) + \Gamma^{r}_{tt}(\Gamma^{r}_{rr} - \Gamma^{t}_{tr} + \Gamma^{z}_{zr} + \Gamma^{\theta}_{\theta r}) \\ & -(\Gamma^{r}_{tr})^2 - (\Gamma^{z}_{tz})^2 - (\Gamma^{\theta}_{t\theta})^2 - 2\Gamma^{z}_{t\theta}\Gamma^{\theta}_{zt} \end{aligned}$$

On obtient finalement après calculs :

$$\begin{aligned} R_{00} = {} & \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} + \alpha(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - (\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma) + \frac{\partial_t \alpha}{2\alpha}(\partial_t \eta - \partial_t \gamma) + \frac{\partial_r \alpha}{2}(\partial_r \eta - \partial_r \gamma) \\ & + \frac{\partial_r \alpha}{2r} + \frac{\alpha}{r}(\partial_r \eta - \partial_r \gamma) - \frac{(\partial_r \alpha)^2}{4\alpha} - 2(\partial_t \gamma)^2 - \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}(\partial_t A)^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

ii)

$$R_{tr} = R_{01} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{tr} - \partial_r \Gamma^\lambda_{\lambda t} + \Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{tr} - \Gamma^\lambda_{r\nu}\Gamma^\nu_{\lambda t}$$

Mais,

$$\begin{aligned}\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{tr} - \partial_r \Gamma^\lambda_{\lambda t} &= \partial_t \Gamma^t_{tr} + \partial_r \Gamma^r_{tr} - \partial_r(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{tr} + \Gamma^z_{zt} + \Gamma^\theta_{\theta t}) \\ &= \partial_t \Gamma^t_{tr} - \partial_r(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^z_{zt} + \Gamma^\theta_{\theta t})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{tr} &= \Gamma^\nu_{tr}(\Gamma^t_{t\nu} + \Gamma^r_{r\nu} + \Gamma^z_{z\nu} + \Gamma^\theta_{\theta\nu}) \\ &= \Gamma^t_{tr}(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^z_{zt} + \Gamma^\theta_{\theta t}) + \Gamma^r_{tr}(2\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^z_{zr} + \Gamma^\theta_{\theta r})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{r\nu}\Gamma^\nu_{\lambda t} &= \Gamma^t_{r\nu}\Gamma^\nu_{tt} + \Gamma^r_{r\nu}\Gamma^\nu_{rt} + \Gamma^z_{r\nu}\Gamma^\nu_{zt} + \Gamma^\theta_{r\nu}\Gamma^\nu_{\theta t} \\ &= \Gamma^t_{tr}\Gamma^t_{tt} + \Gamma^t_{rr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{rt}\Gamma^t_{rt} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{rt} + \Gamma^z_{rz}\Gamma^z_{zt} + \Gamma^z_{r\theta}\Gamma^\theta_{zt} + \Gamma^\theta_{rz}\Gamma^z_{\theta t} + \Gamma^r_{r\theta}\Gamma^\theta_{\theta t}\end{aligned}$$

De sorte que,

$$\begin{aligned}R_{tr} &= \partial_t \Gamma^t_{tr} - \partial_r(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^z_{zt} + \Gamma^\theta_{\theta t}) + \Gamma^r_{tr}(\Gamma^z_{rz} + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^t_{tr}) - \Gamma^t_{rr}\Gamma^r_{tt} - \Gamma^z_{r\theta}\Gamma^\theta_{zt} - \Gamma^\theta_{rz}\Gamma^z_{\theta t} \\ &\quad + \Gamma^z_{zt}(\Gamma^t_{tr} - \Gamma^z_{rz}) + \Gamma^\theta_{\theta t}(\Gamma^t_{tr} - \Gamma^r_{r\theta})\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$R_{01} = -2\partial_r\gamma\partial_t\gamma - \frac{\partial_r A \partial_t A}{2r^2} e^{4\gamma} + \frac{\partial_t \eta}{r} \tag{2.5}$$

iii)

$$R_{11} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{rr} - \partial_r \Gamma^\lambda_{\lambda r} + \Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{rr} - \Gamma^\lambda_{r\nu}\Gamma^\nu_{\lambda r}$$

Mais on a :

$$\begin{aligned}\partial_r \Gamma^\lambda_{rr} - \partial_r \Gamma^\lambda_{\lambda r} &= \partial_t \Gamma^t_{rr} + \partial_r \Gamma^r_{rr} - \partial_r(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^z_{zr} + \Gamma^\theta_{\theta r}) \\ &= \partial_t \Gamma^t_{rr} - \partial_r(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^z_{zr} + \Gamma^\theta_{\theta r})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{rr} &= \Gamma^\nu_{rr}(\Gamma^t_{t\nu} + \Gamma^r_{r\nu} + \Gamma^z_{z\nu} + \Gamma^\theta_{\theta\nu}) \\ &= (\Gamma^r_{rr})^2 + \Gamma^t_{rr}(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{rt} + \Gamma^z_{zt} + \Gamma^\theta_{\theta t}) + \Gamma^r_{rr}(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^z_{zr} + \Gamma^\theta_{\theta r})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{t\nu}\Gamma^\nu_{\lambda t} &= \Gamma^t_{r\nu}\Gamma^\nu_{tr} + \Gamma^r_{r\nu}\Gamma^\nu_{rr} + \Gamma^z_{r\nu}\Gamma^\nu_{zr} + \Gamma^\theta_{r\nu}\Gamma^\nu_{\theta r} \\ &= (\Gamma^t_{tr})^2 + (\Gamma^r_{rr})^2 + (\Gamma^z_{rz})^2 + (\Gamma^\theta_{r\theta})^2 + 2\Gamma^t_{rr}\Gamma^r_{tr} + 2\Gamma^z_{r\theta}\Gamma^\theta_{zr}\end{aligned}$$

De sorte que,

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \partial_t\Gamma^t_{rr} - \partial_r(\Gamma^t_{rt} + \Gamma^z_{zr} + \Gamma^\theta_{\theta r}) + \Gamma^t_{rr}(\Gamma^t_{tt} - \Gamma^r_{rt} + \Gamma^z_{zt} + \Gamma^\theta_{\theta t}) + \Gamma^r_{rr}(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^z_{zr} + \Gamma^\theta_{\theta r}) \\ &\quad -(\Gamma^t_{tr})^2 - (\Gamma^z_{rz})^2 - (\Gamma^\theta_{r\theta})^2 - 2\Gamma^z_{r\theta}\Gamma^\theta_{zr} \end{aligned}$$

Après calculs, on obtient alors :

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{\alpha}(\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma) - \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha^2}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) - (\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) \\ &\quad + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} + \frac{1}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) - 2(\partial_r\gamma)^2 + \frac{2\partial_r\gamma}{r} - \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}(\partial_r A)^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

iv)

$$R_{z\theta} = R_{23} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{z\theta} + \Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{z\theta} - \Gamma^\lambda_{\theta\nu}\Gamma^\nu_{\lambda z}$$

Mais,

$$\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{z\theta} = \partial_t\Gamma^t_{z\theta} + \partial_r\Gamma^r_{z\theta}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{z\theta} &= \Gamma^\nu_{z\theta}(\Gamma^t_{t\nu} + \Gamma^r_{r\nu} + \Gamma^z_{z\nu} + \Gamma^\theta_{\theta\nu}) \\ &= \Gamma^t_{z\theta}(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{tr} + \Gamma^z_{zt} + \Gamma^\theta_{\theta t}) + \Gamma^r_{z\theta}(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^z_{zr} + \Gamma^\theta_{r\theta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\theta\nu}\Gamma^\nu_{\lambda z} &= \Gamma^t_{\theta\nu}\Gamma^\nu_{tz} + \Gamma^r_{\theta\nu}\Gamma^\nu_{rz} + \Gamma^z_{\theta\nu}\Gamma^\nu_{zz} + \Gamma^\theta_{\theta\nu}\Gamma^\nu_{z\theta} \\ &= \Gamma^t_{\theta z}\Gamma^z_{tz} + \Gamma^t_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{tz} + \Gamma^r_{\theta z}\Gamma^z_{rz} + \Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{rz} + \Gamma^z_{\theta t}\Gamma^t_{zz} + \Gamma^z_{r\theta}\Gamma^r_{zz} + \Gamma^\theta_{\theta t}\Gamma^t_{z\theta} + \Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^r_{z\theta} \end{aligned}$$

De sorte qu'on obtienne :

$$\begin{aligned} R_{z\theta} &= \partial_t\Gamma^t_{z\theta} + \partial_r\Gamma^r_{z\theta} + \Gamma^t_{z\theta}(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{tr}) + \Gamma^r_{z\theta}(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{rr}) \\ &\quad -\Gamma^t_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{tz} - \Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{rz} - \Gamma^z_{\theta t}\Gamma^t_{zz} - \Gamma^z_{r\theta}\Gamma^r_{zz} \end{aligned}$$

Finalement, après calculs on a :

$$\begin{aligned} R_{23} &= \frac{\partial_{tt}A}{2\alpha}e^{4\gamma-2\eta} - \frac{\partial_t A\partial_t\alpha}{4\alpha^2} + \frac{2\partial_t A\partial_\gamma}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta} + \frac{A\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta} - \frac{A\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{4\gamma-2\eta} \\ &\quad -\frac{\partial_{rr}A}{2}e^{4\gamma-2\eta} - 2\partial_r A\partial_r\gamma e^{4\gamma-2\eta} - A\partial_{rr}\gamma e^{4\gamma-2\eta} - \frac{A\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha}e^{4\gamma-2\eta} - \frac{A(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{8\gamma-2\eta} \\ &\quad +\frac{A(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{8\gamma-2\eta} - \frac{\partial_\gamma\partial_r A}{4\alpha}e^{4\gamma-2\eta} + \frac{\partial_r A}{2r}e^{4\gamma-2\eta} \end{aligned} \tag{2.7}$$

v)

$$R_{zz} = R_{22} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{zz} + \Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{zz} - \Gamma^\lambda_{z\nu}\Gamma^\nu_{\lambda z}$$

Mais,

$$\begin{aligned} \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{zz} &= \partial_t\Gamma^t_{zz} + \partial_r\Gamma^r_{zz} \\ &= e^{4\gamma-2\eta}(\frac{\partial_{tt}\gamma}{\alpha} - \partial_t\gamma) - \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha^2}e^{4\gamma-2\eta} + \frac{\partial_t\gamma}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta}(4\partial_t\gamma - 2\partial_t\eta) - (4\partial_r\gamma - 2\partial_r\eta)e^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{zz} &= \Gamma^{\nu}_{zz}(\Gamma^{t}_{t\nu}+\Gamma^{r}_{r\nu}+\Gamma^{z}_{z\nu}+\Gamma^{\theta}_{\theta\nu})\\ &= \Gamma^{t}_{zz}(\Gamma^{t}_{tt}+\Gamma^{r}_{tr}+\Gamma^{z}_{zt}+\Gamma^{\theta}_{\theta t})+\Gamma^{r}_{zz}(\Gamma^{t}_{tr}+\Gamma^{r}_{rr}+\Gamma^{z}_{zr}+\Gamma^{\theta}_{r\theta})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\lambda}_{z\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda z} &= \Gamma^{t}_{z\nu}\Gamma^{\nu}_{tz}+\Gamma^{r}_{z\nu}\Gamma^{\nu}_{rz}+\Gamma^{z}_{z\nu}\Gamma^{\nu}_{zz}+\Gamma^{\theta}_{z\nu}\Gamma^{\nu}_{z\theta}\\ &= 2\Gamma^{t}_{zz}\Gamma^{z}_{tz}+2\Gamma^{t}_{z\theta}\Gamma^{\theta}_{tz}+2\Gamma^{r}_{zz}\Gamma^{z}_{rz}+2\Gamma^{r}_{z\theta}\Gamma^{\theta}_{rz}\end{aligned}$$

De sorte que,

$$\begin{aligned}R_{zz} &= \partial_t\Gamma^{t}_{zz}+\partial_r\Gamma^{r}_{zz}+\Gamma^{t}_{zz}(\Gamma^{t}_{tt}+\Gamma^{r}_{rt}-\Gamma^{z}_{tz}+\Gamma^{\theta}_{\theta t})\\ &\quad \Gamma^{r}_{zz}(\Gamma^{r}_{tr}+\Gamma^{r}_{rr}-\Gamma^{z}_{rz}+\Gamma^{\theta}_{\theta r})-2\Gamma^{t}_{z\theta}\Gamma^{\theta}_{zt}-2\Gamma^{r}_{z\theta}\Gamma^{\theta}_{rz}\end{aligned}$$

Ce qui donne après calculs,

$$\begin{aligned}R_{22} &= e^{4\gamma-2\eta}(\frac{\partial_{tt}\gamma}{\alpha}-\partial_{rr}\gamma)-\frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{4\gamma-2\eta}-e^{4\gamma-2\eta}\frac{\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}+\frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{8\gamma-2\eta}-\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{4\gamma-2\eta}\\ &\quad -\frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{8\gamma-2\eta}\end{aligned} \tag{2.8}$$

vi)

$$R_{\theta\theta}=R_{33}=\partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta}+\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{\theta\theta}-\Gamma^{\lambda}_{\theta\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda\theta}$$

Mais,

$$\partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta} = \partial_t\Gamma^{t}_{\theta\theta}+\partial_r\Gamma^{r}_{\theta\theta}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{\theta\theta} &= \Gamma^{\nu}_{\theta\theta}(\Gamma^{t}_{t\nu}+\Gamma^{r}_{r\nu}+\Gamma^{z}_{z\nu}+\Gamma^{\theta}_{\theta\nu})\\ &= \Gamma^{t}_{\theta\theta}(\Gamma^{t}_{tt}+\Gamma^{r}_{tr}+\Gamma^{z}_{zt}+\Gamma^{\theta}_{\theta t})+\Gamma^{r}_{\theta\theta}(\Gamma^{t}_{tr}+\Gamma^{r}_{rr}+\Gamma^{z}_{zr}+\Gamma^{\theta}_{r\theta})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\lambda}_{\theta\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda\theta} &= \Gamma^{t}_{\theta\nu}\Gamma^{\nu}_{t\theta}+\Gamma^{r}_{\theta\nu}\Gamma^{\nu}_{r\theta}+\Gamma^{z}_{\theta\nu}\Gamma^{\nu}_{z\theta}+\Gamma^{\theta}_{\theta\nu}\Gamma^{\nu}_{\theta\theta}\\ &= 2\Gamma^{t}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{t\theta}+2\Gamma^{t}_{z\theta}\Gamma^{\theta}_{t\theta}+2\Gamma^{r}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{r\theta}+2\Gamma^{r}_{z\theta}\Gamma^{z}_{r\theta}\end{aligned}$$

De sorte que,

$$\begin{aligned}R_{\theta\theta} &= \partial_t\Gamma^{t}_{\theta\theta}+\partial_r\Gamma^{r}_{\theta\theta}+\Gamma^{t}_{\theta\theta}(\Gamma^{t}_{tt}+\Gamma^{r}_{rt}+\Gamma^{z}_{tz}-\Gamma^{\theta}_{\theta t})\\ &\quad \Gamma^{r}_{\theta\theta}(\Gamma^{r}_{tr}+\Gamma^{r}_{rr}+\Gamma^{z}_{rz}-\Gamma^{\theta}_{\theta r})-2\Gamma^{t}_{z\theta}\Gamma^{z}_{\theta t}-2\Gamma^{r}_{z\theta}\Gamma^{z}_{r\theta}\end{aligned}$$

Ce qui donne après calculs,

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha}e^{4\gamma-2\eta} + \frac{A\partial_{tt}A}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta} - \frac{A\partial_t A}{2\alpha^2}e^{4\gamma-2\eta} + 4\frac{A\partial_t A}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta} + \frac{A^2\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta} - \\
&\quad \frac{A^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{4\gamma-2\eta} - \frac{r^2\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta} + \frac{r^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{4\gamma-2\eta} - A\partial_{rr}Ae^{4\gamma-2\eta} - 4A\partial_r A\partial_r\gamma \\
&\quad -A^2\partial_{rr}\gamma e^{4\gamma-2\eta} + r^2\partial_{rr}\gamma e^{-2\eta} - \frac{A^2\partial_r\gamma}{r}e^{4\gamma-2\eta} + r\partial_r\gamma e^{-2\eta} - \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha}(A\partial_r Ae^{4\gamma-2\eta} \\
&\quad +A^2\partial_r\gamma e^{4\gamma-2\eta} + re^{-2\eta} - r^2\partial_r\gamma e^{-2\eta}) + \frac{A^2(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{8\gamma-2\eta} + \frac{A\partial_r A}{r}e^{4\gamma-2\eta} \\
&\quad -\frac{A^2(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{8\gamma-2\eta} - \frac{(\partial_r A)^2}{2}e^{8\gamma-2\eta} \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

2.5 La courbure riemannienne scalaire

La courbure riemannienne scalaire est une contraction du tenseur de Ricci. Notée R, elle est définie par :

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{zz}R_{zz} + 2g^{z\theta}R_{z\theta} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta}.$$

En utilisant $(2.3) - (2.9)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
g^{tt}R_{tt} &= -\frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{2\alpha}\partial_{rr}\alpha - e^{2(\gamma-\eta)}(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) + \frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{\alpha}(\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma) - \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{2(\gamma-\eta)}(\partial_t\eta - \partial_{t\gamma}) \\
&\quad -\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{2(\gamma-\eta)}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) - \frac{\partial_r\alpha}{2r\alpha}e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{2(\gamma-\eta)} \\
&\quad +\frac{2(\partial_t\alpha)^2}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{e^{2(3\gamma-\eta)}}{2\alpha r^2}(\partial_t A)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{rr}R_{rr} &= \frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{\alpha}(\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma) - \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{2(\gamma-\eta)}(\partial_t\eta - \partial_\gamma) - (\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} \\
&\quad -\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{2(\gamma-\eta)}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{e^{2(\gamma-\eta)}}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) \\
&\quad -2(\partial_r\alpha)^2e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{2\partial_r\gamma}{r}e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{2(3\gamma-\eta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{zz}R_{zz} &= e^{2(\gamma-\eta)}(\frac{\partial_{tt}\gamma}{\alpha} - \partial_{rr}\alpha) - \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{\partial_r\gamma}{r}e^{2(3\gamma-\eta)} + \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} \\
&\quad -\frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha}e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{A^2e^{2(3\gamma-\eta)}}{r^2}(\frac{\partial_{tt}\alpha}{\alpha} - \partial_{rr}\gamma) - \frac{A^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} \\
&\quad -\frac{A^2\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - \frac{A^2\partial_r\gamma}{r^3}e^{2(5\gamma-\eta)} + \frac{A^2(\partial_r A)^2}{2r^4}e^{2(3\gamma-\eta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{z\theta}R_{z\theta} &= -\frac{A\partial_{tt}A}{2\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} + \frac{A\partial_t A\partial_t\alpha}{4\alpha^2 r^2}e^{2\gamma} - 2\frac{A\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - \frac{A^2\partial_{tt}\gamma}{\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} \\
&+ \frac{A^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2 r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} + \frac{A\partial_{rr}A}{2r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} + 2\frac{A\partial_r A\partial_r\gamma}{r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} + \frac{A^2\partial_{rr}\gamma}{r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} \\
&\frac{A^2\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} + \frac{A\partial_r A}{2r^3}e^{2(3\gamma-\eta)} + \frac{A\partial_r\gamma\partial_r A}{4\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - \frac{A^2(\partial_r A)^2}{2r^4}e^{2(5\gamma-\eta)} \\
&+ \frac{A^2(\partial_t A)^2}{2\alpha r^4}e^{2(5\gamma-\eta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} &= \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} + \frac{A\partial_{tt}A}{\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - \frac{A\partial_A}{2\alpha^2 r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} + 4\frac{A\partial_t A}{\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} \\
&+ \frac{A^2\partial_{tt}\gamma}{\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - \frac{A^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2 r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - \frac{\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{2(3\gamma-\eta)} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{2(3\gamma-\eta)} \\
&- \frac{A\partial_{rr}A}{r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - 4\frac{A\partial_r A\partial_r\gamma}{r^2}e^{2\gamma} - \frac{A^2\partial_{rr}\gamma}{r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} + \partial_{rr}\gamma e^{2(\gamma-\eta)} \\
&- \frac{A\partial_r\alpha\partial_r A}{2\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - \frac{A^2\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha}e^{2(\gamma-\eta)} \\
&- \frac{A^2\partial_r\gamma}{r^3}e^{2(3\gamma-\eta)} + \frac{\partial_r\gamma}{r}e^{2(3\gamma-\eta)} + \frac{A^2(\partial_r A)^2}{r^4} + \frac{A\partial_r A}{r^3}e^{2(3\gamma-\eta)} \\
&- \frac{A^2(\partial_t A)^2}{2\alpha r^4}e^{2(5\gamma-\eta)} - \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{2(5\gamma-\eta)}
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{\partial_{rr}\alpha}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)} - 2(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{2}{\alpha}(\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{\partial_r\alpha}{\alpha r}e^{2(\gamma-\eta)} \\
&- \frac{\partial_t\alpha}{\alpha^2}(\partial_\eta - \partial_t\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{\partial_r\alpha}{\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{2\alpha^2}e^{2(\gamma-\eta)} + 2\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)} \\
&+ \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - 2(\partial_r\gamma)^2 e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} + 2\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{2(\gamma-\eta)} \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Une fois ces calculs faits, on est en même de calculer le tenseur d'Einstein avec constante cosmologique $G_{\alpha\beta}$ défini par :

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - (\frac{1}{2}R + \Lambda)g_{\alpha\beta}.$$

$$G_{tt} = G_{00} = R_{00} - (\frac{1}{2}R + \Lambda)g_{00}$$

$$G_{tr} = G_{01} = R_{01}$$

$$G_{rr} = G_{11} = R_{11} - (\frac{1}{2}R + \Lambda)g_{11}$$

$$G_{z\theta} = G_{23} = R_{23} - (\frac{1}{2}R + \Lambda)g_{23}$$

$$G_{zz} = G_{22} = R_{22} - (\frac{1}{2}R + \Lambda)g_{22}$$

$$G_{\theta\theta} = G_{33} = R_{33} - (\frac{1}{2}R + \Lambda)g_{33}$$

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, il était question pour nous de déterminer les composantes $G_{\alpha\beta}$ du tenseur d'Einstein G . Pour ce faire, nous avons débuté par la détermination des coefficients de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$, par la suite nous avons calculé les coefficients du tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$ qui nous a permis de calculer la courbure riemannienne scalaire R, enfin, avec tous ces composantes déterminées, on en vient à calculer le tenseur d'Einstein. Tous les calculs effectués dans ce chapitre seront d'une grande utilité dans le chapitre suivant.

Chapitre Trois

LE SYSTÈME D'EINSTEIN-VLASOV

3.1 Introduction

La dynamique des matières gravitationnelles est un sujet d'une grande importance en relativité. Les matières à collision décrit par les équations de Vlasov offrent de propriétés mathématiques particulières. Dans ce chapitre nous allons dans un premier temps donner l'écriture locale du tenseur d'impulsion énergie engendré par la fonction densité de distribution des particules, solution de l'équation de Vlasov. Par la suite, nous écrivons les équations d'Einstein nous conduisant ainsi au système d'Einstein-Vlasov et enfin nous énonçons un théorème d'existence et d'unicité locale de solution de ce système pour des données initiales convenables.

3.2 Le tenseur d'impulsion énergie

Le tenseur d'impulsion énergie dans le cadre de notre travail est défini par : Cf (Rendall A. D. 1997 : 16, Fjallborg Mikael 2007 : 2253, Noundjeu P. et Tegankong D. 2016 : 2)

$$T_{\alpha\beta} = -\int_{\mathbb{R}^3} f(t, x^\alpha, p^\alpha)\frac{p_\alpha p_\beta}{p_0}\sqrt{|g|}d\tilde{p}. \tag{3.1}$$

Où, $d\tilde{p} = dp^1dp^2dp^3$; f est la fonction distribution de particules, $|g|$ est la valeur absolue du déterminant de la métrique, les p^α sont les composantes canoniques définies par :
$p^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$. Ils vérifient

$$g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = -1 \tag{3.2}$$

Avec, $p^0 > 0$ (ceci pour indiquer l'univers évolue vers le futur).
La fonction distribution f est définie sur une sous-variété de $T\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{R}^8$ notée PM espace des phases

des particules appelé hyperboloïde de masse, avec, $PM = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6$ munie des coordonnées locales t, x^i et p^i. Sur cet espace de phase, la variable p^0 est une fonction des variables (t, x^i, p^i) : de (3.2), on déduit $p^0 = \sqrt{-g_{00}}\sqrt{1+g_{ij}p^ip^j}$, $p^0 > 0$.

Pour simplifier l'éciture de (3.1) et faciliter les calculs, nous allons introduire les nouvelles variables v^α liées aux variables p^α par :

$$
\begin{aligned}
v^0 &= \sqrt{\alpha}e^{\eta-\gamma}p^0 \\
v^1 &= e^{\eta-\gamma}p^1 \\
v^2 &= e^{\gamma}p^2 + Ae^{\gamma}p^3 \\
v^3 &= re^{-\gamma}p^3
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Ce qui s'écrit encore :

$p^0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\gamma-\eta}v^0$

$p^1 = e^{\gamma-\eta}v^1$

$p^2 = e^{-\gamma}v^2 - \frac{A}{r}e^{\gamma}v^3$

$p^3 = \frac{1}{r}e^{\gamma}v^3$

Proposition 3.2.1. Avec le changement de variables (3.3) précédent, on a la relation :

$$v^0 = \sqrt{1+(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2}$$

Preuve. On a : $g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = -1$.

D'où, $g_{00}(p^0)^2 + g_{ij}p^ip^j = -1$

par la suite, $(p^0)^2 = -g^{00}(1+g_{ij}p^ip^j)$, ou encore $p^0 = [-g^{00}(1+g_{ij}p^ip^j)]^{\frac{1}{2}}$

Puisque $v^0 = \sqrt{\alpha}e^{\eta-\gamma}p^0$, on obtient alors

$$
\begin{aligned}
v^0 &= \sqrt{\alpha}e^{\eta-\gamma}[-g^{00}(1+g_{ij}p^ip^j)]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\alpha}e^{\eta-\gamma}[\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}(1+g_{ij}p^ip^j)]^{\frac{1}{2}} \\
&= (1+g_{ij}p^ip^j)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Mais,

$$
\begin{aligned}
(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2 &= e^{2(\eta-\gamma)}(p^1)^2 + e^{2\gamma}(p^2)^2 + 2Ae^{2\gamma}p^2p^3 + r^2e^{-2\gamma}(p^3)^2 \\
&= g_{11}(p^1)^2 + g_{22}(p^2)^2 + 2g_{23}p^2p^3 + g_{33}(p^3)^2 \\
&= g_{ij}p^ip^j
\end{aligned}
$$

Le résultat en découle immédiatement.

Le jacobien associé au changement de variables ci-dessus est défini par :

J = $\begin{pmatrix} e^{-(\eta-\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma} & 0 \\ 0 & -\frac{A}{r}e^{\gamma} & \frac{1}{r}e^{\gamma} \end{pmatrix}$

det J = $|J|$ = $\dfrac{1}{r}e^{-(\eta-\gamma)}$. On rappelle que $|g|$ = $\alpha r^2 e^{4(\eta-\gamma)}$.

Nous pouvons avec ce changement de variables, calculer les composantes du tenseur impulsion $T_{\alpha\beta}$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} T_{00} &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)p_0\sqrt{|g|}d\tilde{p} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)g_{00}p^0\sqrt{|g|}d\tilde{p} \\ &= -g_{00}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-(\eta-\gamma)}v^0 \times \sqrt{\alpha}re^{2(\eta-\gamma)} \times \frac{1}{r}e^{-(\eta-\gamma)}d\tilde{v} \\ &= -g_{00}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)v^0 d\tilde{v} \end{aligned}$$

$$d\tilde{v} = dv^1dv^2dv^3$$

$$\begin{aligned} T_{01} &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)p^1\sqrt{|g|}d\tilde{p} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)g_{11}p^1\sqrt{|g|}d\tilde{p} \\ &= -g_{11}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)e^{-(\gamma-\eta)}v^1 \times \sqrt{\alpha}e^{\eta-\gamma}d\tilde{v} \\ &= -\sqrt{\alpha}g_{11}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)v^1 d\tilde{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)\frac{(p_1)^2}{p_0} \times \sqrt{|g|}d\tilde{p} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)\frac{(g_{11}p^1)^2}{g_{00}p^0} \times \sqrt{\alpha}e^{\eta-\gamma}d\tilde{p} \\ &= \frac{g_{11}}{\sqrt{\alpha}}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}(v^1)^2}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-(\eta-\gamma)}v^0}e^{\eta-\gamma}d\tilde{v} \\ &= g_{11}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{(v^1)^2}{v^0}d\tilde{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{22} &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)\frac{(p_2)^2}{p_0}\times\sqrt{|g|}d\tilde{p}\\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)\frac{(g_{22}p^2)^2}{g_{00}p^0}\times\sqrt{|g|}d\tilde{p}\\
&= -\frac{g_{22}^2}{g_{00}}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{(e^{-\gamma}v^2-\frac{A}{r}e^{\gamma}v^3)^2}{v^0}\times e^{2(\eta-\gamma)}d\tilde{v}\\
&= g_{22}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{(v^2)^2-\frac{2Ae^{2\gamma}}{r}v^2v^3+\frac{A^2}{r^2}e^{4\gamma}(v^3)^2}{v^0}d\tilde{v}\\
&= e^{2\gamma}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{(v^2)^2}{v^0}d\tilde{v}-\frac{2Ae^{4\gamma}}{r}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{v^2v^3}{v^0}d\tilde{v}+\frac{A^2e^{6\gamma}}{r^2}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{(v^3)^2}{v^0}d\tilde{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{23} &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)\frac{p_2p_3}{p_0}\times\sqrt{|g|}d\tilde{p}\\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)\frac{g_{22}p^2g_{33}p^3}{g_{00}p^0}\times\sqrt{|g|}d\tilde{v}\\
&= -\frac{g_{22}g_{33}}{g_{00}}\int_{\mathbb{R}^3}\sqrt{\alpha}f(t,r,v)\frac{(e^{-\gamma}v^2-\frac{A}{r}e^{\gamma}v^3)(\frac{1}{r}e^{\gamma}v^3)}{v^0}\times\alpha e^{2(\eta-\gamma)}d\tilde{v}\\
&= \frac{g_{22}g_{33}}{r}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{v^2v^3}{v^0}d\tilde{v}-\frac{A^2g_{22}g_{33}}{r^2}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{(v^3)^2}{v^0}d\tilde{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{33} &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)\frac{(p_3)^2}{p_0}\times\sqrt{|g|}d\tilde{p}\\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)\frac{(g_{33}p^3)^2}{g_{00}p^0}\times\sqrt{|g|}d\tilde{p}\\
&= -\frac{(g_{33})^2}{g_{00}}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x^\alpha,p^\alpha)\frac{(p^3)^2}{p^0}\times\sqrt{|g|}d\tilde{p}\\
&= -\frac{(g_{33})^2}{\alpha e^{2(\eta-\gamma)}}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{\frac{1}{r^2}e^{2\gamma}(v^3)^2}{v^0}e^{2(\eta-\gamma)}d\tilde{v}\\
&= \frac{(g_{33})^2}{r^2}e^{2\gamma}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{(v^3)^2}{v^0}d\tilde{v}
\end{aligned}$$

Les autres composantes valent toutes 0.

3.3 L'équation de Vlasov

L'équation de Vlasov provient du fait qu'il ya conservation du nombre de particules à la traversée d'une hypersurface de TV_4 qui est PM. Dans le cadre de ce travail, nous avons supposé que les particules dans cet espace se déplacent sans collision ou du moins que les collisions entre particules étaient suffisamment rares pour qu'on puisse les négliger. Mathématiquement cela se traduit par le fait que $\mathcal{L}_X f = 0$, où $\mathcal{L}_X f$ désigne la dérivée de Lie suivant le champ X de la fonction f. $X = (p^i, -\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta)$. X est tangent aux trajectoires des particules(géodésiques). Cf Fjallborg Mikael (2006 :

6)

L'équation $\mathcal{L}_X f = 0$ dans nos coordonnées locales (t, x^i, p^i) s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^i}{p^0}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{1}{p^0}\Gamma^i_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0 \tag{3.4}$$

Proposition 3.3.1. L'équation de Vlasov (3.4) en coordonnées locales (t, x^i, v^i) s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sqrt{\alpha}v^1}{v^0}\frac{\partial f}{\partial r} - [\sqrt{\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2\sqrt{\alpha}}]v^0\frac{\partial f}{\partial v^1} - (\partial_t\eta - \partial_t\gamma)v^1\frac{\partial f}{\partial v^1}\\
&+[\sqrt{\alpha}\partial_r\gamma\frac{(v^2)^2}{v^0} - \sqrt{\alpha}(\partial_r\gamma - \frac{1}{r})\frac{(v^3)^2}{v^0} + \frac{\sqrt{\alpha}\partial_r Ae^{2\gamma}}{r}\frac{v^2v^3}{v^0}]\frac{\partial f}{\partial v^1} - [\partial_t\gamma v^2 + \sqrt{\alpha}\partial_r\gamma\frac{v^1v^2}{v^0}]\frac{\partial f}{\partial v^2}\\
&-[\frac{\partial_t Ae^{2\gamma}}{2r}v^2 - \partial_t\gamma v^3 + \frac{\sqrt{\alpha}\partial_r Ae^{2\gamma}}{2r}\frac{v^1v^2}{v^0} + \sqrt{\alpha}(\frac{1}{r} - \partial_r\gamma)\frac{v^1v^3}{v^0}]\frac{\partial f}{\partial v^3} = 0
\end{aligned} \tag{3.4'}$$

<u>**Preuve.**</u> (3.4) nous donne :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^1}{p^0}\frac{\partial f}{\partial x^1} - \frac{1}{p^0}\Gamma^1_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta\frac{\partial f}{\partial p^1} - \frac{1}{p^0}\Gamma^2_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta\frac{\partial f}{\partial p^2} - \frac{1}{p^0}\Gamma^3_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta\frac{\partial f}{\partial p^3} = 0 \tag{3.5}$$

Mais en utilisant le changement de variables (3.3), et le fait que $(x^i) = (r, z, \theta)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^1}{p^0}\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sqrt{\alpha}v^1}{v^0}\frac{\partial f}{\partial r} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{p^0}\Gamma^1_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta\frac{\partial f}{\partial p^1} &= -\frac{1}{p^0}[\Gamma^r_{tt}(p^0)^2+\Gamma^r_{tr}p^0p^1+\Gamma^r_{rr}(p^1)^2+\Gamma^r_{z\theta}p^2p^3+\Gamma^r_{zz}(p^2)^2]\frac{\partial f}{\partial p^1}\\
&= [-\Gamma^r_{tt}p^0-\Gamma^r_{tr}p^1-\frac{(p^1)^2}{p^0}\Gamma^r_{rr}-\frac{p^2p^3}{p^0}\Gamma^r_{z\theta}-\frac{(p^2)^2}{p^0}\Gamma^r_{zz}-\frac{(p^3)^2}{p^0}\Gamma^r_{\theta\theta}]\frac{\partial f}{\partial v^1}\frac{\partial v^1}{\partial p^1}\\
&= [(\frac{1}{2}\partial_r\alpha-\alpha\partial_r\eta+\alpha\partial_r\gamma)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\gamma-\eta}v^0+(-\partial_t\eta+\partial_t\gamma)e^{\gamma-\eta}v^1-\frac{e^{2(\gamma-\eta)}(v^1)^2}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\gamma-\eta}v^0}\\
&\quad(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)-\frac{(e^{-\gamma}v^2-\frac{A}{r}e^\gamma v^3)(\frac{1}{r}e^\gamma v^3)}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\gamma-\eta}v^0}(-\frac{1}{2}e^{4\gamma-2\eta}\partial_rA-Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma)\\
&\quad+\frac{(e^{-\gamma}v^2-\frac{A}{r}e^\gamma v^3)^2}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\gamma-\eta}v^0}e^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma-\frac{(\frac{1}{r}e^\gamma v^3)^2}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\gamma-\eta}v^0}(r^2e^{-2\gamma}\partial_r\gamma-Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_rA\\
&\quad-A^2e^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma)]e^{\eta-\gamma}\frac{\partial f}{\partial v^1}\\
&= -[\sqrt{\alpha}(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)+\frac{\partial_r\alpha}{2\sqrt{\alpha}}]v^0\frac{\partial f}{\partial v^1}-(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)v^1\frac{\partial f}{\partial v^1}-\sqrt{\alpha}\frac{(v^1)^2}{v^0}(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)\frac{\partial f}{\partial v^1}\\
&\quad[-(\frac{\frac{1}{r}v^2v^3-\frac{A}{r}e^\gamma(v^3)^2}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\gamma-\eta}v^0})(-\frac{1}{2}e^{4\gamma-2\eta}\partial_rA-Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma)\\
&\quad+\frac{(e^{-2\gamma}(v^2)^2-\frac{2A}{r}v^2v^3+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2}(v^3)^2)}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\gamma-\eta}v^0}e^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma\\
&\quad-\frac{\frac{1}{r^2}e^{2\gamma}(v^3)^2}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\gamma-\eta}v^0}(r^2e^{-2\eta}\partial_r\gamma-Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_rA-A^2e^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma)]e^{\eta-\gamma}\frac{\partial f}{\partial v^1}\\
&= -[\sqrt{\alpha}(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)+\frac{\partial_r\alpha}{2\sqrt{\alpha}}]v^0\frac{\partial f}{\partial v^1}-(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)v^1\frac{\partial f}{\partial v^1}+[-\sqrt{\alpha}\frac{(v^1)^2}{v^0}(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)\\
&\quad+\sqrt{\alpha}\partial_r\gamma\frac{(v^2)^2}{v^0}-\sqrt{\alpha}(\partial_r\gamma-\frac{1}{r})\frac{(v^3)^2}{v^0}+\frac{\sqrt{\alpha}\partial_rAe^{2\gamma}}{r}\frac{v^2v^3}{v^0}]\frac{\partial f}{\partial v^1} \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{p^0}\Gamma^2_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta\frac{\partial f}{\partial p^2} &= [-\Gamma^z_{tz}p^2-\Gamma^z_{t\theta}p^3-\Gamma^z_{rz}\frac{p^1p^2}{p^0}-\Gamma^z_{r\theta}\frac{p^1p^3}{p^0}]\frac{\partial f}{\partial p^2}\\
&= [-(e^{-\gamma}v^2-\frac{A}{r}e^\gamma v^3)(\partial_t\gamma-\frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_tA)-\frac{1}{r}e^\gamma v^3(\frac{\partial_tA}{2}+2A\partial_t\gamma-\frac{A^2e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_tA)\\
&\quad-\frac{e^{\gamma-\eta}v^1(e^{-\gamma}v^2-\frac{A}{r}e^\gamma v^3)}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\gamma-\eta}v^0}(\partial_r\gamma-\frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_rA)\\
&\quad-\frac{e^{\gamma-\eta}v^1\frac{1}{r}e^\gamma v^3}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\gamma-\eta}v^0}(\frac{\partial_rA}{2}+2A\partial_r\gamma-\frac{A^2e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_rA)]e^\gamma\frac{\partial f}{\partial v^2}\\
&\quad=[-(\partial_t\gamma e^{-\gamma}v^2-\frac{Ae^{3\gamma}}{2r^2}\partial_tAv^2-\frac{A\partial_t\gamma}{r}e^\gamma v^3+\frac{A^2e^{5\gamma}}{2r^3}\partial_tAv^3)-\frac{\partial_tA}{2r}e^\gamma v^3\\
&\quad-\frac{2A\partial_t\gamma}{r}e^\gamma v^3+\frac{A^2e^{5\gamma}}{2r^3}\partial_tAv^3-(\sqrt{\alpha}e^{-\gamma}\frac{v^1v^2}{v^0}-\frac{\sqrt{\alpha}Ae^\gamma}{r}\frac{v^1v^3}{v^0})(\partial_r\gamma-\frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2})\\
&\quad\frac{\sqrt{\alpha}}{r}e^\gamma\frac{v^1v^3}{v^0}(\frac{\partial_rA}{2}+2A\partial_r\gamma-\frac{A^2e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_rA)]e^\gamma\frac{\partial f}{\partial v^2}\\
&= [-\partial_t\gamma v^2-\sqrt{\alpha}\partial_r\gamma\frac{v^1v^2}{v^0}]\frac{\partial f}{\partial v^2} \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{p^0}\Gamma^3_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta\frac{\partial f}{\partial p^3} &= [-\Gamma^\theta_{tz}p^2-\Gamma^\theta_{t\theta}p^3-\Gamma^\theta_{rz}\frac{p^1p^2}{p^0}-\Gamma^\theta_{r\theta}\frac{p^1p^3}{p^0}]\frac{\partial f}{\partial p^3}\\
&= [-\frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A(e^{-\gamma}v^2-\frac{Ae^\gamma}{r}v^3)-\frac{1}{r}e^\gamma v^3(-\partial_t\gamma+\frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A)\\
&\quad -\sqrt{\alpha}\frac{v^1}{v^0}(e^{-\gamma}v^2-\frac{Ae^\gamma}{r}v^3)(\frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A)-\frac{\sqrt{\alpha}e^\gamma}{r}\frac{v^1v^3}{v^0}(\frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A+\frac{1}{r}-\partial_r\gamma)]\frac{\partial f}{\partial v^3}\frac{\partial v^3}{\partial p^3}\\
&= [-\frac{\partial_t Ae^{3\gamma}}{2r^2}v^2+\frac{Ae^{5\gamma}\partial_t A}{2r^3}v^3+\frac{\partial_t\gamma e^\gamma}{r}v^3-\frac{Ae^{5\gamma}\partial_t A}{2r^3}v^3\\
&\quad -(\frac{Ae^{4\gamma}\partial_r A}{2r^2})(\sqrt{\alpha}e^{-\gamma}\frac{v^1v^2}{v^0}-\frac{\sqrt{\alpha}Ae^\gamma}{r}\frac{v^1v^3}{v^0})-\frac{\sqrt{\alpha}Ae^{5\gamma}\partial_r A}{2r^3}\frac{v^1v^3}{v^0}\\
&\quad -\frac{\sqrt{\alpha}e^\gamma}{r^2}\frac{v^1v^3}{v^0}+\frac{\sqrt{\alpha}e^\gamma\partial_r\gamma}{r}\frac{v^1v^3}{v^0}]re^{-\gamma}\frac{\partial f}{\partial v^3}\\
&= [-\frac{\partial_t Ae^{2\gamma}}{2r}v^2+\partial_t\gamma v^3-\frac{\sqrt{\alpha}\partial_r Ae^{2\gamma}}{2r}\frac{v^1v^2}{v^0}-\sqrt{\alpha}(\frac{1}{r}-\partial_r\gamma)\frac{v^1v^3}{v^0}]\frac{\partial f}{\partial v^3} \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

On remplace les relations (3.6) - (3.9) dans (3.5) pour obtenir le résultat escompté.

3.4 Les équations d'Einstein

Les équations d'Einstein avec constante cosmologique données par (2.1) s'écrivent :

$$R_{\alpha\beta}-(\frac{1}{2}R+\Lambda)g_{\alpha\beta}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \qquad (3.10)$$

Dans la suite, nous prendrons $c = G = 1$.

Suivant les composantes, ces équations donnent :

$$R_{00}-(\frac{1}{2}R+\Lambda)g_{00}=8\pi T_{00} \qquad (3.11)$$

$$R_{01}=8\pi T_{01} \qquad (3.12)$$

$$R_{11}-(\frac{1}{2}R+\Lambda)g_{11}=8\pi T_{11} \qquad (3.13)$$

$$R_{22}-(\frac{1}{2}R+\Lambda)g_{22}=8\pi T_{22} \qquad (3.14)$$

$$R_{23}-(\frac{1}{2}R+\Lambda)g_{23}=8\pi T_{23} \qquad (3.15)$$

$$R_{33}-(\frac{1}{2}R+\Lambda)g_{33}=8\pi T_{33} \qquad (3.16)$$

En utilisant (2.11) et (2.4), (3.11) devient :

$$\begin{aligned}
8\pi T_{00} \;=\;& \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} + \alpha(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - (\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma) + \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma)\\
&+\frac{\partial_r\alpha}{2r} + \frac{\alpha}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} - 2(\partial_t\gamma)^2 - \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}(\partial_t A)^2 + \frac{1}{2}\alpha e^{2(\eta-\gamma)}[-\frac{\partial_{rr}\alpha}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)}\\
&-2(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{2}{\alpha}(\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{\partial_r\alpha}{\alpha r}e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{\partial_t\alpha}{\alpha^2}(\partial_\eta - \partial_t\gamma)e^{2(\gamma-\eta)}\\
&-\frac{\partial_r\alpha}{\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{2\alpha^2}e^{2(\gamma-\eta)} + 2\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - 2(\partial_r\gamma)^2e^{2(\gamma-\eta)}\\
&-\frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} + 2\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{2(\gamma-\eta)}] + \Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)}
\end{aligned}$$

Ce qui aboutit à :

$$-(\partial_t\gamma)^2 - \frac{(\partial_t A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} + \alpha\frac{\partial_r\eta}{r} - \alpha\frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - \alpha(\partial_r\gamma)^2 + \Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)} = 8\pi T_{00} \tag{3.17}$$

L'égalité (3.12) s'écrit encore en utilisant (2.11) et (2.5)

$$-2\partial_r\gamma\partial_t\gamma - \frac{\partial_r A\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} + \frac{\partial_t\eta}{r} \;=\; 8\pi T_{01} \tag{3.18}$$

En utilisant (2.11) et (2.6), l'égalité (3.13) s'écrit encore :

$$\begin{aligned}
8\pi T_{11} \;=\;& \frac{1}{\alpha}(\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma) - \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha^2}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) - (\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma)\\
&+\frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} + \frac{1}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) - 2(\partial_r\gamma)^2 + \frac{2\partial_r\gamma}{r} - \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}(\partial_r A)^2\\
&-\frac{1}{2}e^{2(\eta-\gamma)}[-\frac{\partial_{rr}\alpha}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)} - 2(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{2}{\alpha}(\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{\partial_r\alpha}{\alpha r}e^{2(\gamma-\eta)}\\
&-\frac{\partial_t\alpha}{\alpha^2}(\partial_\eta - \partial_t\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{\partial_r\alpha}{\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{2\alpha^2}e^{2(\gamma-\eta)} + 2\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)}\\
&+\frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - 2(\partial_r\gamma)^2e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} + 2\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{2(\gamma-\eta)}] - \Lambda e^{2(\eta-\gamma)}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r} + \frac{\partial_r\eta}{r} - (\partial_r\gamma)^2 - \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} - \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2} - \Lambda e^{2(\eta-\gamma)} = 8\pi T_{11} \tag{3.19}$$

L'égalité (3.14) s'écrit encore en utilisant (2.11) et (2.7) :

$$\begin{aligned}
8\pi T_{22} \;=\;& e^{4\gamma-2\eta}(\frac{\partial_{tt}\gamma}{\alpha} - \partial_{rr}\gamma) - \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{4\gamma-2\eta} - e^{4\gamma-2\eta}\frac{\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha} + \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{8\gamma-2\eta} - \frac{\partial_r\gamma}{r}e^{4\gamma-2\eta}\\
&-\frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{8\gamma-2\eta} - \frac{1}{2}e^{2\gamma}[-\frac{\partial_{rr}\alpha}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)} - 2(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{2}{\alpha}(\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)}\\
&-\frac{\partial_r\alpha}{\alpha r}e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{\partial_t\alpha}{\alpha^2}(\partial_\eta - \partial_t\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{\partial_r\alpha}{\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma)e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{2\alpha^2}e^{2(\gamma-\eta)}\\
&+2\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)} + \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} - 2(\partial_r\gamma)^2e^{2(\gamma-\eta)} - \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{2(3\gamma-\eta)} + 2\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{2(\gamma-\eta)}] - \Lambda e^{2\gamma}
\end{aligned}$$

Par la suite,

$$
\begin{aligned}
8\pi T_{22} &= e^{2(2\gamma-\eta)}[\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r}+\frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha}(\partial_{tt}\eta-\alpha\partial_{rr}\eta)+\frac{2}{\alpha}(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)-\frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}-\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}\\
&\quad+(\partial_r\gamma)^2+\frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha^2}-\frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha^2}-\frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{\alpha}-\frac{2\partial_r\gamma}{r}+\frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2\alpha}-\frac{3e^{4\gamma}}{4\alpha r^2}((\partial_tA)^2-\alpha(\partial_rA)^2)]\\
&\quad-\Lambda e^{2\gamma} \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

L'égalité (3.15) s'écrit encore en utilisant (2.11) et (2.8) :

$$
\begin{aligned}
8\pi T_{23} &= \frac{\partial_{tt}A}{2\alpha}e^{4\gamma-2\eta}-\frac{\partial_tA\partial_t\alpha}{4\alpha^2}+\frac{2\partial_tA\partial_\gamma}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta}+\frac{A\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta}-\frac{A\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{4\gamma-2\eta}\\
&\quad-\frac{\partial_{rr}A}{2}e^{4\gamma-2\eta}-2\partial_rA\partial_r\gamma e^{4\gamma-2\eta}-A\partial_{rr}\gamma e^{4\gamma-2\eta}-\frac{A\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha}e^{4\gamma-2\eta}-\frac{A(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{8\gamma-2\eta}\\
&\quad+\frac{A(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{8\gamma-2\eta}-\frac{\partial_\gamma\partial_rA}{4\alpha}e^{4\gamma-2\eta}+\frac{\partial_rA}{2r}e^{4\gamma-2\eta}\\
&\quad-\frac{1}{2}Ae^{2\gamma}[-\frac{\partial_{rr}\alpha}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)}-2(\partial_{rr}\eta-\partial_{rr}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)}+\frac{2}{\alpha}(\partial_{tt}\eta-\partial_{tt}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)}-\frac{\partial_r\alpha}{\alpha r}e^{2(\gamma-\eta)}\\
&\quad-\frac{\partial_t\alpha}{\alpha^2}(\partial_\eta-\partial_t\gamma)e^{2(\gamma-\eta)}-\frac{\partial_r\alpha}{\alpha}(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)e^{2(\gamma-\eta)}+\frac{(\partial_r\alpha)^2}{2\alpha^2}e^{2(\gamma-\eta)}+2\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)}\\
&\quad+\frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)}-2(\partial_r\gamma)^2e^{2(\gamma-\eta)}-\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{2(3\gamma-\eta)}+2\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{2(\gamma-\eta)}]-A\Lambda e^{2\gamma}
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
\begin{aligned}
8\pi T_{23} &= e^{2(2\gamma-\eta)}[\frac{A\partial_r\alpha}{2\alpha r}+\frac{A\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha}(\partial_{tt}\eta-\partial_{rr}\eta)+\frac{1}{\alpha}(\partial_{tt}\gamma-\partial_{rr}\gamma)\\
&\quad-\frac{A(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}-\frac{A(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}]+e^{2(\gamma-\eta)}[\frac{A\partial_t\alpha}{2\alpha^2}(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)+\frac{A\partial_r\gamma}{r}+\frac{A\partial_r\alpha}{2\alpha}(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)\\
&\quad-\frac{Ae^{4\gamma}}{4\alpha r^2}((\partial_tA)^2-\alpha(\partial_rA)^2)]-\Lambda Ae^{2\gamma} \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

L'égalité (3.16) s'écrit encore en utilisant (2.11) et (2.9) :

$$
\begin{aligned}
8\pi T_{33} &= \frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha}e^{4\gamma-2\eta}+\frac{A\partial_{tt}A}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta}-\frac{A\partial_tA}{2\alpha^2}e^{4\gamma-2\eta}+4\frac{A\partial_tA}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta}+\frac{A^2\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta}\\
&\quad-\frac{A^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{4\gamma-2\eta}-\frac{r^2\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta}+\frac{r^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{4\gamma-2\eta}-A\partial_{rr}Ae^{4\gamma-2\eta}-4A\partial_rA\partial_r\gamma\\
&\quad-A^2\partial_{rr}\gamma e^{4\gamma-2\eta}+r^2\partial_{rr}\gamma e^{-2\eta}-\frac{A^2\partial_r\gamma}{r}e^{4\gamma-2\eta}+r\partial_r\gamma e^{-2\eta}-\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha}(A\partial_rAe^{4\gamma-2\eta}+A^2\partial_r\gamma e^{4\gamma-2\eta}\\
&\quad+re^{-2\eta}-r^2\partial_r\gamma e^{-2\eta})+\frac{A^2(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{8\gamma-2\eta}+\frac{A\partial_rA}{r}e^{4\gamma-2\eta}-\frac{A^2(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{8\gamma-2\eta}-\frac{(\partial_rA)^2}{2}e^{8\gamma-2\eta}\\
&\quad\frac{1}{2}(r^2e^{-2\gamma}+A^2e^{2\gamma})[-\frac{\partial_{rr}\alpha}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)}-2(\partial_{rr}\eta-\partial_{rr}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)}+\frac{2}{\alpha}(\partial_{tt}\eta-\partial_{tt}\gamma)e^{2(\gamma-\eta)}\\
&\quad-\frac{\partial_r\alpha}{\alpha r}e^{2(\gamma-\eta)}-\frac{\partial_t\alpha}{\alpha^2}(\partial_\eta-\partial_t\gamma)e^{2(\gamma-\eta)}-\frac{\partial_r\alpha}{\alpha}(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)e^{2(\gamma-\eta)}+\frac{(\partial_r\alpha)^2}{2\alpha^2}e^{2(\gamma-\eta)}\\
&\quad+2\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{2(\gamma-\eta)}+\frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{2(3\gamma-\eta)}-2(\partial_r\gamma)^2e^{2(\gamma-\eta)}-\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{2(3\gamma-\eta)}+2\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{2(\gamma-\eta)}]\\
&\quad-\Lambda(r^2e^{-2\gamma}+A^2e^{2\gamma})
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
8\pi T_{33} &= r^2 e^{-2\eta}[\frac{\partial_r\alpha}{2r\alpha} + \frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta) - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{\partial_t\gamma}{\alpha} \\
&+ \frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha^2} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2\alpha} + (\partial_r\gamma)^2] - \frac{r\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\gamma} - \frac{3A^2(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{2(4\gamma-\eta)} \\
& e^{2(2\gamma-\eta)}[-\frac{A\partial_t A}{2\alpha^2} - \frac{A^2\partial_r A}{2r^2} - \frac{(\partial_r A)^2}{4r^2} - \frac{A^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2} + \frac{A^2\partial_r\alpha}{2\alpha r} \\
& \frac{A^2\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} - \frac{A^2}{\alpha}(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta) - \frac{A^2(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} + \frac{A}{\alpha}(\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A) \\
& \frac{A^2\partial_r\alpha}{2\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + A^2(\partial_r\gamma)^2 + \frac{A^2(\partial_r A)^2}{4r^2} - \frac{2A^2\partial_r\gamma}{r} - \frac{A\partial_r A\partial_r\alpha}{2\alpha} \\
&+ \frac{A\partial_r A}{r} - \frac{A\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha}] - \Lambda(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Lemme 3.4.1. Les équations (3.17), (3.18) et (3.19) conduisent respectivement aux équations :

$$\frac{\partial_t\eta}{r} = 2\partial_r\gamma\partial_t\gamma + \frac{\partial_r A\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} - \sqrt{\alpha}e^{2(\eta-\gamma)}J \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial_r\eta}{r} = (\partial_r\gamma)^2 + \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} + \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma} + e^{2(\eta-\gamma)}\rho - \Lambda e^{2(\eta-\gamma)} \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial_r\alpha}{2r} = \alpha e^{2(\eta-\gamma)}(P_1 - \rho) + \Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)} \tag{3.25}$$

Ici, $\rho = 8\pi g^{00}T_{00}$, $P_1 = 8\pi g^{11}T_{11}$ et $J = \dfrac{-8\pi g^{11}}{\sqrt{\alpha}}T_{01}$

<u>Preuve</u>. L'égalité (3.18) nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_t\eta}{r} &= 8\pi T_{01} + 2\partial_r\gamma\partial_t\gamma + \frac{\partial_r A\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} \\
&= \frac{\partial_t\eta}{r} = 2\partial_r\gamma\partial_t\gamma + \frac{\partial_r A\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} - \sqrt{\alpha}e^{2(\eta-\gamma)}J
\end{aligned}$$

L'égalité (3.17) nous donne :

$$\alpha\frac{\partial_r\eta}{r} = 8\pi T_{00} + (\partial_t\gamma)^2 + \frac{(\partial_t A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} + \alpha\frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} + \alpha(\partial_r\gamma)^2 - \Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_r\eta}{r} &= \frac{8\pi T_{00}}{\alpha} + \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{4\gamma} + \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} + (\partial_r\gamma)^2 - \Lambda e^{2(\eta-\gamma)} \\
&= \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{4\gamma} + \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} + (\partial_r\gamma)^2 + e^{2(\eta-\gamma)}\rho - \Lambda e^{2(\eta-\gamma)}
\end{aligned}$$

L'égalité (3.19) nous donne :

$$\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r} = 8\pi T_{11} - \frac{\partial_r\eta}{r} + (\partial_r\gamma)^2 + \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} + \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2} + \Lambda e^{2(\eta-\gamma)}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_r\alpha}{2r} &= 8\pi\alpha T_{11} - \alpha\frac{\partial_r\eta}{r} + \alpha(\partial_r\gamma)^2 + \frac{\alpha(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} + (\partial_t\gamma)^2 + \frac{(\partial_t A)^2}{4r^2} + \Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)} \\
&= 8\pi\alpha T_{11} - 8\pi T_{00} + \Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)} \\
&= \alpha e^{2(\eta-\gamma)}(P_1 - \rho) + \Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)}
\end{aligned}$$

Lemme 3.4.2. Les équations (3.20), (3.21) et (3.22) conduisent respectivement aux équations :

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\eta-\alpha\partial_{rr}\eta &= \frac{\partial_{rr}\alpha}{2}+\frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha}-\frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha}+\frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2}+\alpha(\partial_r\gamma)^2-(\partial_t\gamma)^2\\ &+\frac{e^{4\gamma}}{4r^2}((\partial_tA)^2-\alpha(\partial_rA)^2)+\alpha e^{2(\eta-\gamma)}(P_2-P_3)-\Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)} \qquad (3.26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma &= \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha}+\frac{\alpha\partial_r\gamma}{r}+\frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2}+\frac{e^{4\gamma}}{2r^2}((\partial_tA)^2-\alpha(\partial_rA)^2)\\ &+\frac{\alpha e^{2(\eta-\gamma)}}{2}(\rho-P_1+P_2-P_3)-\Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)} \qquad (3.27)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A &= \frac{\partial_tA\partial_t\alpha}{2\alpha}+\frac{\partial_rA\partial_r\alpha}{2}-4\partial_tA\partial_t\gamma+4\alpha\partial_rA\partial_r\gamma-\frac{\alpha\partial_rA}{r}\\ &+2\alpha re^{2(\eta-2\gamma)}S_{23} \qquad (3.28)\end{aligned}$$

où, $\quad S_{23}=T_{23}-AT_{22},\quad T_{22}=e^{2\gamma}(P_2-P_3)$ et $\quad P_3=\dfrac{e^{2\gamma}}{r^2}(2AS_{23}-8\pi T_{33}+A^2T_{22}) \qquad (3.28')$

Preuve. L'égalité (3.20) nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}(\partial_{tt}\eta-\alpha\partial_{rr}\eta) &= -e^{2(\eta-2\gamma)}T_{22}+\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r}+\frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}+\frac{2}{\alpha}(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)-\frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}-\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}\\ &+(\partial_r\gamma)^2+\frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha^2}-\frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha^2}-\frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{\alpha}-\frac{2\partial_r\gamma}{r}+\frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2\alpha}\\ &-\frac{3e^{4\gamma}}{4\alpha r^2}((\partial_tA)^2-\alpha(\partial_rA)^2)-\Lambda e^{2(\eta-\gamma)}\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\eta-\alpha\partial_{rr}\eta &= -\alpha e^{2(\eta-2\gamma)}T_{22}+\frac{\partial_r\alpha}{2r}+\frac{\partial_{rr}\alpha}{2}+2(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)-\frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha}-(\partial_t\gamma)^2\\ &+\alpha(\partial_r\gamma)^2+\frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha}-\frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha}-\partial_r\alpha\partial_r\gamma-\frac{2\alpha\partial_r\gamma}{r}+\frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2\alpha}\\ &-\frac{3e^{4\gamma}}{4r^2}((\partial_tA)^2-\alpha(\partial_rA)^2)-\Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)} \qquad (3.29)\end{aligned}$$

On remplace ensuite (3.29) dans (3.21) pour avoir :

$$\begin{aligned}8\pi T_{23}e^{2(\eta-2\gamma)} &= -\frac{1}{\alpha}(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)-\frac{\partial_t\alpha\partial_tA}{4\alpha^2}+\frac{2\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha}-A\partial_rA\partial_r\gamma+\frac{\partial_rA}{2r}\\ &-\frac{\partial_r\alpha\partial_rA}{4\alpha^2}+Ae^{2(\eta-2\gamma)}T_{22}+\frac{\partial_{tt}A}{2\alpha}-\frac{\partial_tA\partial_t\alpha}{4\alpha^2}+\frac{2\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha}+\frac{A\partial_{tt}\gamma}{\alpha}\\ &-\frac{A\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{4\alpha^2}-\frac{\partial_{rr}A}{2}-2\partial_rA\partial_r\gamma-A\partial_{rr}\gamma-\frac{A\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}\\ &\frac{A\partial_r\gamma}{r}-\frac{A\partial_tA}{2\alpha r^2}e^{4\gamma}+\frac{A(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{4\gamma}-\frac{\partial_r\alpha\partial_rA}{4\alpha}+\frac{\partial_rA}{2r}-\Lambda Ae^{2(\eta-\gamma)}+\Lambda e^{2(\eta-\gamma)}\\ &= \frac{1}{2\alpha}(\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A)-\frac{\partial_tA\partial_t\alpha}{4\alpha^2}-\frac{\partial_rA\partial_r\alpha}{4\alpha}+\frac{2\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha}-2\partial_rA\partial_r\gamma\\ &\frac{\alpha\partial_rA}{r}+Ae^{2(\eta-2\gamma)}T_{22}\end{aligned}$$

Ainsi, comme $S_{23} = T_{23} - AT_{22}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A &= \frac{\partial_t A\partial_t\alpha}{2\alpha} + \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{2} - 4\partial_t A\partial_t\gamma + 4\alpha\partial_r A\partial_r\gamma - \frac{\alpha\partial_r A}{r}\\ &\quad +2\alpha r e^{2(\eta-2\gamma)}S_{23}\end{aligned} \tag{3.30}$$

En remplaçant les égalités (3.29) et (3.30) dans (3.22), on obtient :

$$\begin{aligned}8\pi T_{33} &= -\frac{2r^2}{\alpha}(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta} + \frac{1}{\alpha}((\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2)e^{-2(\eta-2\gamma)} + \frac{2r^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{-2\eta}\\ &\quad +\frac{2r^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta} + 2r\partial_r\gamma e^{-2\eta} + 2A(T_{23} - AT_{22}) + A^2T_{22}\\ &\quad +r^2e^{-4\gamma}T_{22} - \frac{r\partial_r\alpha}{2\alpha} - \Lambda r^2 e^{2(\eta-\gamma)}\end{aligned}$$

En utilisant $(3.28')$, on a :

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma &= \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}((\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2) + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} + \frac{\partial_r\gamma\partial_{r\alpha}}{2\alpha} + \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r}\\ &\quad -\frac{\alpha}{2r^2}(8\pi T_{33} - 2AS_{23} - A^2T_{22} - r^2e^{-4\gamma}T_{22})e^{2\eta} - \frac{\partial_r\alpha}{4r}\\ &= \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}((\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2) + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} + \frac{\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha} + \frac{\alpha\partial_r\alpha}{r}\\ &\quad +\frac{\alpha e^{2(\eta-\gamma)}}{2}(\rho - P_1 + P_2 - P_3) - \alpha\Lambda e^{2(\eta-\gamma)}\end{aligned} \tag{3.31}$$

Enfin, on remplace (3.31) dans (3.29) pour avoir le résultat escompté.

3.5 Système d'Einstein-Vlasov

Les résultats précédents nous permettent d'obtenir le système complet d'Einstein-Vlasov avec constante cosmologique formé des équations (3.23) - (3.5), (3.26) - (3.28) et $(3.4')$:

$$\frac{\partial_t\eta}{r} = 2\partial_r\gamma\partial_t\gamma + \frac{\partial_r A\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} - \sqrt{\alpha}e^{2(\eta-\gamma)}J \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial_r\eta}{r} = (\partial_r\gamma)^2 + \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} + \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma} + e^{2(\eta-\gamma)}\rho - \Lambda e^{2(\eta-\gamma)} \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial_r\alpha}{2r} = \alpha e^{2(\eta-\gamma)}(P_1 - \rho) + \Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta &= \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha} - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2} + \alpha(\partial_r\gamma)^2 - (\partial_t\gamma)^2\\ &\quad +\frac{e^{4\gamma}}{4r^2}((\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2) + \alpha e^{2(\eta-\gamma)}(P_2 - P_3)\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma &= \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} + \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2} + \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}((\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2) \\ &+ \frac{\alpha e^{2(\eta-\gamma)}}{2}(\rho - P_1 + P_2 - P_3)\end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A &= \frac{\partial_t A\partial_t\alpha}{2\alpha} + \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{2} - 4\partial_t A\partial_t\gamma + 4\alpha\partial_r A\partial_r\gamma - \frac{\alpha\partial_r A}{r} \\ &+ 2\alpha r e^{2(\eta-2\gamma)}S_{23} + 2\alpha\Lambda A e^{2(\eta-\gamma)}\end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sqrt{\alpha}v^1}{v^0}\frac{\partial f}{\partial r} - [\sqrt{\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2\sqrt{\alpha}}]v^0\frac{\partial f}{\partial v^1} - (\partial_t\eta - \partial_t\gamma)v^1\frac{\partial f}{\partial v^1} \\ &+[\sqrt{\alpha}\partial_r\gamma\frac{(v^2)^2}{v^0} - \sqrt{\alpha}(\partial_r\gamma - \frac{1}{r})\frac{(v^3)^2}{v^0} + \frac{\sqrt{\alpha}\partial_r A e^{2\gamma}}{r}\frac{v^2v^3}{v^0}]\frac{\partial f}{\partial v^1} - [\partial_t\gamma v^2 + \sqrt{\alpha}\partial_r\gamma\frac{v^1v^2}{v^0}]\frac{\partial f}{\partial v^2} \\ &-[\frac{\partial_t A e^{2\gamma}}{2r}v^2 - \partial_t\gamma v^3 + \frac{\sqrt{\alpha}\partial_r A e^{2\gamma}}{2r}\frac{v^1v^2}{v^0} + \sqrt{\alpha}(\frac{1}{r} - \partial_r\gamma)\frac{v^1v^3}{v^0}]\frac{\partial f}{\partial v^3} \quad = 0\end{aligned} \quad (3.38)$$

Où,

$$J = 8\pi\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)v^1 d\tilde{v}$$

$$\rho = 8\pi\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)v^0 d\tilde{v}$$

$$P_1 = 8\pi\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{(v^1)^2}{v^0} d\tilde{v}$$

$$P_2 = 8\pi\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{(v^2)^2}{v^0} d\tilde{v}$$

$$P_3 = 8\pi\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{(v^3)^2}{v^0} d\tilde{v}$$

$$S_{23} = 8\pi\int_{\mathbb{R}^3} f(t,r,v)\frac{v^2v^3}{v^0} d\tilde{v}$$

Remarque 3.5.1. Ce système est un système de 7 équations aux dérivées partielles d'ordre 1 et 2, à 5 inconnues α, η, γ, A et f qui sont des fonctions des variables t et r.

La résolution de ce système nécessite des données initiales sur l'hypersurface $t = 0$. Ces données sont imposées par le choix de la symétrie cylindrique et sont prescrites comme suit : Cf Fjallborg Mikael (2007 : 2254)

$$\alpha(0,r) = \alpha_0(r), \qquad \gamma(0,r) = \gamma_0(r), \qquad \eta(0,r) = \eta_0(r), \qquad A(0,r) = A_0(r).$$
$$f(0,r,v) = f_0(r,v), \quad \partial_t A(0,r) = A_1(r), \quad \partial_t\eta(0,r) = \eta_1(r), \quad \partial_t\gamma(0,r) = \gamma_1(r) \quad (3.39)$$

Pour tout compact $K \subset \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = cste\}$, nous supposons f_0 identiquement nulle sur le complémentaire de K et $\gamma_0 = 0$, $\eta_0 = 0$, $A_0 = cste$ sur le complémentaire de K.
De plus, $\lim\limits_{r \to +\infty} \alpha_0(r) = 1. \qquad \eta_0(0) = 0.$
Les conditions aux bords sont prescrites par :

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{r\to+\infty} \alpha(t,r) = 1 & \lim\limits_{r\to+\infty} \gamma(t,r) = 0 & \lim\limits_{r\to+\infty} \eta(t,r) = C_\eta \\ \lim\limits_{r\to+\infty} A(t,r) = C_A & \eta(t,0) = 0 & \lim\limits_{r\to+\infty} f(t,r,v) = 0. \end{array} \tag{3.40}$$

On obtient ainsi un problème de Cauchy au sens relativiste. Il est à noter que le problème de Cauchy en relativité générale a tout d'abord été abordé par Yvonne Choquet-Bruhat Cf Choquet Y-Bruhat (1971 : 181), beaucoup d'autres s'y sont penchés après à l'instar de P. B. Mucha Cf Mucha P.B (2006 : 111)
De façon générale, les données initiales pour le problème de Cauchy du système d'Einstein-Vlasov sont choisies sur une hypersurface de dimension 3 et sont telles qu'on retrouve l'espace temps de Minkwoski à la limite lorsque $r \longrightarrow +\infty$. Cf Noundjeu P. et Tegankong D. (2012 : 6).
Il est maintenant question d'étudier le problème de Cauchy posé par le système complet d'Einstein-Vlasov $(3.32) - (3.38)$.
L'équation de Vlasov (3.38) est une E.D.P linéaire hyperbolique du premier ordre en f. Elle peut se résoudre en utilisant la méthode des caractéristiques et dans ce cas, f s'exprime en fonction de la donnée initiale f_0.
Si les fonctions η, γ et f sont connues, alors (3.34) permet de déterminer α. D'où le résultat suivant :

Proposition 3.5.1. Les équations (3.32), (3.33) et (3.34) sont les équations de contraintes et les équations (3.35), (3.36) et (3.37) sont les équations d'évolution.

Preuve. On montre comme indiqué dans (Fjallborg Mikael 2007, Noundjeu P. et Tegankong D. 2016) que si les équations $(3.32) - (3.34)$ sont vérifiées à l'instant initial $t = 0$ et si les équations $(3.35) - (3.37)$ sont vérifiées à tout instant t, alors les équations $(3.32) - (3.34)$ sont vérifiées à tout instant.

Remarque 3.5.2. On dit que les contraintes se propagent.
Ce théorème permet ainsi de réduire le système d'Einstein-Vlasov ci-dessus qui au départ est un système de 7 équations aux dérivées partielles à 5 inconnues en un système de 5 équations à 5 inconnues.

Théorème 3.5.1. (Existence locale dans le temps et unicité de solutions)
Le problème de Cauchy $(3.35) -$ (3.38), (3.39) et (3.40) admet pour tout $T > 0$, une unique solution α, η, γ, A et f dans $[0, T]$ lorsque les données initiales vérifient les contraintes $(3.32) - (3.34)$.

Preuve. Cf Choquet Y-Bruhat (1971 : 181-201).

Théorème 3.5.2. (Existence globale dans le temps)
Soit $[0, T)$, l'intervalle maximal d'existence de la solution obtenue au théorème précédent, pour tout $T > 0$. Supposons que $\Lambda < 0$ et pour tout $\epsilon > 0$, $\exists C_\epsilon > 0$ tel que pour $r < \epsilon$,
$|\partial^\beta \gamma(t, r)| < C_\epsilon$, $\quad |\partial^\beta A(t, r)| \leqslant C_\epsilon r$ et $\quad f(t, r, v) \equiv 0$ pour tout $t \in [0, T)$ et $v \in \mathbb{R}^3$.
Alors, $T = \infty$.

Preuve. Cf (Fjallborg M. 2007 : 2256, Noundjeu P. et Tegankong D. 2016 : 7)

♣ Portée Pédagogique ♣

Dans le cadre de la rédaction du mémoire de DIPES II, il nous a été demandé de donner l'intérêt pédagogique de notre travail. Comme toute activité de recherche scientifique, notre travail vise à déposer une pierre à l'édifice de la recherche scientifique. Rappelons que le thème soumis à notre étude s'intitule **équations d'Einstein-Vlasov en symétrie cylindrique**. C'est un sujet important tant chez l'enseignant que chez l'élève. Ainsi, il permet à l'enseignant du secondaire de résoudre sans faille des équations différentielles qui sont au programme du lycée. Il lui permet d'approfondir ses connaissances sur le calcul intégral. Ce travail permet à l'enseignant d'enrichir sa culture scientifique, l'enseignant a donc connaissance de cette théorie dite théorie de la relativité ; théorie qui diffère de la théorie newtonienne au niveau de la géométrie utilisée : on parle de géométrie riemannienne en relativité (avec la notion de courbure) et de géométrie euclidienne dans la théorie de Newton (où la courbure ici est nulle). Ce travail permet l'interdisciplinarité : on passe des théories physiciennes à une explication mathématique rationnelle et des mathématiques à une concordance avec les phénomènes physiques observées. Il permet aussi à l'enseignant de se familiariser avec les logiciels de programmation tels que Latex, WinEdit, Scientific Workspace et bien d'autres qui font de très bonne mise en page et s'avèrent donc très utiles pour la rédaction des épreuves d'évaluation et des leçons à dispenser : ils offrent une bonne mise en page et une bonne lisibilité.
Pour l'élève, ce travail lui permettra d'animer sa curiosité, d'enrichir sa culture, va le pousser à la recherche. Ce travail permet aussi à l'élève de voir l'interdisciplinarité entre la physique et la mathématique.

♣ Conclusion ♣

Parvenu au terme de ce travail, il était question pour nous de réécrire les équations d'Einstein-Vlasov avec constante cosmologique en symétrie cylindrique (t, r, z, θ). Pour y parvenir, nous avons dans le chapitre 1, rappelé des notions qui ont permis dans le chapitre 2, d'effectuer des calculs qui nous ont conduit à l'établissement final du système d'Einstein-Vlasov en symétrie cylindrique avec constante cosmologique, où nous avons scindé les équations de contraintes des équations d'évolution permettant ainsi de nous ramener à un système de 5 équations à 5 inconnues. Enfin, nous avons énoncé un théorème d'existence et d'unicité locale puis globale dans le temps de la solution de ce système muni des conditions de Cauchy bien déterminées. Notons que les équations d'Einstein avec constante cosmologique couplées aux équations de Vlasov ont permis d'expliquer beaucoup de phénomènes physiques tels que les trajectoires des supernovas de type Ia. Cf Fjallborg M. (2007 : 2253)
Une perspective plus générale serait par exemple de reprendre tous les calculs faits dans le cadre de ce travail pour le tenseur d'impulsion énergie de Vlasov avec champ scalaire ou alors à considérer le tenseur d'impulsion énergie de Vlasov additionné avec celui de Maxwell donnant ainsi lieu aux équations d'Einstein-Vlasov-Maxwell.

♣ Bibliographie ♣

[1] CHOQUET Y-BRUHAT (1971) *Problème de Cauchy pour le système intégral différentiel d'Einstein-Liouville*. ann, inst Fourrier 21 $n^0 3$: 181-201.

[2] CHOQUET Y-BRUHAT (2009) *General Relativy and the Einstein equations*. Oxford Math.Monogr. Oxford University Press, 812 pages.

[3] DIXMIER J. (1987) *Intégrale de Lebesgue*. Centre de documentation universitaire de la Sorbonne, Université de Paris v, 93 pages.

[4] FJALLBORG MIKAEL (2006) *On the Einstein-Vlasov System*. Karlstad University Studies 31, ISSN 1403-8099.

[5] FJALLBORG MIKAEL (2007) *The Cylindrically Symmetric Einstein-Vlasov System. class. quantum. grav*, 24 : 2253-2270.

[6] GOURGOULHON (2012-2013) *Cours de Master en Astronomie, Astrophysique et Ingénierie spéciale*. Université de Paris vi, Paris vii et Paris xi.

[7] MUCHA P. B (1998) *The Cauchy Problem for the Einstein-Vlasov System*. Journal of applied analysis Vol 4 $n^0 1$: 111-127.

[8] NOUNDJEU P. AND TEGANKONG D. (2016) *The Einstein-Vlasov-Maxwell System with cylindrical symmetry and temporal gauge*. Syllabus Reviews, Sci.Ser.6 ISSN 2409-319X.

[9] RENDALL A. D. (1997) *An introduction to the Einstein-Vlasov System*. Mathematics of gravitation Part 1. Lorentzian Geometry and Einstein Equations Banach center publication, Vol 41, Inst of Math. Polish Academy of Sciences.

[10] TALPART Y. (1993), *Leçon et Applications de Géométrie Différentielle et de Mécanique Analytique*. Ouagadougou, Burkina Faso. Cepaduece editions, 554 pages.

[11] *Le tenseur de Ricci*. Disponible sur : http//Wikipédia.org/wiki/ consulté le 27-11-2015 à 13h.