

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix – Travail – Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE Mathématiques



REPUBLIC OF CAMEROUN

Peace – Work – Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF Mathematics

**APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE
CLASSE C0 DE COQUES ÉPAISSES
LINÉAIREMENT ÉLASTIQUES**

THESE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat/Ph.D en
Mathématiques

Par : FEUMO Achile Germain

Sous la direction de
Pr NZENGWA Robert
Professeur

Année Académique : 2018



REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
BP : 812 Yaoundé



REPUBLIC OF CAMEROON
Peace – Work – Fatherland
THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
PO. Box : 812 Yaoundé

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE DOCTORAT/PHD

Nous soussignés, Professeurs NGUETSENG Gabriel, NZENGWA Robert, NJIFENJOU Abdou, membres du jury de la thèse de Doctorat/PhD présentée par Monsieur FEUMO Achille Germain, matricule 98Q441, thèse intitulée :

«Approximation par éléments finis de classe C^0 de coques épaisses linéairement élastiques »

Soutenue le 24 mai 2018 en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat/PhD en Mathématiques, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Yaoundé le 08 Juin 2018

Président

Pr NGUETSENG Gabriel

Rapporteur

Pr NZENGWA Robert

Examineur

Pr NJIFENJOU Abdou

APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE
CLASSE C^0 DE COQUES ÉPAISSES
LINÉAIREMENT ÉLASTIQUES

Research Article

Finite Element Model for Linear Elastic Thick Shells Using Gradient Recovery Method

Achille Germain Feumo,¹ Robert Nzengwa,² and Joseph Nkongho Anyi³

¹Department of Mathematics, University of Yaounde I, Yaounde, Cameroon

²Department of Civil Engineering, University of Douala, Douala, Cameroon

³Department of Mechanical Engineering, Higher Technical Teachers Training College, University of Buea, P.O. Box 249 Buea Road, Kumba, Cameroon

Correspondence should be addressed to Achille Germain Feumo; achillefeumo@yahoo.com

Received 23 January 2017; Accepted 15 March 2017; Published 14 June 2017

Academic Editor: Mohsen Sheikholeslami

Copyright © 2017 Achille Germain Feumo et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

This research purposed a new family of finite elements for spherical thick shell based on Nzengwa-Tagne's model proposed in 1999. The model referred to hereafter as N-T model contains the classical Kirchhoff-Love (K-L) kinematic with additional terms related to the third fundamental form governing strain energy. Transverse shear stresses are computed and C^0 finite element is proposed for numerical implementation. However, using straight line triangular elements does not guarantee a correct computation of stress across common edges of adjacent elements because of gradient jumps. The gradient recovery method known as Polynomial Preserving Recovery (PPR) is used for local interpolation and applied on a hemisphere under diametrically opposite charges. A good agreement of convergence results is observed; numerical results are compared to other results obtained with the classical K-L thin shell theory. Moreover, simulation on increasing values of the ratio of the shell shows impact of the N-T model especially on transverse stresses because of the significant energy contribution due to the third fundamental form tensor present in the kinematics of this model. The analysis of the thickness ratio shows difference between the classical K-L theory and N-T model when the ratio is greater than 0.099.

1. Introduction

N-T's theoretical approach which was mathematically and rigorously deduced from three-dimensional linear elastic curvilinear media through multiple scaling and limit analysis is a more general Kirchhoff-Love (K-L) model. The displacement here is a two-degree polynomial of the thickness parameter z while the strain tensor which is planar contains the change in the third fundamental form in addition to the change of the first and second.

For more than thirty years, numerous articles, books, and theses have addressed the problem of shell. Plates and more generally thin shells represent over 70% of industrial calculations [1, 2]. The mechanical models have been validated by some well-known benchmarks. Some locally stiffened thin shells or more generally thick shells have not received the same development probably because some few existing models do not account for transverse stresses and have not

been mathematically established. Moreover it is well known that transverse stresses can not be neglected as the shell becomes thicker. Without any ad hoc geometrical hypothesis, it was deduced that the strain tensor is planar; that is, $\epsilon_{i3} = 0$ and, as a consequence, the limit displacement reads $u = u_\alpha g^\alpha + u_3 g^3$, with $u_\alpha(x, z) = \xi_\alpha(x) - z\theta_\alpha(x) + z^2\psi_\alpha(x)$, $u_3 = \xi_3(x)$ (where $\{g^1, g^2, g^3\}$ is the three-dimensional contravariant shell basis); the in-plane strain $\epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} - zk_{\alpha\beta} + z^2Q_{\alpha\beta}$ and the stresses $\sigma^{\alpha\beta}$ depend on the in-plane strains and σ^{i3} are computed from appropriate differential equations; see [3].

The form of the displacement clearly shows that C^0 finite element is discontinuous across adjacent elements and usually provides inaccurate results at elements boundaries. Some authors indeed proposed different numerical methods: the finite difference method (FDM); finite volume method (FVM); finite element method for various simulations like magnetohydrodynamic (MHD) [4–6]; Curved Triangular

Finite Elements (CTFE) of [7]; a weighted average method to calculate stresses, which provided good results for both interior and boundary elements; and L^2 -projection to also calculate stresses, by considering “discrete smoothing” and least squares fitting at the gauss points. But this last method was limited to one element; consequently, the smoothen stress is still discontinuous across element boundaries. This problem was completely solved 20 years ago, when Sheikholeslami et al. introduced their Superconvergent Patch Recovery (SPR) [8–10], where the discrete least square fitting was performed on an element patch, a set of elements having the same vertex. This SPR method produces a continuous stress field, which is superconvergent under uniform mesh. Soon after, Wiberg et al. incorporated equilibrium and boundary conditions to enhance SPR [11, 12] and discussed strategies to improve the finite element solution u_h itself (other than the stress, which is essentially the gradient of u_h) [12]. Recently, Naga and Zhang and their colleagues proposed an alternative strategy, called Polynomial Preserving Recovery (PPR) [13–17], to recover the gradient. Theoretical analyses revealed that PPR has better superconvergence (over any mesh) properties than SPR and the numerical tests indicated that the a posteriori error estimator based on PPR is as good as or better than that of SPR ([18, 19], remarks: page 323).

In order to validate the N-T model, the program is first tested successfully on the widely known hemisphere under diametrically opposite charges of thin shells. Then thin shell theory of K-L and thick shell theory of N-T are implemented in order to evaluate the impact of thickness ratio. Next, simulations with various values of the characteristic shell parameter (thickness ratio) are implemented in order to reveal the contribution of Gauss curvature (change of the third fundamental form) in the stiffness energy.

In addition to that, Section 2 presents materials and methods: a brief description of the N-T model is presented without all the mathematical development, including gradient recovery method. A variational formulation of the shell equation and the resolution of transverse stresses equations are done. Section 3 is devoted to the discretization of the N-T model. Finite element spaces are next described and also the discretization scheme is layout. All numerical integrations are performed on a reference triangular element using the gradient recovery PPR method. Section 4 is completely devoted to the validation of the finite element model. Finally, results are discussed and concluded.

2. Materials and Methods

2.1. The N-T Model of Thick Shells. Let $\Omega = \{M \in \Omega, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{om} + za^3; -h/2 < z < h/2, m \in S\}$ (S is midsurface, $h > 0$ is the thickness, and x is the coordinate of m in S) denote a shell. We assume the surface S is bounded and sufficiently smooth for all subsequent computations. Let $\{a_1, a_2, a_3\}$ and $\{a^1, a^2, a^3\}$ denote the covariant and contravariant basis of the midsurface and $\{g_1, g_2, g_3\}$ and $\{g^1, g^2, g^3\}$, respectively, the covariant and contravariant basis of the shell. Then

$$g_\alpha = (\delta_\alpha^\tau - zb_\alpha^\tau) a_\tau = (\mu_\alpha^\tau) a_\tau, \quad g_3 = a_3$$

$$g^\alpha = (\mu_\alpha^\tau)^{-1} a^\tau, \quad g^3 = a^3$$

$$d\Omega = (1 - 2zb_\alpha^\alpha + z^2 \det(b_\beta^\alpha)) dzdS = \phi(x, z) dzdS, \quad (1)$$

where $b_\alpha^\rho = a^{\rho\nu} b_{\nu\alpha}$ and $b_{\gamma\alpha}$ denote curvature tensor components and $a^{\rho\nu}$ is the contravariant component of the metric of the midsurface S . The repeated index convention is adopted. Values of Greek indices α, β take range in the set $\{1, 2\}$ while Latin indices i, j take their values in the set $\{1, 2, 3\}$. A vector field can be expressed component wise indifferently in g^i -basis or a^i -basis as follows:

$$\begin{aligned} v &= v_i(x, z) g^i = \bar{v}_i(x, z) a^i, \\ v_\alpha &= (\mu_\alpha^\tau) \bar{v}_\tau, \\ \bar{v}_\alpha &= (\mu_\alpha^\tau)^{-1} v_\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Then the strain tensor (see [3]) is given by

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta}(u) &= \frac{1}{2} (u_{\alpha/\beta} + u_{\beta/\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} ((\mu_\alpha^\tau) (\nabla_\beta \bar{u}_\tau - b_{\tau\beta} \bar{u}_3) + (\mu_\beta^\tau) (\nabla_\alpha \bar{u}_\tau - b_{\alpha\tau} \bar{u}_3)) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\epsilon_{3\alpha}(u) = \frac{1}{2} (u_{\alpha/3} + u_{3/\alpha}) = \frac{1}{2} ((\mu_\alpha^\tau) \bar{u}_{\tau,3} + \bar{u}_{3,\alpha} + b_\alpha^\tau \bar{u}_\tau)$$

$$\epsilon_{33}(u) = \bar{u}_{3,3}$$

(/ and ∇ indicate covariant derivation in Ω and S , resp., while $f_{,\alpha} = \partial f / \partial x^\alpha$). The equation $\epsilon_{i3}(u) = 0$ yields the following results:

$$\begin{aligned} \bar{u}_\alpha &= (\mu_\alpha^\tau) \xi_\tau - z \partial_\alpha \xi_3 \\ \bar{u}_3 &= \xi_3 \text{ for } \xi_\alpha, \xi_3 \text{ function of } x = (x_1, x_2), \\ u_\alpha &= \xi_\alpha - z (\partial_\alpha \xi_3 + 2b_\alpha^\tau \xi_\tau) + z^2 (b_\alpha^\tau b_\tau^\nu \xi_\nu + b_\alpha^\tau \partial_\alpha \xi_3) \\ u_3 &= \xi_3. \end{aligned} \quad (4)$$

The strain tensor now reads

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta}(u) &= e_{\alpha\beta}(\xi) - zk_{\alpha\beta}(\xi) + z^2 Q_{\alpha\beta}(\xi) \\ e_{\alpha\beta}(\xi) &= \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha - 2b_{\alpha\beta} \xi_3) \\ k_{\alpha\beta}(\xi) &= \nabla_\alpha b_\beta^\nu \xi_\nu + b_\alpha^\nu \nabla_\beta \xi_\nu + b_\beta^\nu \nabla_\alpha \xi_\nu + \nabla_\alpha \nabla_\beta \xi_3 \\ &\quad - b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} \xi_3 \\ Q_{\alpha\beta}(\xi) &= \frac{1}{2} [b_\alpha^\nu \nabla_\beta b_\nu^\rho \dot{u}_\rho + b_\alpha^\nu b_\nu^\rho \nabla_\beta \dot{u}_\rho + b_\beta^\nu b_\nu^\rho \nabla_\alpha \dot{u}_\rho \\ &\quad + b_\beta^\nu \nabla_\nu b_\alpha^\rho \dot{u}_\rho + b_\alpha^\nu \nabla_\beta \nabla_\nu \dot{u}_3 + b_\beta^\nu \nabla_\alpha \nabla_\nu \dot{u}_3]. \end{aligned} \quad (5)$$

Let us recall that $(e_{\alpha\beta})$, $(k_{\alpha\beta})$, and $(Q_{\alpha\beta})$ are, respectively, changes in the first, second, and third fundamental forms tensors, while the displacement

$$u = u_\alpha(x, z) g^\alpha + \xi_3(x) a^3 = \bar{u}_\alpha(x, z) a^\alpha + \xi_3(x) a^3 \quad (6)$$

is a more generalized Kirchhoff-Love displacement [3] and can also be written in Reissner-Mindlin format as follows:

$$\begin{aligned} u &= (\xi_\alpha(x) - z\theta_\alpha(x) + z^2\psi_\alpha(x))g^\alpha + \xi_3(x)a^3 \\ &= (\xi_\alpha(x) + z\beta_\alpha(x))a^\alpha + \xi_3(x)a^3, \end{aligned} \quad (7)$$

where $\beta_\alpha = \xi_{3,\alpha} + 2b_\alpha^\nu \xi_\nu = \theta_\alpha + zb_\alpha^\nu \xi_\nu$ and θ_α are the rotations angles. Strain tensors are miscalculated in some literatures because wrong basis vectors were used. The condition $\epsilon_{i3}(u) = 0$ modifies the constitutive law which, expressed with the Lamé constants, now reads

$$\sigma^{\alpha\beta}(u) = (\bar{\lambda}g^{\gamma\delta}g^{\alpha\beta} + \mu(g^{\alpha\gamma}g^{\delta\beta} + g^{\alpha\delta}g^{\gamma\beta}))\epsilon_{\gamma\delta}(u), \quad (8)$$

where $\bar{\lambda} = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$, or equivalently with Young's modulus E and Poisson's coefficient ν , reads

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta}(u) &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu g^{\gamma\delta}g^{\alpha\beta} + (1-\nu)(g^{\alpha\gamma}g^{\delta\beta} + g^{\alpha\delta}g^{\gamma\beta})) \epsilon_{\gamma\delta}(u) \end{aligned} \quad (9)$$

Consider a shell of thickness h , clamped on a part of its border Γ_0 , subject to volume forces f^α and f^3 and to surface forces \bar{h}^α and \bar{h}^3 on the rest of its border Γ^1 . Suppose the forces are sufficiently smooth; then the transverse stresses are solutions to the differential equations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma^{\alpha 3}}{\partial z} + 2\Gamma_{\lambda 3}^\alpha \sigma^{\lambda 3} + \Gamma_{\lambda 3}^\lambda \sigma^{\alpha 3} &= -(\sigma_{,\beta}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha \sigma^{\lambda\beta} - f^\alpha) \\ \sigma^{\alpha 3}\left(-\frac{h}{2}\right) &= -\bar{h}_-^\alpha \\ \sigma^{\alpha 3}\left(+\frac{h}{2}\right) &= \bar{h}_+^\alpha, \end{aligned} \quad (10)$$

where $f^\alpha \in L^2(\Omega)$; $\sigma^{\alpha 3} \in H^1(-h/2, h/2; H^{-1}(S))$ and

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma^{33}}{\partial z} + \Gamma_{\alpha 3}^\alpha \sigma^{33} &= -(\sigma_{,\alpha}^{3\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^3 \sigma^{\lambda\alpha} + \Gamma_{\beta\lambda}^\beta \sigma^{\lambda 3} - f^3) \\ \sigma^{33}\left(-\frac{h}{2}\right) &= -\bar{h}_-^3 \\ \sigma^{33}\left(+\frac{h}{2}\right) &= \bar{h}_+^3, \end{aligned} \quad (11)$$

where $f^3 \in H^1(\Omega)$; $\sigma^{33} \in H^2(-h/2, h/2; H^{-2}(S))$.

The generic point of the sphere is described by

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} X = R \sin(y) \cos(x) \\ Y = R \sin(x) \sin(y) \\ Z = R \cos(y), \end{cases} \quad (12)$$

where x and y are curvilinear coordinates, $0 \leq x \leq 2\Pi$, and $0 \leq y \leq \Pi$; R is the radius of the sphere, and X, Y, Z are the global coordinates.

The covariant and contravariant metric tensors on the middle surface S are defined by

$$\begin{aligned} (a_{\alpha\beta}) &= \begin{bmatrix} R^2 \sin^2(y) & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix} \\ (a^{\alpha\beta}) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2 \sin^2(y)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

The covariant and contravariant curvature tensors on S (second fundamental form) are given by

$$\begin{aligned} (b_{\alpha\beta}) &= \begin{bmatrix} R \sin^2(y) & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}; \\ (b^{\alpha\beta}) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R^3 \sin^2(y)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^3} \end{bmatrix}; \\ (b_\beta^\alpha) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Let h be the thickness of the sphere; the Christoffel symbols are defined by

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0; \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \cotan(y); \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{-1}{2} \sin(2y); \\ \Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = 0; \\ \Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{23}^2 = \frac{1}{h-R}; \\ \Gamma_{11}^3 &= (R-h) \sin^2(y); \\ \Gamma_{22}^3 &= R-h. \end{aligned} \quad (15)$$

2.2. Variational Equations. Let the border of S , $\partial S = \gamma_0 \cup \gamma_1$ be partitioned in two parts and the border of the shell $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma^1$ with $\Gamma_0 = \gamma_0 \times \{-h/2, h/2\}$, and $\Gamma^1 = \gamma_1 \times \{-h/2, h/2\} \cup \Gamma_- \cup \Gamma_+$. We denote $\Gamma_- = S \times \{-h/2\}$ and $\Gamma_+ = S \times \{h/2\}$. Suppose the shell is clamped on Γ_0 and subject to volume and surface forces as stated above; then the three-dimensional variational equation related to the equilibrium equation reads

$$\begin{aligned} \text{find } u &\in IH_{\Gamma_0}^1 \\ \text{such that: } &\int_{\Omega} (\sigma(u) : \epsilon(v)) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_1} \bar{h} \cdot v dS = L(v) \quad \forall v \in IH_{\Gamma_0}^1, \end{aligned} \quad (16)$$

where $IH_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{u_i \in L^2(\Omega); \nabla_j u_i \in L^2(\Omega) \text{ and } u_i = 0 \text{ on } \Gamma_0\}$ is the Sobolev space and $:$ and \cdot denote, respectively, tensors and vectors scalar products. The variational formulation under Kirchhoff-Love's approach which is given by

$$\begin{aligned} A_0(u, v) = & \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_S \left(\{E_u\}^t \left[(1-\nu) ([D_e]_\beta^\alpha)^t [D_e]_\alpha^\beta \right. \right. \\ & + \nu ([D_e]_\alpha^\alpha)^t ([D_e]_\beta^\beta) \} \{E_v\} + \frac{h^2}{12} \{E_u\}^t \\ & \cdot \left. \left[(1-\nu) ([D_k]_\beta^\alpha)^t [D_k]_\alpha^\beta + \nu ([D_k]_\alpha^\alpha)^t ([D_k]_\beta^\beta) \right] \right. \\ & \left. \cdot \{E_v\} \right) dS = L(v), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} A_1(u, v) = & \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_S \left(\{E_u\}^t \left[(1-\nu) ([D_e]_\beta^\alpha)^t [D_e]_\alpha^\beta \right. \right. \\ & + \nu ([D_e]_\alpha^\alpha)^t ([D_e]_\beta^\beta) \} \{E_v\} + \frac{h^2}{12} \{E_u\}^t \\ & \cdot \left. \left[(1-\nu) ([D_k]_\beta^\alpha)^t [D_k]_\alpha^\beta + \nu ([D_k]_\alpha^\alpha)^t ([D_k]_\beta^\beta) \right] \right. \\ & \cdot \{E_v\} + \frac{h^2}{12} \{E_u\}^t \left[(1-\nu) ([D_e]_\beta^\alpha)^t [D_Q]_\alpha^\beta \right. \\ & + \nu ([D_e]_\alpha^\alpha)^t ([D_Q]_\beta^\beta) \} \{E_v\} + \frac{h^2}{12} \{E_u\}^t \\ & \cdot \left. \left[(1-\nu) ([D_Q]_\beta^\alpha)^t [D_e]_\alpha^\beta + \nu ([D_Q]_\alpha^\alpha)^t ([D_e]_\beta^\beta) \right] \right. \\ & \cdot \{E_v\} + \frac{h^4}{80} \{E_u\}^t \left[(1-\nu) ([D_Q]_\beta^\alpha)^t [D_Q]_\alpha^\beta \right. \\ & \left. + \nu ([D_Q]_\alpha^\alpha)^t ([D_Q]_\beta^\beta) \} \{E_v\} \right) dS = L(v) \end{aligned} \quad (18)$$

is a truncated thick shell or the best first-order thick shell variational equation under N-T's model; see [3]. It can be observed that this equation has similarities with familiar equations in engineering literature.

Let

$$\begin{aligned} H^1(S) &= \{\varphi \in L^2(S), \nabla_\alpha \varphi \in L^2(S)\} \\ IH^1(S) &= [H^1(S)]^2 \\ IH_{\gamma_0}^1(S) &= \{(\eta_\alpha) \in IH^1(S), \eta_\alpha = 0 \text{ on } \gamma_0\} \\ H^2(S) &= \{\varphi \in H^1(S), \nabla_\alpha \varphi \in H^1(S)\} \\ H_{\gamma_0}^2(S) &= \{\varphi \in H^2(S), \varphi = \partial_\alpha \varphi = 0 \text{ on } \gamma_0\} \\ U_{ad} &= IH_{\gamma_0}^1(S) \times H_{\gamma_0}^2(S). \end{aligned} \quad (19)$$

Nzengwa and Tagne Simo established existence and unicity of solutions of this truncated problem in U_{ad} . We

should remember that the displacement calculated after ξ is

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \xi_\alpha - z(\partial_\alpha \xi_3 + 2b_\alpha^\tau \xi_\tau) + z^2(b_\nu^\tau b_\alpha^\nu \xi_\tau + b_\alpha^\tau \partial_\alpha \xi_3) \\ u_3 &= \xi_3 \end{aligned} \quad (20)$$

or in the Nzengwa-Tagne format

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \xi_\alpha(x) - z\beta_\alpha(x) + z^2\psi_\alpha(x) \\ u_3 &= \xi_3(x) \end{aligned} \quad (21)$$

which suggests C^0 finite element implementation.

The linearized membrane strain tensor is expressed as follows:

$$\begin{aligned} e_\beta^\alpha(u) &= a^{\alpha\lambda} e_{\beta\lambda}(u) \\ &= \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda} (u_{\beta,\lambda} + u_{\lambda,\beta}) - a^{\alpha\lambda} \bar{\Gamma}_{\lambda\beta}^\rho u_\rho - a^{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta} u_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Using the formulas

$$T_\beta^\alpha(u) = a^{\alpha\lambda} T_{\beta\lambda}(u) = [T]_\beta^\alpha \{E_u\}, \quad (23)$$

we can put (22) in the following form:

$$e_\beta^\alpha(u) = [D_e]_\beta^\alpha \{E_u\}, \quad (24)$$

where

$$\begin{aligned} [E_u]^T &= \left[u_1; \partial_1 u_1; \partial_2 u_1; u_2; \partial_1 u_2; \partial_2 u_2; u_3; -2b_1^1 u_1 \right. \\ &\quad - 2b_1^2 u_2 - \partial_1 u_3; -2b_1^1 \partial_1 u_1 - 2b_1^2 \partial_1 u_2 - 2b_1^1 \partial_2 u_1 \\ &\quad - 2b_1^2 \partial_2 u_2; -2b_2^1 u_1 - 2b_2^2 u_2 - \partial_2 u_3; -2b_2^1 \partial_1 u_1 \\ &\quad - 2b_2^2 \partial_1 u_2; -2b_2^1 \partial_2 u_1 - 2b_2^2 \partial_2 u_2; \bar{b}^1 u_1 + \bar{b}^1 u_2 \\ &\quad + b_1^1 \partial_1 u_3 + b_1^2 \partial_2 u_3; \bar{b}^1 \partial_1 u_1 + \bar{b}^1 \partial_1 u_2; \bar{b}^1 \partial_2 u_1 \\ &\quad + \bar{b}^1 \partial_2 u_2; \bar{b}^2 u_1 + \bar{b}^2 u_2 + b_2^1 \partial_1 u_3 + b_2^2 \partial_2 u_3; \bar{b}^2 u_1 \\ &\quad + \bar{b}^2 u_2 + b_2^1 \partial_1 u_3 + b_2^2 \partial_2 u_3; \bar{b}^2 \partial_1 u_1 + \bar{b}^2 \partial_1 u_2; \bar{b}^2 \partial_2 u_1 \\ &\quad \left. + \bar{b}^2 \partial_2 u_2 \right], \end{aligned} \quad (25)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{b}^1 &= b_1^1 b_1^1 + b_2^1 b_1^2, \\ \bar{b}^1 &= b_1^2 b_1^1 + b_2^2 b_1^2, \\ \bar{b}^2 &= b_1^1 b_2^1 + b_2^1 b_2^2, \\ \bar{b}^2 &= b_1^2 b_2^1 + b_2^2 b_2^2; \end{aligned} \quad (26)$$

$$[D_e]^\alpha_\beta = \left[-a^{\alpha\nu}\Gamma_{\beta\nu}^1; a^{\alpha 1}I(\beta, 1); \frac{1}{2}a^{\alpha\lambda}J(\lambda, \beta); \right. \\ \left. -a^{\alpha\lambda}\Gamma_{\beta\lambda}^2; \frac{1}{2}a^{\alpha\lambda}J(\lambda, \beta); a^{\alpha 2}J(\beta, 2); \right. \\ \left. -b_\beta^\alpha; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0 \right]; \quad (27)$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

The linearized part of the change of the curvature tensor of the middle surface is expressed as follows:

$$[D_k]^\alpha_\beta = \left[\frac{1}{2}a^{\alpha\mu} \left(b_{\mu,\beta}^1 + \bar{\Gamma}_{\lambda\beta}^1 b_\mu^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\lambda b_\lambda^1 \right); 0; 0; \frac{1}{2} \right. \\ \cdot a^{\alpha\mu} \left(b_{\mu,\beta}^2 + \bar{\Gamma}_{\lambda\beta}^2 b_\mu^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\lambda b_\lambda^2 \right); 0; 0; b^{\alpha\mu} b_{\mu\beta}; -a^{\alpha\mu} \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^1; \\ \left. -I(\alpha, 1) a^{\alpha 1}; \frac{1}{2}J(\alpha, \beta) a^{\alpha\mu}; -a^{\alpha\mu} \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^2; \frac{1}{2}J(\alpha, \beta) \right. \\ \left. \cdot a^{\alpha\mu}; I(\alpha, 2) a^{\alpha 2}; 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]. \quad (28)$$

The linearized part of the change of the third fundamental form tensor can be expressed as follows:

$$[D_Q]^\alpha_\beta = \left[a^{\alpha\mu} b_\nu^1 \left(b_{\beta,\mu}^\nu + \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^\nu b_\mu^\gamma - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\nu b_\gamma^\nu \right); 0; 0; \right. \\ \left. a^{\alpha\mu} b_\nu^2 \left(b_{\beta,\mu}^\nu + \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^\nu b_\mu^\gamma - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\nu b_\gamma^\nu \right); 0; 0; 0; \right. \\ \left(b_{\beta,\mu}^1 + \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^1 b_\mu^\gamma - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^1 b_\gamma^1 \right); 0; 0; \left(b_{\beta,\mu}^2 + \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^2 b_\mu^\gamma - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^2 b_\gamma^2 \right); \\ \left. 0; 0; -a^{\alpha\mu} \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^1; I(\alpha, 1) a^{\alpha 1}; \frac{1}{2}J(\alpha, \beta) a^{\alpha\mu}; -a^{\alpha\mu} \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^2; \right. \\ \left. \frac{1}{2}J(\alpha, \beta) a^{\alpha\mu}; I(\alpha, 2) a^{\alpha 2} \right]. \quad (29)$$

2.3. Resolution of the Transverse Stress Ordinary Differential Equation. Using expressions (27), (28), and (29), let $\tau = -4/(h - R)$, Γ_{jk}^i be the three dimension Christoffel symbols, and

$$\bar{\sigma}_0^{13} = \frac{-E}{1 - \nu^2} \left[\left(a^{11} \left(e_1^1 + \nu e_2^2 \right) \right)_{,x^1} + (1 - \nu) \left(a^{11} e_1^2 \right)_{,x^2} \right. \\ \left. + (1 - \nu) \cotan(y) a^{11} e_1^2 \right. \\ \left. + (1 - \nu) \cotan(y) a^{22} e_2^2 \right]. \\ \bar{\sigma}_1^{13} = \frac{-E}{1 - \nu^2} \left[\left(a^{11} \left(K_1^1 + \nu k_2^2 \right) \right)_{,x^1} \right. \\ \left. + (1 - \nu) \left(a^{11} k_1^2 \right)_{,x^2} + (1 - \nu) \cotan(y) a^{11} k_1^2 \right. \\ \left. + (1 - \nu) \cotan(y) a^{22} k_2^2 \right]$$

$$\bar{\sigma}_2^{13} = \frac{-E}{1 - \nu^2} \left[\left(a^{11} \left(Q_1^1 + \nu Q_2^2 \right) \right)_{,x^1} \right. \\ \left. + (1 - \nu) \left(a^{11} Q_1 \right)_{,x^2} + (1 - \nu) \cotan(y) a^{11} Q_1^2 \right. \\ \left. + (1 - \nu) \cotan(y) a^{22} Q_2^2 \right] \quad (30)$$

Then the first shear stress of (10) is given as follows:

$$\sigma^{13}(x, y, z) = \left\{ -\bar{h}_-^{-1} \exp\left(-\tau\left(z + \frac{h}{2}\right)\right) + \left[1 \right. \right. \\ \left. \left. - \exp\left(-\tau\left(z + \frac{h}{2}\right)\right) \right] \left[\frac{\bar{\sigma}_0^{13}}{\tau} + \frac{\bar{\sigma}_1^{13}}{\tau^2} + 2 \frac{\bar{\sigma}_2^{13}}{\tau^3} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(z - \frac{h}{2} \right) \left(-\frac{\bar{\sigma}_1^{13}}{\tau} - 2 \frac{\bar{\sigma}_2^{13}}{\tau^2} \right) + \left(z^2 + \frac{h^2}{4} \right) \frac{\bar{\sigma}_2^{13}}{\tau^3} \right] \right\} \\ \cdot \{E_u\}. \quad (31)$$

In the same way, let

$$\bar{\sigma}_0^{23} = \frac{-E}{1 - \nu^2} \left[(1 - \nu) \left(a^{22} e_{2,x^1}^2 \right) + \left(a^{11} e_1^2 \right)_{,x^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin(2y) a^{11} \left(e_1^1 + \nu e_2^2 \right) \right] \\ \bar{\sigma}_1^{23} = \frac{-E}{1 - \nu^2} \left[(1 - \nu) \left(a^{22} k_{2,x^1}^2 \right) + \left(a^{11} k_1^2 \right)_{,x^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin(2y) a^{11} \left(k_1^1 + \nu k_2^2 \right) \right] \\ \bar{\sigma}_2^{23} = \frac{-E}{1 - \nu^2} \left[(1 - \nu) \left(a^{22} Q_{2,x^1}^2 \right) + \left(a^{11} Q_1^2 \right)_{,x^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin(2y) a^{11} \left(Q_1^1 + \nu Q_2^2 \right) \right]. \quad (32)$$

The second shear stress (10) is defined as follows:

$$\sigma^{23}(x, y, z) = \left\{ -\bar{h}_-^{-2} \exp\left(-\tau\left(z + \frac{h}{2}\right)\right) + \left[1 \right. \right. \\ \left. \left. - \exp\left(-\tau\left(z + \frac{h}{2}\right)\right) \right] \left[\frac{\bar{\sigma}_0^{23}}{\tau} + \frac{\bar{\sigma}_1^{23}}{\tau^2} + 2 \frac{\bar{\sigma}_2^{23}}{\tau^3} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(z - \frac{h}{2} \right) \left(-\frac{\bar{\sigma}_1^{23}}{\tau} - 2 \frac{\bar{\sigma}_2^{23}}{\tau^2} \right) + \left(z^2 + \frac{h^2}{4} \right) \frac{\bar{\sigma}_2^{23}}{\tau^3} \right] \right\} \\ \cdot \{E_u\}. \quad (33)$$

Let

$$\gamma_1 = \frac{\bar{\sigma}_{0,x^1}^{13} + \bar{\sigma}_{0,x^2}^{23}}{\tau} + \frac{\bar{\sigma}_{1,x^1}^{13} + \bar{\sigma}_{1,x^2}^{23}}{\tau^2} + \frac{\bar{\sigma}_{2,x^1}^{13} + \bar{\sigma}_{2,x^2}^{23}}{\tau^3} \\ \gamma_2 = \frac{\bar{\sigma}_{1,x^1}^{13} + \bar{\sigma}_{1,x^2}^{23}}{\tau} + 2 \frac{\left(\bar{\sigma}_{2,x^1}^{13} + \bar{\sigma}_{2,x^2}^{23} \right)}{\tau^2} \\ \gamma_3 = 2 \frac{\left(\bar{\sigma}_{2,x^1}^{13} + \bar{\sigma}_{2,x^2}^{23} \right)}{\tau^3};$$

$$\begin{aligned}
\varsigma &= \frac{2}{h-R} = \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{23}^2 \\
\gamma_0 &= \gamma_1 + \frac{h}{2}\gamma_2 - \frac{h^4}{4}\gamma_3 \\
\bar{\gamma}_1 &= \frac{E(h-R)\sin^2(y)}{1-\nu^2}a^{11}(e_1^1 + \nu e_2^2) \\
&\quad - E\frac{\cotan(y)}{1+\nu}a^{11}e_1^2 + \frac{E(h-R)}{1-\nu^2}a^{22}(e_2^2 + \nu e_1^1) \\
\bar{\gamma}_2 &= \frac{E(h-R)\sin^2(y)}{1-\nu^2}a^{11}(k_1^1 + \nu k_2^2) \\
&\quad - E\frac{\cotan(y)}{1+\nu}a^{11}k_1^2 + \frac{E(h-R)}{1-\nu^2}a^{22}(k_2^2 + \nu k_1^1) \\
\bar{\gamma}_3 &= \frac{E(h-R)\sin^2(y)}{1-\nu^2}a^{11}(Q_1^1 + \nu Q_2^2) \\
&\quad - E\frac{\cotan(y)}{1+\nu}a^{11}Q_1^2 \\
&\quad + \frac{E(h-R)}{1-\nu^2}a^{22}(Q_2^2 + \nu Q_1^1).
\end{aligned} \tag{34}$$

Then the third expression of (11) is defined as follows:

$$\begin{aligned}
\sigma^{33}(x, y, z) &= \left\{ \left[\frac{\gamma_0}{\varsigma - \tau} - \gamma_2 \left(\frac{z}{\varsigma - \tau} - \frac{1}{(\varsigma - \tau)^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma_3 \left(\frac{z^2}{\varsigma - \tau} - \frac{2z}{(\varsigma - \tau)^2} + \frac{2}{(\varsigma - \tau)^3} \right) \right] \right. \\
&\quad \cdot \exp\left(-\tau\left(z - \frac{h}{2}\right)\right) + \left[\frac{\bar{\gamma}_1 - \gamma_0}{\varsigma} \right. \\
&\quad \left. + (\gamma_2 - \bar{\gamma}_2) \left(\frac{z}{\varsigma} - \frac{1}{\varsigma^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{\gamma}_3 - \gamma_3) \left(\frac{z^2}{\varsigma} - \frac{2z}{\varsigma^2} + \frac{2}{\varsigma^3} \right) \right] \\
&\quad \left. + \exp\left(-\tau\left(z - \frac{h}{2}\right)\right) \left[\bar{h}_+^{-3} + \frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}_1}{\varsigma} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\bar{\gamma}_2 - \gamma_2) \left(\frac{h}{2\varsigma} - \frac{1}{\varsigma^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\gamma_3 - \bar{\gamma}_3) \left(\frac{h^2}{4\varsigma} - \frac{h}{\varsigma^2} + \frac{2}{\varsigma^3} \right) + \frac{\gamma_0}{\varsigma - \tau} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma_2 \left(\frac{h}{2(\varsigma - \tau)} - \frac{1}{(\varsigma - \tau)^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \gamma_3 \left(\frac{h^2}{4(\varsigma - \tau)} - \frac{h}{(\varsigma - \tau)^2} + \frac{2}{(\varsigma - \tau)^3} \right) \right] \right\} \{E_u\}.
\end{aligned} \tag{35}$$

2.4. Polynomial Preserving Recovery Method. Let us recall that the linear stress-strain relation does not guarantee smoothness across elements because of gradient jumps since the displacement is only C^0 . The shell is meshed with straight lines triangular elements obtained by linear transformation of a reference 2D triangle. Jumps across elements will be prevented by implementing the gradient recovery methods that we briefly present hereafter. Let u_h be C^0 finite element approximation of the solution u , and let

$$\begin{aligned}
E_1 &= (I, J, K) \\
E_2 &= (I, J, L)
\end{aligned} \tag{36}$$

be two triangular elements with a common node I . We denote

$$\begin{aligned}
U_1 &= (U_h^I, U_h^J, U_h^K), \\
U_2 &= (U_h^I, U_h^J, U_h^L)
\end{aligned} \tag{37}$$

are the vector of nodal values in E_1 and E_2 , respectively. Let N_i be the shape functions matrix; then restriction of u_h in each element reads

$$\begin{aligned}
u_{h|E_1} &= N_1 U_1^t, \\
u_{h|E_2} &= N_2 U_2^t, \\
u'_{h|E_1} &= N'_1 U_1^t, \\
u'_{h|E_2} &= N'_2 U_2^t,
\end{aligned} \tag{38}$$

where N'_i stands for the derivative according to x or y of N_i . At the common node I , the derivative of u_h , $u'_h(I)$, is not necessarily the same in both elements. This means that on a patch including a node I common to different elements the gradient of u_h , ∇u_h , cannot be calculated because of the jump on each part of the patch. Consequently ∇u_h is not a good approximation of ∇u across elements and stress and strain calculated using ∇u cannot be continuous across edges. How to define a unique ∇u_h at a node I common to different elements has been addressed by gradient recovery methods. The idea is to define a local operator G_h such that $G_h u_h(I)$ is unique through any patch and $|G_h u_h - \nabla u|$ has better approximation than $|\nabla u_h - \nabla u|$. Consequently convergence issues of these methods should be considered also. In this analysis we consider the 2D PPR gradient recovery methods which also guarantees a superconvergence property of $G_h u_h$ to ∇u independently of mesh size. The method is described as follows.

Let Z_i be a node where ∇u is to be determined. Let Z_i^j be the nodes of all triangles E_j having Z_i as common vertex. Suppose $u_{h|E_j} \in P_{k+1}$, the set of polynomials of order $k+1$; then the gradient recovery PPR operator consists in defining $p(x) \in P_{k+1}$ such that

$$\sum_{j=1}^n (p(x) - u_h)^2(Z_i^j) = \min_{q(x) \in P_{k+1}} \sum_{j=1}^n (q(x) - u_h)^2(Z_i^j) \tag{39}$$

$$G_h u_h(Z_i) = \nabla p(Z_i).$$

This value also depends on the sampling points chosen. In the 2D case it is proved (cf. [14]) that if $n \geq m = (k+2)(k+3)/2$ and if the sum of two adjacent angles in the mesh is not more than π , then $G_h u_h(Z_i)$ is unique for any Z_i . In this work the angle condition will be implemented in the triangularization. The number m of sampling nodes will be respected as follows:

$$G_h u_h(Z_i) = \nabla p(x_i, y_i) = \nabla \bar{p}(0, 0) \approx \nabla u(x_i, y_i). \quad (40)$$

For the 2D case, three types of nodes can be distinguished: internal nodes, boundary nodes at a corner, and boundary nodes out of a corner.

- (i) For the in-plane displacement u_α ($\alpha = 1, 2$), the existence and uniqueness solution are possible if $(u_1, u_2) \in (H^2(S))^2$; we fit linear polynomial using the same regular pattern:

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= (1, x, y)(a_0, a_1, a_3)^t \\ &= (1, \xi, \zeta)(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2)^t. \end{aligned} \quad (41)$$

We scale by a factor h with $x = h\xi$ and $y = h\zeta$, (ξ, ζ) with respect to the six derivative values at the barycentric center of each element on the patch. Now we define $e = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $\hat{a} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2) = (a_0, ha_1, ha_3)$, $A = (e, \vec{\xi}, \vec{\zeta})$, $H = \text{diag}(1, h, h)$.

Let u_α^i be the values of u_α at the nodal points Z_i^i $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; we denote $\bar{u} = (u_\alpha^i)_{i=1}^6$; we hereby determine \hat{a} so that $A\hat{a} = \bar{b}_h$.

Then, we obtain

$$P_1(x, y) = (1, x, y)H^{-1}(A^t A)^{-1}A^t \bar{b}_h; \quad (42)$$

notice that

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial P_1}{\partial x}(x, y) = (0, 1, 0)H^{-1}(A^t A)^{-1}A^t \bar{b}_h \\ &= [P_1 X_\alpha^1] \bar{b}_h \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, y) = (0, 0, 1)H^{-1}(A^t A)^{-1}A^t \bar{b}_h \\ &= [P_1 X_\alpha^2] \bar{b}_h. \end{aligned}$$

For the transversal displacement, u_3 , the existence and uniqueness of a gradient recovery solution are possible if $(u_3) \in H^2(S)$; we fit quadratic polynomial using the same regular pattern:

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= (1, x, y, x^2, xy, y^2)(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)^t \\ &= (1, \xi, \zeta, \xi^2, \xi\zeta, \zeta^2)(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_5, \hat{a}_6)^t; \end{aligned} \quad (44)$$

then, we scale by a factor h with $x = h\xi$ and $y = h\zeta$, (ξ, ζ) with respect to the six derivative values at the coordinates nodes of each element on the patch. Let $e = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$,

$\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_5, \hat{a}_6) = (a_1, ha_2, ha_3, h^2 a_4, h^2 a_5, h^2 a_6)$ be the vectors of the matrix $B = (e, \vec{\xi}, \vec{\zeta}, \vec{\xi}^2, \vec{\xi}\vec{\zeta}, \vec{\zeta}^2)$ and consider the diagonal matrix $H_1 = \text{diag}(1, h, h, h^2, h^2, h^2)$ and also $\bar{b}_h = (u_{30}, u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{34}, u_{35}, u_{36})$ the approximation vector of u_3 in a nodal point Z_I . Then we fit $P_2(x, y) = (1, x, y, x^2, xy, y^2)H_1^{-1}(B^t B)^{-1}B^t \bar{b}_h$ and obtain the recovered gradient at the patch center point as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial P_2}{\partial x}(x, y) \\ &= (0, 1, 0, 2x, y, 0)H_1^{-1}(B^t B)^{-1}B^t \bar{b}_h \\ &= [P_2 X_3^1] \bar{b}_h \\ \frac{\partial u_3}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial P_2}{\partial y}(x, y) \\ &= (0, 0, 1, 0, x, 2y)H_1^{-1}(B^t B)^{-1}B^t \bar{b}_h \\ &= [P_2 X_3^2] \bar{b}_h \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}(x, y) \\ &= (0, 1, 0, 2, 0, 0)H_1^{-1}(B^t B)^{-1}B^t \bar{b}_h \\ &= [P_2 X_3^{11}] \bar{b}_h \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &= (0, 0, 0, 0, 1, 0)H_1^{-1}(B^t B)^{-1}B^t \bar{b}_h \\ &= [P_2 X_3^{12}] \bar{b}_h \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2}(x, y) \\ &= (0, 0, 0, 0, 0, 2)H_1^{-1}(B^t B)^{-1}B^t \bar{b}_h \\ &= [P_2 X_3^{22}] \bar{b}_h. \end{aligned} \quad (45)$$

With $G_h u_i$ given at each vertex by the same processes in (43) and (45), we are able to form a recovered gradient field by using the finite element basis functions. Recovering the gradient at a boundary vertex is more delicate. Using efficient strategy computational experiment indicated in [14], to recover the gradient at a vertex $z_I \in \partial S$, we look for the nearest layer of vertices around z_I that contain at least one internal vertex. Let this layer be the n th one and denote the internal vertices in this layer by z_1, z_2, \dots, z_m , where $m \geq 1$. The union of the sampling points used in recovering the gradient at z_1, z_2, \dots, z_m and the mesh nodes in the first n layers around z_I constitute the set of sampling point for recovering the gradient at z_I ; see [15].

3. Discretization of N-T Model

3.1. Finite Element Space. The continuous truncated variational equation (18) is defined in the space U_{ad} . In order to define a finite element space, we begin by recalling the following results. Let T_j be a triangle with nodes $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$, and $a_3 = (x_3, y_3)$. Let P_1 and P_2 be the sets of the first- and second-order polynomials with basis $\{1, x, y\}$ and $\{1, x, y, x^2, y^2, xy\}$, respectively, then $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ and $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 4\lambda_1\lambda_2, 4\lambda_1\lambda_3, 4\lambda_2\lambda_3\}$ also generate P_1 and P_2 where the barycentric basis functions of the triangle are defined by

$$\begin{aligned} \lambda_1(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} [(y_3 - y_2)(x_2 - x) - (x_3 - x_2)(y_2 - y)] \\ \lambda_2(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} [(y_1 - y_3)(x_3 - x) - (x_1 - x_3)(y_3 - y)] \\ \lambda_3(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} [(y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(y_1 - y)] \\ 2\Delta &= 2 \int_{T_j} dx dy = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \\ &= (x_3 - x_2)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_2). \end{aligned} \quad (46)$$

Let T_h be a triangularization of the midsurface of the shell and n_h the number of triangles. We denote by

$$\begin{aligned} X_h^1 &= \left\{ v_h \in C^0(\bar{S}), v_{h|T_j} \in P_1(T_j), \forall T_j, j = 1, \dots, n_h \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

the subspace of dimension N_h (which is the number of nodes) and

$$\begin{aligned} X_h^2 &= \left\{ v_h \in C^0(\bar{S}), v_{h|T_j} \in P_2(T_j), \forall T_j, j = 1, \dots, n_h, \nabla v_h = G_h v_h = \nabla P_2 \right\}; \end{aligned} \quad (48)$$

\bar{S} is the closure of S , the subspace of dimension N_h^2 which is the number of unisolvent points (nodes and edge mid points).

The space $U_{\text{ad}} = (H_0^1(S))^2 \times H_0^2(S)$ is approximated with the finite element space of dimension $3N = 2N_h + N_h^2$

$$\mathcal{U}_h = X_h^1 \times X_h^1 \times X_h^2. \quad (49)$$

3.2. The Discrete Scheme. Let T_h be a triangularization of the shell's midsurface S and $T_j \in T_h$ be a triangle of vertices

a_1, a_2, a_3 and midedges a_4, a_5, a_6 . Let $\eta^h \in \mathcal{U}_h$ as defined above. Then

$$\begin{aligned} \eta_\alpha^h(x, y)|_{T_j} &\in P_1, \quad \alpha = 1, 2; \quad 1 \leq j \leq n_h, \\ \eta_3^h(x, y)|_{T_j} &\in P_2, \quad 1 \leq j \leq n_h. \end{aligned} \quad (50)$$

By using the barycentric polynomials and writing $\lambda_4 = \lambda_1, 1 \leq l \leq 2; 1 \leq \alpha, \beta \leq 2$, and $1 \leq j \leq n_h$,

$$\begin{aligned} \eta_\alpha^h(x, y)|_{T_j} &= \sum_{k=1}^3 \eta_\alpha^h(a_k) \lambda_k(x, y) = \sum_{k=1}^3 \bar{\eta}_\alpha^k \lambda_k(x, y) \\ \eta_3^h(x, y)|_{T_j} &= \sum_{k=1}^3 \eta_3^h(a_k) \lambda_k(x, y) \\ &\quad + \sum_{k=4}^6 \eta_3^h(a_k) \lambda_{k-3}(x, y) \lambda_{k-2}(x, y) \\ &= \sum_{k=1}^3 \bar{\eta}_3^k \lambda_k(x, y) \\ &\quad + \sum_{k=4}^6 \bar{\eta}_3^k \lambda_{k-3}(x, y) \lambda_{k-2}(x, y) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\partial_\alpha \eta_l^h(x, y)|_{T_j} = \sum_{k=1}^3 \partial_\alpha \eta_3^h(a_k) \lambda_k(x, y),$$

$$\partial_\alpha \eta_l^h(a_k) = G_h(\eta_l^h)(a_k)$$

$$\partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(x, y)|_{T_j} = \sum_{k=1}^3 \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_k) \lambda_k(x, y),$$

$$\partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_k) = G_h(\partial_\alpha \eta_3^h)(a_k).$$

In the above formula, G_h is the gradient operator and $\bar{\eta}_3^4, \bar{\eta}_3^5$, and $\bar{\eta}_3^6$ are, respectively, the unknown values of η_3 in the midedges a_1a_2, a_1a_3 , and a_2a_3 . Let

(i) $[P_\nu I_\alpha^\beta] = [P_\nu X_\alpha^\beta]$ and $[P_2 I_\alpha^{\alpha\beta}] = [P_2 X_\alpha^{\alpha\beta}]$ the coefficient of the approximation of the gradient when the vertex is internal of the mesh,

(ii) $[P_\nu C_\alpha^\beta] = [P_\nu X_\alpha^\beta]$ and $[P_2 C_\alpha^{\alpha\beta}] = [P_2 X_\alpha^{\alpha\beta}]$ the coefficient of the approximation of the gradient when the vertex is in the boundary at the corner of the mesh,

(iii) $[P_\nu M_\alpha^\beta] = [P_\nu X_\alpha^\beta]$ and $[P_2 M_\alpha^{\alpha\beta}] = [P_2 X_\alpha^{\alpha\beta}]$ the coefficient of the approximation of the gradient when the vertex is in the boundary not at the corner of the mesh.

Exploiting the above, let us take linear element on uniform triangular mesh of a regular pattern; we hereby investigate the case of the element where all three nodes are internal of the mesh; the matrices deduced from the discretization of the gradient are given as follows:

$$\begin{aligned}
 [A_1] &= \begin{bmatrix} \lambda_1(x_1, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(x_1 + h, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3(x_1, y_1 - h) \end{bmatrix}^t \\
 [A_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1(x_2 - h, y_2) & 0 & 0 \\ \lambda_2(x_2, y_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3(x_2 - h, y_2 - h) & 0 \end{bmatrix}^t \\
 [A_3] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1(x_3, y_3 + h) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2(x_3 + h, y_3 + h) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3(x_3, y_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t.
 \end{aligned} \tag{52}$$

When we return to energy function with $m = 0, 1$, we have

$$\begin{aligned}
 A_m(\bar{u}, \bar{v}) &= \int_S (E_u^T C_g^m E_v) dS \\
 &= \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{k=1}^3 \int_{T_j} \left([E_{\bar{u}_k}^{T_j}]^t C_g^m [E_{\bar{v}_k}^{T_j}] \right) dx dy.
 \end{aligned} \tag{53}$$

Using (43), (45), and (51) in which all three nodes of the triangular element are internal, let $i = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta = 1, 2$ and we consider

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \lambda_i(x, y) \\
 \rho_k &= 4\lambda_{k-3}(x, y) \lambda_{k-2}(x, y), \quad k = 4, 5, 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_i^\alpha &= [P_1 I_i^\alpha] [A_1](:, i) + [P_1 I_i^\alpha] [A_2](:, i) \\
 &\quad + [P_1 I_i^\alpha] [A_3](:, i) \\
 \gamma_i^\alpha &= [P_2 I_3^\alpha] [A_1](:, i) + [P_2 I_3^\alpha] [A_2](:, i) \\
 &\quad + [P_2 I_3^\alpha] [A_3](:, i) \\
 \tau_i^{\alpha\beta} &= [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [A_1](:, i) + [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [A_2](:, i) \\
 &\quad + [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [A_3](:, i).
 \end{aligned} \tag{54}$$

Then the deformation vector can be written as $\{E_u^{T_j}\} = [B^{T_j}] \{d_u^{T_j}\}$ where

$$\begin{aligned}
 & [B^{T_j}]^t \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1^1 & \beta_2^1 & \beta_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1^1 & \beta_2^1 & \beta_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \rho_4 & \rho_5 & \rho_6 & 0 \\ -2b_1^1 \alpha_1 & -2b_1^1 \alpha_2 & -2b_1^1 \alpha_3 & -2b_1^2 \alpha_1 & -2b_1^2 \alpha_2 & -2b_1^2 \alpha_3 & -\gamma_1^1 & -\gamma_2^1 & -\gamma_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2b_1^1 \beta_1^1 & -2b_1^1 \beta_2^1 & -2b_1^1 \beta_3^1 & -2b_1^2 \beta_1^1 & -2b_1^2 \beta_2^1 & -2b_1^2 \beta_3^1 & -\tau_1^{11} & -\tau_2^{11} & -\tau_3^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2b_1^1 \beta_1^2 & -2b_1^1 \beta_2^2 & -2b_1^1 \beta_3^2 & -2b_1^2 \beta_1^2 & -2b_1^2 \beta_2^2 & -2b_1^2 \beta_3^2 & -\tau_1^{12} & -\tau_2^{12} & -\tau_3^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2b_2^1 \alpha_1 & -2b_2^1 \alpha_2 & -2b_2^1 \alpha_3 & -2b_2^2 \alpha_1 & -2b_2^2 \alpha_2 & -2b_2^2 \alpha_3 & -\gamma_1^2 & -\gamma_2^2 & -\gamma_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2b_2^1 \beta_1^1 & -2b_2^1 \beta_2^1 & -2b_2^1 \beta_3^1 & -2b_2^2 \beta_1^1 & -2b_2^2 \beta_2^1 & -2b_2^2 \beta_3^1 & -\tau_1^{12} & -\tau_2^{12} & -\tau_3^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2b_2^1 \beta_1^2 & -2b_2^1 \beta_2^2 & -2b_2^1 \beta_3^2 & -2b_2^2 \beta_1^2 & -2b_2^2 \beta_2^2 & -2b_2^2 \beta_3^2 & -\tau_1^{22} & -\tau_2^{22} & -\tau_3^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b}^{-1} \alpha_1 & \bar{b}^{-1} \alpha_2 & \bar{b}^{-1} \alpha_3 & \bar{b}^{-1} \alpha_1 & \bar{b}^{-1} \alpha_2 & \bar{b}^{-1} \alpha_3 & b_1^1 \gamma_1^1 + b_1^2 \gamma_1^2 & b_1^1 \gamma_2^1 + b_1^2 \gamma_2^2 & b_1^1 \gamma_3^1 + b_1^2 \gamma_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b}^{-1} \beta_1^1 & \bar{b}^{-1} \beta_2^1 & \bar{b}^{-1} \beta_3^1 & \bar{b}^{-1} \beta_1^1 & \bar{b}^{-1} \beta_2^1 & \bar{b}^{-1} \beta_3^1 & b_1^1 \tau_1^{11} + b_1^2 \tau_1^{12} & b_1^1 \tau_2^{11} + b_1^2 \tau_2^{12} & b_1^1 \tau_3^{11} + b_1^2 \tau_3^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b}^{-1} \beta_1^2 & \bar{b}^{-1} \beta_2^2 & \bar{b}^{-1} \beta_3^2 & \bar{b}^{-1} \beta_1^2 & \bar{b}^{-1} \beta_2^2 & \bar{b}^{-1} \beta_3^2 & b_1^1 \tau_1^{12} + b_1^2 \tau_1^{22} & b_1^1 \tau_2^{12} + b_1^2 \tau_2^{22} & b_1^1 \tau_3^{12} + b_1^2 \tau_3^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b}^{-2} \alpha_1 & \bar{b}^{-2} \alpha_2 & \bar{b}^{-2} \alpha_3 & \bar{b}^{-2} \alpha_1 & \bar{b}^{-2} \alpha_2 & \bar{b}^{-2} \alpha_3 & b_2^1 \gamma_1^1 + b_2^2 \gamma_1^2 & b_2^1 \gamma_2^1 + b_2^2 \gamma_2^2 & b_2^1 \gamma_3^1 + b_2^2 \gamma_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b}^{-2} \beta_1^1 & \bar{b}^{-2} \beta_2^1 & \bar{b}^{-2} \beta_3^1 & \bar{b}^{-2} \beta_1^1 & \bar{b}^{-2} \beta_2^1 & \bar{b}^{-2} \beta_3^1 & b_2^1 \tau_1^{11} + b_2^2 \tau_1^{12} & b_2^1 \tau_2^{11} + b_2^2 \tau_2^{12} & b_2^1 \tau_3^{11} + b_2^2 \tau_3^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b}^{-2} \beta_1^2 & \bar{b}^{-2} \beta_2^2 & \bar{b}^{-2} \beta_3^2 & \bar{b}^{-2} \beta_1^2 & \bar{b}^{-2} \beta_2^2 & \bar{b}^{-2} \beta_3^2 & b_2^1 \tau_1^{12} + b_2^2 \tau_1^{22} & b_2^1 \tau_2^{12} + b_2^2 \tau_2^{22} & b_2^1 \tau_3^{12} + b_2^2 \tau_3^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{55}$$

$$\{d_u^{T_j}\} = [\bar{u}_1^{j1}, \bar{u}_1^{j2}, \bar{u}_1^{j3}, \bar{u}_2^{j1}, \bar{u}_2^{j2}, \bar{u}_2^{j3}, \bar{u}_3^{j1}, \bar{u}_3^{j2}, \bar{u}_3^{j3}, \bar{u}_3^{j4}, \bar{u}_3^{j5}, \bar{u}_3^{j6}]^t. \tag{56}$$

3.3. *Stiffness Matrix.* Using local element, stiffness matrix can be expressed as follows:

$$[K_0^j] = \int_{T_j} \left([B^{T_j}]^t C_g^0 [B^{T_j}] \right) dx dy; \quad 1 \leq j \leq N_h \quad (57)$$

$$[K_1^j] = \int_{T_j} \left([B^{T_j}]^t C_g^1 [B^{T_j}] \right) dx dy; \quad 1 \leq j \leq N_h,$$

where

$$\begin{aligned} C_g^0 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (1-\nu) ([D_e]_\beta^\alpha)^t ([D_e]_\alpha^\beta) \\ &+ \frac{Eh}{1-\nu^2} \gamma ([D_e]_\alpha^\alpha)^t ([D_e]_\lambda^\lambda) \\ &+ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) ([D_k]_\beta^\alpha)^t ([D_k]_\alpha^\beta) \\ &+ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \gamma ([D_k]_\alpha^\alpha)^t ([D_k]_\lambda^\lambda) \\ C_g^1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (1-\nu) ([D_e]_\beta^\alpha)^t ([D_e]_\alpha^\beta) \\ &+ \frac{Eh}{1-\nu^2} \gamma ([D_e]_\alpha^\alpha)^t ([D_e]_\lambda^\lambda) \\ &+ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) ([D_k]_\beta^\alpha)^t ([D_k]_\alpha^\beta) \\ &+ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \gamma ([D_k]_\alpha^\alpha)^t ([D_k]_\lambda^\lambda) \\ &+ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) ([D_Q]_\beta^\alpha)^t ([D_e]_\alpha^\beta) \\ &+ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \gamma ([D_Q]_\alpha^\alpha)^t ([D_k]_\lambda^\lambda) \\ &+ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) ([D_e]_\beta^\alpha)^t ([D_Q]_\alpha^\beta) \\ &+ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \gamma ([D_e]_\alpha^\alpha)^t ([D_Q]_\lambda^\lambda) \\ &+ \frac{Eh^5}{80(1-\nu^2)} (1-\nu) ([D_Q]_\beta^\alpha)^t ([D_Q]_\alpha^\beta) \\ &+ \frac{Eh^5}{80(1-\nu^2)} \gamma ([D_Q]_\alpha^\alpha)^t ([D_Q]_\lambda^\lambda) \end{aligned} \quad (58)$$

is the generalized 19×19 behavior matrix.

Let $F_0(x, y) = ([B^{T_j}]^t C_g^0 [B^{T_j}])$ and $F_1(x, y) = ([B^{T_j}]^t C_g^1 [B^{T_j}])$; then we have

$$\begin{aligned} [K_0^j] &= \int_{T_j} F_0(x, y) dx dy; \quad 1 \leq j \leq N_h \\ &= \frac{1}{3} F_0 \left(\frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{6} x_2 + \frac{1}{6} x_3, \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{6} y_2 + \frac{1}{6} y_3 \right) \\ &+ \frac{1}{3} F_0 \left(\frac{1}{6} x_1 + \frac{2}{3} x_2 + \frac{1}{6} x_3, \frac{1}{6} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{1}{6} y_3 \right) \\ &+ \frac{1}{3} F_0 \left(\frac{1}{6} x_1 + \frac{1}{6} x_2 + \frac{2}{3} x_3, \frac{1}{6} y_1 + \frac{1}{6} y_2 + \frac{2}{3} y_3 \right) \\ [K_1^j] &= \int_{T_j} F_1(x, y) dx dy; \quad 1 \leq j \leq N_h \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} F_1 \left(\frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{6} x_2 + \frac{1}{6} x_3, \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{6} y_2 + \frac{1}{6} y_3 \right) \\ &+ \frac{1}{3} F_1 \left(\frac{1}{6} x_1 + \frac{2}{3} x_2 + \frac{1}{6} x_3, \frac{1}{6} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{1}{6} y_3 \right) \\ &+ \frac{1}{3} F_1 \left(\frac{1}{6} x_1 + \frac{1}{6} x_2 + \frac{2}{3} x_3, \frac{1}{6} y_1 + \frac{1}{6} y_2 + \frac{2}{3} y_3 \right). \end{aligned}$$

Using (18) the second member of the variational equation is written as follows:

$$\begin{aligned} L(\dot{v}) &= \sum_{j=1}^N \int_{T_j} \left\{ d_v^{T_j} \right\}^t [B^{T_j}]^t [P] |J|^{T_j} dS \\ &+ \oint_{\omega_1}^{\omega_2} \left\{ d_v^{T_j} \right\}^t [B^{T_j}]^t [G] |J_*|^{T_j} d\zeta \\ &= \sum_{j=1}^{n_h} \left\{ d_v^{T_j} \right\} [f^j], \end{aligned} \quad (60)$$

where $[f^j] = [F_1^{j1}, F_1^{j2}, F_1^{j3}, F_2^{j1}, F_2^{j2}, F_2^{j3}, F_3^{j1}, F_3^{j2}, F_3^{j3}, F_3^{j4}, F_3^{j5}, F_3^{j6}]^T$ and $\{d_v^{T_j}\}$ is defined as in (56); here $|J_*|$ is the determinant of the Jacobian which toggles between the linear element $d\zeta$ of curve $\phi(\gamma_1)$ to real element dy . These formulas take into account the load spread over the entire surface and average load at the edges.

4. Validation Tests of Our Finite Element

The aim of this study is to investigate the accuracy of N-T thick shells theory for linear elastic shell by using Spherical Shell Finite Element (SSFE). We lay our investigation on a well-known benchmark as hemisphere under diametrically opposite charges given in Figure 1 used to evaluate the performance of a shell element. The computed deformed limit surface of a quarter of the hemisphere is shown in Figure 2 plotted with the Matlab R2015a tools and the displacement convergence results are shown in Figure 3 and Table 1.

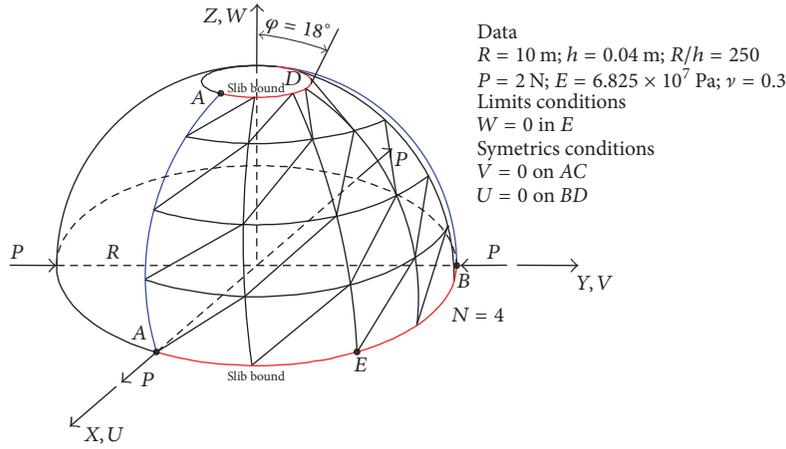


FIGURE 1: Hemisphere shell benchmark.

TABLE 1: Table of results of displacement at point A for the hemisphere.

Thickness = 0.04 and force = 0.5 N sol_ref = reference solution ($U_A * 10^3$)						
N	DKT12	DKT18	SKLFE	SFE3 (cmc)	SSFE	sol_ref
2	121	87	—	4.1	—	94
3	—	—	1.6	—	1.61	94
4	108	94	10.2	28	10.21	94
6	102	94	52.3	63	52.3	94
8	99	93	73.8	77	73.8	94
10	98	93	81.56	82	81.55	94
12	96	93	86.3	84	86.32	94
15			88.4	86	88.4	94
20			86.5	87	86.52	94

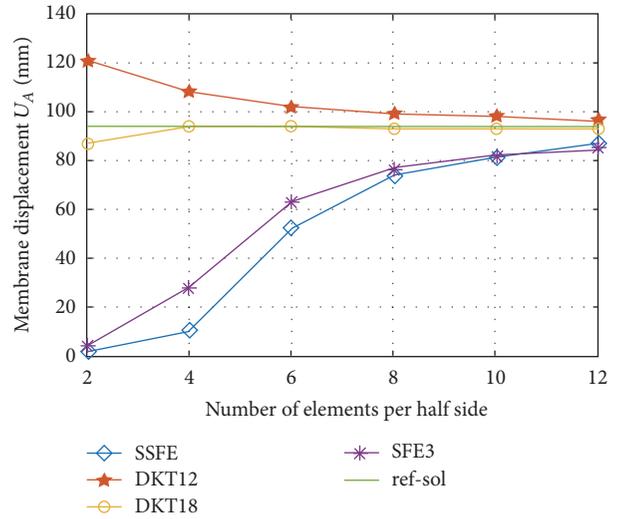


FIGURE 3: Convergence in the hemisphere.

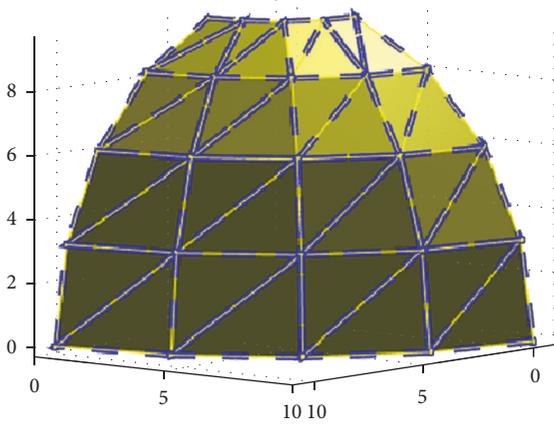


FIGURE 2: Deformed configuration of one quarter of the hemisphere.

We monitor the displacement in load point A presented in Figure 1.

Here, the case study is that of a thin shell of hemisphere subjected to four opposite diametrically concentrated loads at the base proposed by Macneal and Harder [20] which

is a standard test. This benchmark is usually used to verify the absence of membrane locking and good representation of rigid bodies motion. The hemisphere undergoes large rotations around the normal of the middle surface. Deformations of inextensible bending membrane are also important and this problem is therefore an excellent test to examine the ability of a shell element to represent the rigid and inextensible modes. The geometrical and mechanical characteristics are indicated for $h/R = 0.004$, the radius $R = 10 \text{ m}$, the thickness $h = 0.04 \text{ m}$, the angle subtended by the north pole of the hemisphere is $\theta = 18^\circ$, Young's modulus is $E = 6.825e + 7 \text{ Pa}$, Poisson's ratio is $\nu = 0.3$, and the diametrically opposite loads at points A and B are 0.5 N. The limits conditions $W = 0$ in the slab bound E and the symmetric conditions are given by $V = 0$ on the edge bound AC and $U = 0$ on the edge bound BD.

4.1. Convergence. A reference solution presented in [20] provides for displacement in the direction of the loads as follows: $U_A = V_B = 0.094 \text{ m}$. Only 1/4 of the hemisphere

TABLE 2: Deviation of both Reissner-Mindlin (R-M) and N-T thick shell according to the scaling of the ratio h/R .

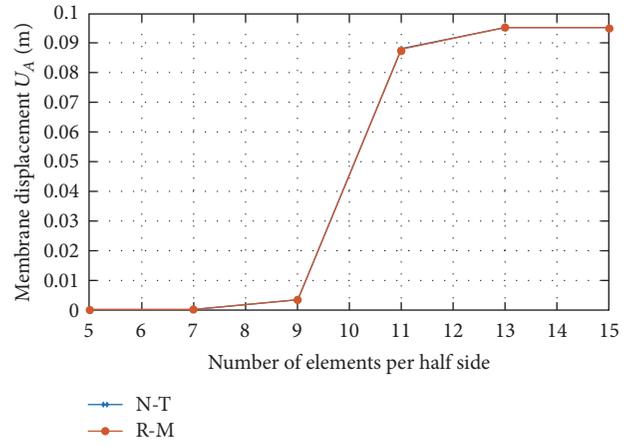
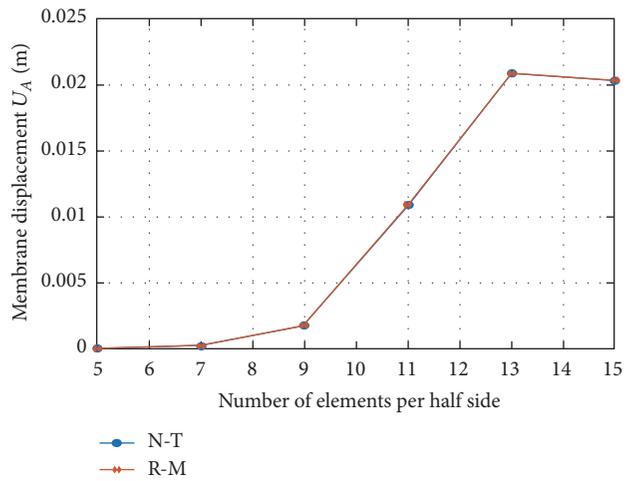
Ratio h/R	Theory	Mesh					
		5×5	7×7	9×9	11×11	13×13	15×15
0.006	R-M	$1.77 * 10^{-5}$	$3.91 * 10^{-4}$	0.0035	0.088	0.0954	0.0950
	N-T	$1.77 * 10^{-5}$	$3.91 * 10^{-4}$	0.0035	0.0877	0.0954	0.0950
0.099	R-M	$1.14 * 10^{-5}$	$2.64 * 10^{-4}$	0.0018	0.0109	0.0209	0.0204
	N-T	$1.14 * 10^{-5}$	$2.64 * 10^{-4}$	0.0018	0.0110	0.0209	0.0204
0.12	R-M	$2.91 * 10^{-6}$	$8.76 * 10^{-6}$	$4.52 * 10^{-3}$	$1.07 * 10^{-2}$	$2.76 * 10^{-2}$	$2.47 * 10^{-2}$
	N-T	$4.67 * 10^{-6}$	$9.72 * 10^{-6}$	$3.52 * 10^{-3}$	$9.90 * 10^{-3}$	$2.67 * 10^{-2}$	$2.47 * 10^{-2}$
0.15	R-M	$1.07 * 10^{-6}$	$1.20 * 10^{-5}$	$4.67 * 10^{-4}$	$5.02 * 10^{-3}$	$1.57 * 10^{-2}$	$1.39 * 10^{-2}$
	N-T	$3.03 * 10^{-6}$	$4.21 * 10^{-6}$	$1.79 * 10^{-4}$	$2.35 * 10^{-3}$	$1.36 * 10^{-2}$	$1.17 * 10^{-2}$
0.175	R-M	$1.23 * 10^{-6}$	$2.87 * 10^{-6}$	$3.20 * 10^{-4}$	$3.22 * 10^{-3}$	$9.41 * 10^{-3}$	$8.96 * 10^{-3}$
	N-T	$8.20 * 10^{-7}$	$1.02 * 10^{-6}$	$2.30 * 10^{-4}$	$3.41 * 10^{-4}$	$7.12 * 10^{-3}$	$6.89 * 10^{-3}$
0.2	R-M	$5.36 * 10^{-7}$	$3.51 * 10^{-6}$	$4.89 * 10^{-4}$	$2.89 * 10^{-3}$	$5.88 * 10^{-3}$	$5.52 * 10^{-3}$
	N-T	$4.01 * 10^{-7}$	$3.10 * 10^{-6}$	$3.71 * 10^{-4}$	$2.49 * 10^{-4}$	$5.57 * 10^{-3}$	$5.23 * 10^{-3}$

is discretized because of the symmetry of loads and the geometry. Both Kirchhoff-Love shell theory and N-T shell theory are computed using SSFE model and the respective results are analysed, compared with DKT12 and DKT18 proposed in [21] and SFE3 [22] then commented. Table 1 shows the displacement results at point A and Figure 3 perfectly describes their variation and the rate of convergence. The convergence properties of the method are clearly shown from Figure 3 and Table 1. Then SSFE converge as well as both the semifinite element (SFE) and Discrete Kirchhoff Triangle (DKT) elements for the membrane displacement at load point A.

4.2. Scaling and Deviation. Scaling of the ratio $2\chi = h/R$ given in Table 2 is proceeded on the range of the following values 0.006, 0.099, 0.12, 0.15, 0.175, and 0.2 of the spherical shell. Notice that the radius R is constant while the thickness varies with the ratio. We observe in Tables 1 and 2 and Figure 3 that, for the thickness ratio $0 < 2\chi < 0.099$, the membrane displacement in load point A is the same for both K-L and N-T models. When the ratio $2\chi = h/R$ is greater or equal to 0.099, the displacement computed for inextensible bending membrane from spherical equation of K-L and N-T is not the same. This means that, above $2\chi \approx 1/10$, both K-L and N-T approaches are different for all values of the thickness ratio.

We investigate now the deviation between K-L and N-T displacements in load point A. With the variation of thickness ratio $2\chi = 0.06, 0.099, 0.12, 0.15, 0.175$, and 0.2 , the results plotted in Table 2 and Figures 4–7 clearly show that the deviation of displacement is encountered at the specified values of 2χ above. This deviation increases with the number of meshes at the load point A. We also observe that the deviation increases with thickness ratio.

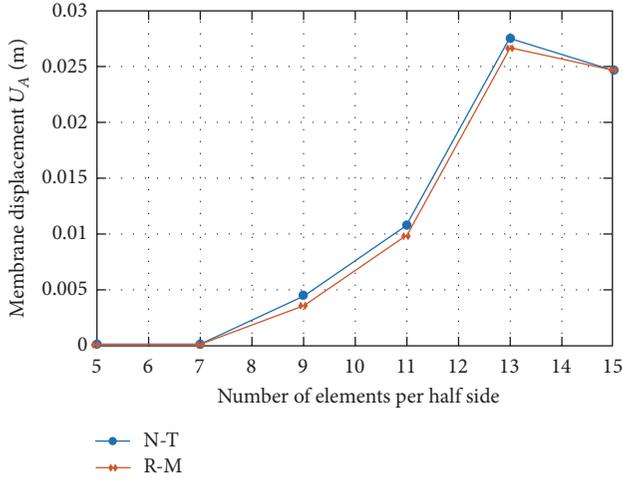
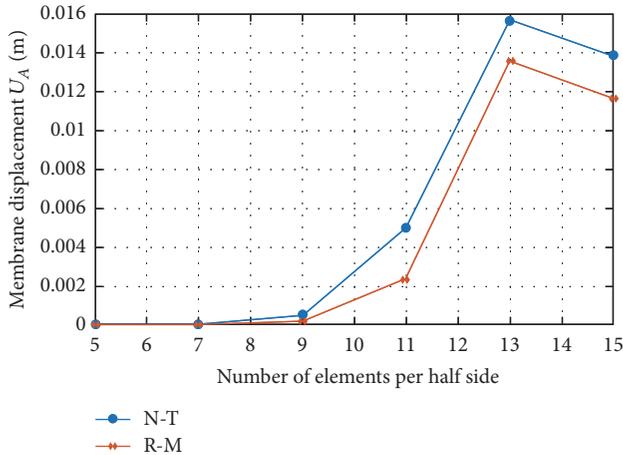
4.3. Impact of the Transverse Stresses. Surveys of various shear stresses in linear elastic thick shells can be found in the works of [3] where they are mathematically substantiated. We have obtained good convergence results for thin shells with the half side element $N = 12$ and a pressure in the load point $P_A = 0.53$ Pa for a spherical shell. For the thickness coordinate

FIGURE 4: Variation of membrane displacement U_A at A for the thickness ratio $2\chi = h/R = 0.006$.FIGURE 5: Variation of membrane displacement U_A at A for the thickness ratio $2\chi = h/R = 0.099$.

$z \in [-h/2, +h/2]$, where $h = 1.2$ m, the numerical results of the transverse shear stresses through the thickness are computed (see Table 3).

TABLE 3: Transverse shear stresses of a thick spherical shell under load point A convergence analysis.

z	-0.6	-0.466	-0.2	0.066	0.2	0.467	0.6
σ^{13} (Pa)	0	0.005	0.001	0.019	0.021	0.025	0.259
σ^{23} (Pa)	0	0.007	0.018	0.026	0.028	0.034	0.035
σ^{33} (Pa)	1.6×10^{-14}	-0.132	0.309	-0.417	-0.455	-0.514	-0.533


 FIGURE 6: Variation of membrane displacement U_A at A for the thickness ratio $2\chi = h/R = 0.12$.

 FIGURE 7: Variation of membrane displacement U_A at A for the thickness ratio $2\chi = h/R = 0.15$.

After shear stresses investigation, we observe that they satisfy tangential stress-free boundary conditions at bottom to top surfaces of the panel. These results show predicting ability of SSFE finite element based on N-T's model. It also appears that the shear stresses vary through the thickness as compared to 3D thick shell equations. We can also appreciate that transverse shear stresses σ^{13} and σ^{23} are not negligible in thick shells.

4.4. Discussion. C^0 finite element discretization of the first-order N-T model applied the PPR method to solve problems of gradient discontinuities across edges of triangular elements

during interpolation. The displacement is two-degree polynomial of the thickness ratio χ while the membrane strain tensor contains the change in the third fundamental form.

The convergence of SSFE has been clearly established and this element uses 12 degrees of freedom per triangular element which is robust and less greedy (in terms of memory) than DKT12, DKT18, and SFE that are based on the Kirchhoff-Love (thin shells) and Reissner-Mindlin (thick shells) approaches which neglect the third fundamental form in their shell kinematic equations [23]. The constitutive law through the strain tensor contains the change of third fundamental form $Q_{\alpha\beta}$ as shown in the tables; the thickness ratio χ impacts the behavior of the shell because of the significant energy contribution due to $Q_{\alpha\beta}$ as the ratio increases unlike the K-L classical model [3].

Recall that, in (17), we see that total deformation energy due to K-L and R-M models contains membrane deformation energy E_{ee} and bending deformation energy E_{kk} ; that is, $E^{R-M} = E_{ee} + E_{kk}$. Equation (18) shows that the total deformation energy due to N-T model contains additional terms: coupled membrane and Gaussian bending (E_{eQ}, E_{Qe}) and Gaussian deformation energy E_{QQ} . Then $E^{N-T} = E^{R-M} + E_{QQ} + E_{eQ} + E_{Qe}$.

Where $E_{ee} = E(h/R)\alpha_{ee}$, $E_{kk} = E(h/R)(h/R)^2\alpha_{kk}$, $E_{QQ} = 10^{-1}E(h/R)(h/R)^4\alpha_{QQ}$, and $E_{eQ} = E_{Qe} = 10^{-1}E(h/R)(h/R)^2\alpha_{eQ}$, which represents the portion of energy contribution, α_{ee} , α_{kk} , and α_{eQ} are constants which do not depend on h/R .

As we mentioned above, when the thickness ratio 2χ is greater than 0.098, this additional energy (E_{eQ}, E_{Qe}) influences global deformation energy and shows the difference between N-T and R-M models applied to the spherical thick shells.

The investigation of the variation of the thickness ratio h/R for certain values $0 < 2\chi < 0.099$ proves that the Kirchhoff-Love, Reissner-Mindlin, and N-T classical models have the same contribution of total deformation energy. The additional terms containing the change of the third fundamental form do not have here any influence. The energies E_{eQ} and E_{QQ} disappear in the global deformation energy when $2\chi < 0.1$ or $\chi^2 < 0.01$ because they are inversely proportional, respectively, to 10^4 and 10^8 . In this case $E^{N-T} = E^{R-M}$. But if the thickness ratio is $0.099 \leq h/R < 1$, displacement results encountered for both models are different because E_{eQ} and E_{QQ} do not disappear in the global deformation energy. The consequence is that they enhance global deformation energy and improve the rigidity of the shell structure. Moreover, N-T's model brings us real facilitation to determine the distribution of transverse shear stresses through the thickness.

5. Conclusion

The finite element SSFE using the PPR method for the spherical shell described in this paper for C^0 finite element triangularization has given accurate results and is skilled to design thicker shells. It has proved to be faster and uses less memory than other well-known methods used in the different benchmarks. The N-T model handles spherical thin and thick shell properly because it clearly shows how the change of the third fundamental form enhances the total deformation energy when the ratio χ becomes greater.

Transverse stresses which have been predicted by the 2D governing equations of N-T model were calculated numerically and correctly. Structural engineers can therefore design more accurately spherical thick shells.

Disclosure

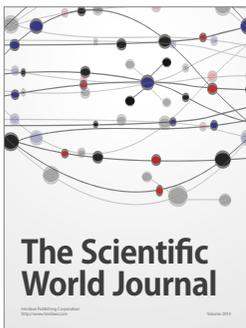
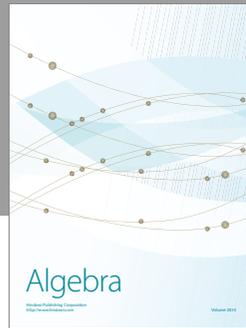
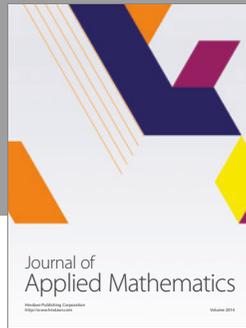
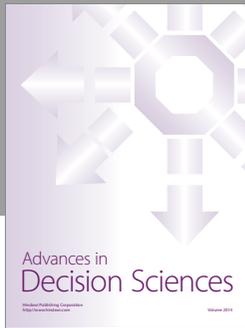
Achille Germain Feumo is the corresponding author, Robert Nzengwa is co-first author, and Joseph Nkongho Anyi is co-second author.

Conflicts of Interest

The authors declare that they have no conflicts of interest regarding this research article.

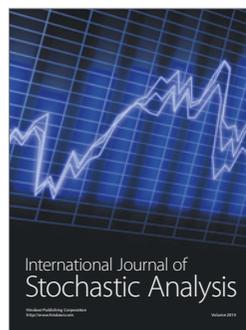
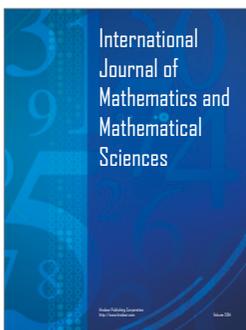
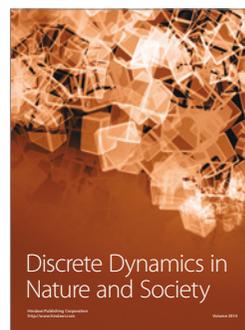
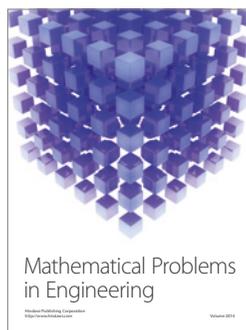
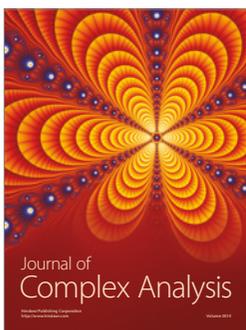
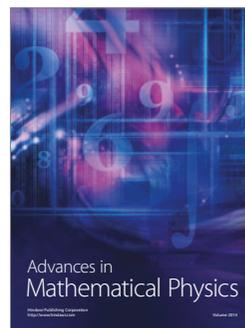
References

- [1] E. Reisner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, pp. A-69–A-77, 1945.
- [2] M. Bernadou and P. Mato Eiroa, "Approximation de Problèmes linéaires de coques minces par une méthode d'éléments finis de type DKT," Rapport de Recherche, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Sophia Antipolis, France, 1987.
- [3] R. Nzengwa and B. H. Tagne Simo, "A two-dimensional model for linear elastic thick shells," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, no. 34, pp. 5141–5176, 1999.
- [4] M. Sheikholeslami, "Numerical simulation of magnetic nanofluid natural convection in porous media," *Physics Letters A*, vol. 381, no. 5, pp. 494–503, 2017.
- [5] M. Sheikholeslami, P. Rana, and S. Soleimani, "Numerical study of MHD natural convection liquid metal flow and heat transfer in a wavy enclosure using CVFEM," *Heat Transfer Research*, vol. 48, no. 2, pp. 121–138, 2017.
- [6] M. Sheikholeslami and H. B. Rokni, "Numerical modeling of nanofluid natural convection in a semi annulus in existence of Lorentz force," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 317, pp. 419–430, 2017.
- [7] J. Nkongho Anyi, R. Nzengwa, J. Chills Amba, and C. V. Abbe Ngayihi, "Approximation of linear elastic shells by curved triangular finite elements based on elastic thick shells theory," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2016, Article ID 8936075, 12 pages, 2016.
- [8] M. Sheikholeslami, M. Gorji-Bandpy, and D. D. Ganji, "Investigation of nanofluid flow and heat transfer in presence of magnetic field using KKL model," *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 39, no. 6, pp. 5007–5016, 2014.
- [9] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, no. 7, pp. 1331–1364, 1992.
- [10] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: error estimates and adaptivity," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, no. 7, pp. 1365–1382, 1992.
- [11] N.-E. Wiberg and F. Abdulwahab, "Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, no. 16, pp. 2703–2724, 1993.
- [12] N.-E. Wiberg, F. Abdulwahab, and S. Ziukas, "Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, no. 20, pp. 3417–3440, 1994.
- [13] A. Naga and Z. Zhang, "The polynomial-preserving recovery for higher order finite element methods in 2D and 3D," *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. A Journal Bridging Mathematics and Sciences*, vol. 5, no. 3, pp. 769–798, 2005.
- [14] A. Naga and Z. Zhang, "A posteriori error estimates based on the polynomial preserving recovery," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 42, no. 4, pp. 1780–1800, 2004.
- [15] Z. Zhang and A. Naga, "A new finite element gradient recovery method: superconvergence property," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 26, no. 4, pp. 1192–1213, 2005.
- [16] Z. Zhang and J. Zhu, "Analysis of the superconvergent patch recovery technique and a posteriori error estimator in the finite element method. I," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 123, no. 1-4, pp. 173–187, 1995.
- [17] Z. Zhang, "Polynomial preserving recovery for anisotropic and irregular grids," *Journal of Computational Mathematics*, vol. 22, no. 2, pp. 331–340, 2004.
- [18] Z. Zhang, "Polynomial preserving gradient recovery and a posteriori estimate for bilinear element on irregular quadrilaterals," *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, vol. 1, no. 1, pp. 1–24, 2004.
- [19] Z. Zhang, "Recovery techniques in finite element methods," in *Adaptive Computations: Theory and Algorithms*, T. Tang and J. Xu, Eds., pp. 297–365, Science Press, Beijing, China, 2007.
- [20] R. H. Macneal and R. L. Harder, "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 1, no. 1, pp. 3–20, 1985.
- [21] Bernadou, "Methodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces. Edition Masson," Recherches en mathématiques Appliquées, Paris.
- [22] H. Laurent, *Etude en grande transformation d'une nouvelle famille d'éléments finis coque triangulaire à trois degrés de liberté par noeud. Application à la simulation numérique de l'emboutissage [Ph.D. thesis]*, Thèse présentée à l'Université de Maine, 1996.
- [23] E. Carrera, S. Brischetto, M. Cinefra, and M. Soave, "Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells," *Composites Part B: Engineering*, vol. 42, no. 2, pp. 123–133, 2011.



Hindawi

Submit your manuscripts at
<https://www.hindawi.com>



DÉDICACE

A mon feu père : FEUMO GERMAIN dont le rêve fut toujours de voir sa progéniture aller le plus loin possible dans les études.

A mes enfants :

- FEUMO NGNIPOGNI Emilie Fanelle
- FEUMO YANMEGNY Rasiane Cassandra
- FEUMO Phyl Bryan
- FEUMO KOUOKAM Noémie Firminity

Dans ma progéniture, puisse ce modeste travail susciter l'esprit d'émulation et la mène le plus loin possible!

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été élaborée au laboratoire de mathématiques appliquées (LMA) du département de mathématiques, Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I et sous la direction du Professeur Robert NZENGWA. Nous lui adressons nos remerciements et notre gratitude pour sa patience, sa rigueur scientifique et pour les sacrifices consentis pour diriger notre travail de recherche.

Nous remercions également le Ministère des Travaux Publics à travers la Direction de l'École Nationale Supérieure des Travaux Publics pour son autorisation de formation ainsi que pour son appui financier.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude au Professeur NKENG George ELAMBO Directeur de l'ENSTP et au Professeur Carmelo MAJORANA Doyen de la Faculté du génie Civil et Architecture de l'université de Padova en Italie pour leur encouragement et les aides multiformes qu'ils nous ont apportées, parmi lesquelles nos premiers pas de simulation numérique dans les laboratoires en Italie (Université de Padova). Dans le même ordre d'idées, nos remerciements s'adressent également au Professeur Gabriel NGUETSENG pour ses encouragements permanents.

Qu'il nous soit permis aussi de remercier les amis du département pour leurs disponibilités et leurs contributions intellectuelles à l'élaboration de ce travail ; nous pensons à CHENDJOU Gilbert Ph.D, MBANG Joseph Ph.D, MBEHOU Mohamed Ph.D, NGUEFACK Bertrand Ph.D.

Pendant l'élaboration du travail, j'ai bénéficié du soutien affectif permanent de ma compagne, le Professeur KOUOKAM MAGNE Estelle. Qu'elle trouve ici l'expression de notre profonde gratitude.

Nos remerciements sont aussi adressés à nos collègues de l'ENSTP, en l'occurrence MATCHEUBOU Alice Ph.D, Rita FANKAM MOTUBA Ph.D et KUISSEU Sébastien pour leur soutien et l'expertise qu'ils ont apportée à ce travail.

De peur d'en oublier en tentant de les nommer, que tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin, moralement et spirituellement pour ce travail, trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

RÉSUMÉ

La théorie de coques épaisses en est encore au stade embryonnaire. La plupart des modèles utilisés en sciences de l'ingénieur sont une adaptation heuristique de la théorie des coques minces. De ce fait, on ne connaît pas de modèles mathématiques de coques épaisses pourvus de toute la rigueur voulue au plan scientifique.

En 1999, NZENGWA et TAGNE [32] proposent un modèle statique rigoureusement déduit du modèle d'élasticité tridimensionnelle par une analyse limite de problèmes variationnels obtenus par "multiple scaling". La solution limite obtenue vérifie l'hypothèse de déformation plane, faisant apparaître clairement le changement de courbure de Gauss dont l'importance mécanique est reconnue en ingénierie. De plus, le modèle indique clairement comment calculer les contraintes de cisaillement transversal qui permettent de mieux dimensionner les coques épaisses.

En 2005, NZENGWA [33] propose un modèle dynamique utilisant l'hypothèse de la loi de comportement de la structure coque épaisse linéairement élastique. Dans toute la suite de la thèse, le vocable "Modèle N-T" renvoie à celui proposé dans [32], tandis que celui construit dans [33] sera désigné par Nzengwa. Notre premier travail a consisté à mettre au point une stratégie de benchmark des modèles N-T et Nzengwa en vue de leur validation et de les comparer aux estimateurs existants.

Nous avons commencé par écrire un code numérique de coque épaisse basé sur des éléments finis de classe C^0 , c'est-à-dire de régularité minimale, ce qui en soit est de nature à engendrer des difficultés majeures. Nous avons utilisé des plus récentes méthodes développées à savoir « Polynomial Preserving Recovery » déduites du « Gradient Recovery Method » que nous avons adapté aux modèles N-T. Ceci a permis de développer un nouvel élément fini appliqué à ce modèle que nous avons testé sur les coques sphériques et cylindriques. La stratégie a consisté à comparer les résultats aux théories des coques sphériques et cylindriques minces car le modèle N-T se présente comme une amélioration des modèles usuels de coques minces. Les résultats obtenus ont confirmé la justesse du code et la rapidité de la convergence ; car cette méthode pour le choix des éléments finis utilise les surfaces planes nécessitant beaucoup d'éléments et peu de degrés de liberté ; donc moins d'espace mémoire lors de la mise en oeuvre par ordinateur. Aussi une analyse numérique du modèle a conduit à mieux cerner la limite entre ce modèle N-T et ceux existants tels que Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin. Bien plus, par la même méthode, nous avons validé le modèle statique de Nzengwa en développant un élément fini de coques épaisses linéairement élastiques sur une coque sphérique creuse sous pression interne pour laquelle

une solution analytique existe. En maintenant le rayon de la coque R constant et en faisant varier son épaisseur h , nous avons pu apprécier la quasi-coïncidence et l'écart entre l'approximation numérique et les résultats analytiques en fonction du ratio $2\chi = h/R$. Bien plus, nous avons apprécié l'impact de la fonction « stretching » qui permet d'obtenir un résultat presque identique au résultat analytique pour les ratios variant de 0.06 jusqu'à 0.75 au delà duquel les écarts dépassent 1%. Ceci représente un gain énorme sur le coût de calcul.

Mots-clé : Coques épaisses, Nzengwa-Tagne(N-T), Reconstruction du gradient, Polynôme Préservant la Reconstruction du gradient(PPR), Kirchhoff-Love(K-L), Reissner-Mindlin(R-M), Approximation

ABSTRACT

The mathematical theory of thick shells has not been properly developed. Most of the models used or applied in engineering are heuristic adaptation of theory of thin shells. As a consequence, mathematical studies of thick shells are based of the models that need to be improved. The 1999 work of NZENGWA and TAGNE [32] proposed a static model rigorously deduced from a three-dimensional elasticity models of by a limit analysis of variational problems obtained by “ multiple scaling”. The obtained limit solution, satisfies the hypothesis of plane deformation ; with exhibiting of change of the Gauss curvature whose mechanical importance is well known in engineering. Moreover, this model clearly indicates how to compute transverse shear stresses which permits a better disign with thick shells.

Also in 2005, NZENGWA [33] proposed an additional study of an evolution model which took into account the variation of transversal strains within the thickness, that is to say using the hypothesis of the 3D constitutive law of elastic thick shell structure. In the sequel, the terms “ model of N-T” replaced that proposed in [32]; meanwhile that proposed in [33] would be designated by Nzengwa. Our first task is to put in place a benchmark strategy of N-T and Nzengwa models in view of their validation and their comparison with existing results for thin shells.

We started by formulating a laborious numerical code of thick shells based on the C^0 finite element ; means minimal regularity that relate the numerous difficulties. We used the most recent method developed, that is : “Polynomial Preserving Recovery” (PPR) stemming from Gradient Recovery Method which we adapted to the N-T model. This permitted us to develop a new finite element applied to this model which we tested on the spherical and cylindrical thin and thick shells. The strategy consisted in comparing the results to the benchmark of spherical and cylindrical thin shells highly recommended by numerical experts because the N-T model looks like an improvement of the normal thin shells models. The obtained results confirmed the accuracy of the code. Moreover this method converges rapidly and is memory less greedy. In addition, a numerical analysis of the model leads to a better understanding of the limit between this N-T model and the existing ones such as Kirchhoff-Love and Reissner-Mindlin.

By the same method, we validated the Nzengwa static model by developing a C^0 finite element of linear elastic thick shells on a hollow spherical shell under internal pressure for which an analytical solution exists. By maintaining the radius of the shell R constant and letting the thickness h vary, it was possible to notice the quasi-coincidence between

numerical and analytical results depending on the ratio $2\chi = h/R$. Also, the impact of the “stretching” could be observed allowing us to obtain the result which is almost identical to the analytical solution when the ratio ranges from 0.06 to 0.75. This represents an important benefit from computational cost viewpoint.

Key-words :Thick shell, Nzengwa-Tagne (N-T) model, Gradient recovery, Polynomial Preserving Recovery(PPR), Kirchhoff-Love(K-L) model, Reissner-Mindlin (R-M) model, Approximation

Table des matières

0.1	PROBLÉMATIQUE	2
0.2	CONTEXTE SCIENTIFIQUE	2
0.3	Hypothèse	8
0.4	Plan de la Thèse	9

I APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE COQUES ÉPAISSES LINÉAIREMENT ÉLASTIQUES SOUS LES HYPOTHÈSES DE KIRCHHOFF-LOVE **11**

1	OUTILS ET MÉTHODES DE MODÉLISATION DES COQUES MINCES ET ÉPAISSES	14
1.1	OUTILS ET GÉNÉRALITÉS SUR LA THÉORIE DE COQUE	14
1.1.1	Géométrie différentielle d'une surface	14
1.1.1.1	Base du plan tangent à la surface	15
1.1.1.2	Tenseur métrique de surface	15
1.1.1.3	Base duale	15
1.1.1.4	Tenseur de courbure de la surface	16
1.1.2	Base de la coque	16
1.1.2.1	Base de la coque	17
1.1.2.2	Tenseur métrique de la coque	18
1.2	TENSEURS DE DÉFORMATION	18
1.2.1	Dérivation sur la surface	19
1.2.2	Forme généralisée des tenseurs de déformation de surface	20
1.2.3	Dérivation covariante dans l'espace 3D	22
1.2.4	Relation entre tenseurs de surface et tenseurs d'espace	23
1.2.4.1	Cas du symbole de Christoffel	23
1.2.4.2	Cas des vecteurs	23
1.2.4.3	Cas des dérivées 3D et 2D	24
1.3	GÉNÉRALITÉS SUR LES MODÈLES DE COQUES	24
1.3.1	Théorie de coques minces	25
1.3.2	Théorie de coques épaisses	26
1.3.2.1	Hypothèse Reissner-Mindlin (R-M)	26

1.3.2.2	Hypothèse Nzenywa-Tagne Simo (N-T)	27
1.3.3	Formulation variationnelle du modèle N-T	30
1.3.3.1	Fonctionnelle d'énergie	31
1.3.3.2	Contraintes membranaires et transversales	33
2	DISCRÉTISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DU PROBLÈME TRON-	
	QUÉ	38
2.1	Méthode de reconstruction du gradient par la technique du PPR	40
2.2	Espace d'interpolation	45
2.3	Schéma numérique du problème variationnel tronqué	45
2.4	Convergence du schéma numérique	47
2.5	Discrétisation des gradients par la méthode PPR	48
2.6	Matrice de rigidité élémentaire	58
3	VALIDATION NUMÉRIQUE DES ÉLÉMENTS DE COQUES ASSO-	
	CIÉS AU MODÈLE N-T	64
3.1	Hémisphère sous charges diamétralement opposées	65
3.1.1	<i>Convergence</i>	67
3.1.2	<i>Ecart et déviation de l'hémisphère</i>	68
3.2	Cylindre pincé avec diaphragme	70
3.2.1	Convergence Numérique	71
3.2.2	Écart et déviation du cylindre pincé avec diaphragme	73
3.3	Impact des contraintes transversales	74
3.3.1	<i>Discussion</i>	75
II APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE MODÈLE		
STATIQUE DE COQUES ÉPAISSES LINÉAIREMENT ÉLAS-		
TIQUES AVEC ÉFFETS DE CISAILLEMENT TRANSVERSE		
78		
4	DISCRÉTISATION DU MODÈLE STATIQUE DE COQUES ÉPAISSES	
	AVEC VARIATION DES CONTRAINTES TRANSVERSALES	80
4.1	THÉORIE DES COQUES DE NZENGWA ET SA FORMULATION VA-	
	RIATIONNELLE	81
4.1.1	Théorie des coques de Nzenywa	81
4.1.2	Formulation Variationnelle du problème modèle en déplacement de	
	traction	84
4.2	DISCRÉTISATION DU MODÈLE DE NZENGWA PAR ÉLÉMENTS FI-	
	NIS DE CLASSE C^0	84
4.2.1	Espace d'interpolation	84
4.2.2	Schéma de discrétisation	85
4.2.3	convergence du schéma numérique ci-dessus	86

4.2.4	Formulation variationnelle numérique	87
4.3	Expression de la matrice de rigidité	89
5	VALIDATION DU MODÈLE DES COQUES NZENGWA	93
5.1	PROBLÈME DE SPHÈRE CREUSE SOUS PRESSION	93
5.1.1	Construction de la solution 3D	94
5.1.2	Convergence numérique	102
5.1.3	Discussion	102
5.1.4	Conclusion	103

Liste des tableaux

3.1	Table des resultats de déplacements au point A de l'hémisphère	67
3.2	Comparaison de deux modèles de coques sphériques épaisses par rapport au ratio $\frac{h}{R}$: Reissner-Mindlin et Nzenywa-Tagne	68
3.3	Table des résultats du cylindre pincé avec diaphragme au point C	72
3.4	Table des résultats du cylindre pincé avec diaphragme au point D	72
3.5	Comparaison de deux modèles de coques cylindriques épaisses par rapport au ratio $\frac{h}{R}$: Reissner-Mindlin et Nzenywa-Tagne	74
3.6	Analyse au point de convergence de l'hémisphère les contraintes transver- sales avec $\chi = 0.06$	75
5.1	Résultats des déplacements au point A où $z_A = 0$ alors $w(z) = 0$	99
5.2	Résultats des déplacements au point A où $z_A = \frac{-h}{4}$ alors $w(z) = -\frac{h}{4}$	100

Table des figures

1.1	Forme Géométrique typique d'une coque	17
1.2	Représentation de la coque sous l'hypothèse K-L	26
1.3	Représentation de la coque sous l'hypothèse de R-M	27
2.1	Maillage sur les éléments connectés à un noeud	39
2.2	Triangulation de la surface moyenne S	42
2.3	Stratégie de reconstruction du gradient d'un noeuds-bords	44
2.4	Élément où tous les sommets sont internes	49
2.5	Élément où le premier noeud est un noeud-coin le second et le troisième des noeuds-milieu	51
2.6	Élément où le premier noeud est un noeud-milieu, le second un noeud-coin et le troisième un noeud-interne	52
2.7	Élément où le premier noeud est un noeud-interne, le second un noeud- milieu et le troisième un noeud-interne	53
2.8	Élément où les premiers noeuds sont des noeuds-interne et le troisième un noeud-milieu	55
2.9	Élément où le premier noeud est un noeud-milieu, le second un noeud- interne et le troisième un noeud-milieu	56
2.10	Élément où les premiers noeuds sont des noeuds-milieu et le troisième un noeud-interne	57
2.11	Élément où le premier noeud est un noeud-milieu, le second un noeud- interne et le troisième un noeud-milieu	58
3.1	Benchmark de coque d'hémisphère	66
3.2	Configuration déformée d'un quart de l'hémisphère	66
3.3	Courbes de convergence de l'hémisphère	67
3.4	Variation du déplacement membranaire U_A en A pour la proportion $2\chi =$ $h/R = 0.006$	69
3.5	Variation du déplacement membranaire U_A en A pour la proportion $2\chi =$ $h/R = 0.006$	69
3.6	Variation du déplacement membranaire U_A en A pour la proportion $2\chi =$ $h/R = 0.12$	70
3.7	Variation du déplacement membranaire U_A en A pour la proportion $2\chi =$ $h/R = 0.15$	70

3.8	Benchmark de cylindre pincé avec diaphragme	71
3.9	Convergences du Cylindre pincé avec diaphragme au point chargé C . . .	73
3.10	Convergences du Cylindre pincé avec diaphragme au point chargé D	73
4.1	Elément où le premier noeud est noeud-milieu, le second un noeud-coin et le troisième noeud-interne	90
5.1	Sphère creuse sous pression	94
5.2	Maillage de la sphère creuse sous pression interne	98
5.3	Courbes de convergence de la sphère creuse au point $z_A = 0$ pour $\frac{h}{R} = 0.06$; soit $w(z) = 0$	100
5.4	Courbes de convergence de la sphère creuse au point $z_A = 0$ pour $\frac{h}{R} = 0.45$, soit $w(z) = 0$	101
5.5	Courbes de convergence de la sphère creuse au point $z_A = -\frac{h}{4}$ pour $\frac{h}{R} =$ 0.75 , soit $w(z) = -\frac{h}{4}$	101
5.6	Courbes de convergence de la sphère creuse point $z_A = 0$ pour $\frac{h}{R} = 0.75$, soit $w(z) = 0$	102

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La modélisation numérique des procédés de dimensionnement des structures coques minces ou épaisses et certains phénomènes mécaniques particuliers tels que les problèmes statiques ou dynamiques de solides coques épaisses en torsion, qui étaient, il y a encore une vingtaine d'années, négligés par le milieu industriel, suscitent désormais de nombreuses études. L'utilisation des logiciels de simulation numérique devient à l'heure actuelle de plus en plus fréquente. Ces logiciels présentent aujourd'hui un réel intérêt économique (gain de temps, gain sur les coûts de construction). Les renseignements apportés sont nombreux. Ils facilitent la prise de décision sur le choix des outils de dimensionnement.

Cependant, devant la complexité des phénomènes que l'on désire simuler, la mise en oeuvre de ces logiciels reste difficile. Ces logiciels doivent d'une part, être rapides et d'autre part, être capables de reproduire le plus fidèlement les phénomènes observés, l'objectif étant d'obtenir des résultats aussi proches que possible des valeurs expérimentales.

Dans la plupart des cas, cela passe tout d'abord, d'une part, par la mise sur pied des modèles mathématiques correctement établis qui donnent une bonne formulation du phénomène et, d'autre part, par l'analyse numérique de ces phénomènes. Le but étant de faciliter la maîtrise des calculs des paramètres qui caractérisent la coque tels que le déplacement, la contrainte ou la déformation en tout point de cette structure pour un dimensionnement optimal.

0.1 PROBLÉMATIQUE

L'ensemble des questions auxquelles cette étude tente d'apporter des éléments de réponse à l'analyse numérique des phénomènes, se rapporte aux coques épaisses, linéairement élastiques. L'objectif de ce travail est la mise en oeuvre pratique des modèles N-T et Nzenzwa des coques épaisses. En effet, la complexité de l'implémentation des calculs de coques épaisses rend très difficiles leur mise en oeuvre dans les chantiers de calculs de structures. L'objectif prioritaire est donc l'implantation de ces codes éléments finis, afin d'étudier en détail l'efficacité et l'estimation par analyse, de les comparer à celle d'estimateurs existants et commencer à les vulgariser pour des problèmes de taille industrielle. Car s'il s'avère que les modèles N-T et Nzenzwa sont meilleurs que les autres modèles en terme d'optimisation du dimensionnement de certaines structures, ces modèles N-T et Nzenzwa auront une contribution majeure dans l'analyse des structures coques.

Deux points nous ont particulièrement intéressé à savoir : la mise au point d'un nouvel élément fini de coques épaisses linéairement élastiques et le développement d'une technique benchmark d'analyse des modèles N-T et Nzenzwa ainsi que de ceux existant tels les modèles Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin.

0.2 CONTEXTE SCIENTIFIQUE

Une coque occupe dans l'espace un volume compris entre deux hypersurfaces courbes tel que la distance entre ces deux surfaces, appelée épaisseur, notée h , soit petite par

rapport aux autres dimensions géométriques.

Plusieurs théories classiques de coque sont développées en coques minces élastiques et sont basées sur les hypothèses de Kirchhoff-Love (ou théorie en première approximation) : (1) les lignes droites normales à la surface moyenne avant la déformation restent droites et normales à la surface moyenne après la déformation ; (2) les contraintes normales perpendiculaires à la surface moyenne peuvent être négligées dans les lois constitutives contrainte-déformation et (3) le déplacement transverse est indépendant de l'épaisseur de la coque. La première supposition conduit à la négligence des déformations dues au cisaillement transverse. Les fondements des théories de coque peuvent être trouvés dans les travaux de [31] et [7]-[8]. Ces théories sont connues comme les premières théories d'approximation de Love qui ont conduit suffisamment à de bons résultats. Cependant, l'application de ces théories aux coques épaisses ont conduit à de mauvais résultats surtout sur les problèmes de distorsion.

Parmi les premiers à avoir tenté de fournir une réponse au problème de coques, on peut citer, [20], [1] dans les années 1970. Ces modèles, nommés éléments finis tridimensionnels dégénérés, se basent sur des éléments iso-paramétriques volumiques n'ayant que deux nœuds suivant la direction de l'épaisseur. Il est possible de formuler les déformations dans l'épaisseur uniquement à partir des données géométriques de la surface moyenne de la coque. À cela est ajoutée une modification du principe des puissances virtuelles afin de négliger l'énergie engendrée par la déformation normale et transversale. Cette modification impose, en particulier, l'utilisation d'une relation de comportement matériau prenant en compte l'hypothèse des contraintes planes $\sigma^{i3} = 0$. La qualité principale de cette modélisation, outre son aspect volumique, est qu'elle s'appuie seulement sur des degrés de liberté de déplacement. Aucun degré de liberté de rotation n'étant introduit, le passage de l'analyse linéaire à non-linéaire et la connexion aux éléments volumiques 3D deviennent des opérations simples. Son inconvénient est la modification du principe de puissances virtuelles, ce qui revient à modifier la relation de comportement de matériau et qui crée des blocages en cisaillement transverse. Les travaux de [37] donnent une idée claire sur cette modélisation.

Afin de réduire les blocages en cisaillement transverse, l'évaluation du principe de puissances virtuelles est effectuée par une intégration numérique réduite 12 points de Gauss ; Pourtant, cette modélisation s'avère coûteuse en temps de calcul par rapport aux éléments coques car elle fait intervenir 9 degrés de liberté de déplacement le long d'une fibre épaisseur, alors que les éléments coques n'en font intervenir que 6.

L'hypothèse de Kirchhoff-Love (en abrégé K.L.) suppose que les déformations transverses restent faibles. Cette hypothèse est plus particulièrement adaptée pour les matériaux homogènes avec une épaisseur faible. Elle peut être également appliquée aux matériaux inhomogènes (exemple : matériaux sandwichs) avec des conditions aux limites du type bords bloqués. Par contre, l'hypothèse de K.L est moins bien vérifiée pour les plaques épaisses et donnent des résultats insuffisants pour la modélisation des sandwichs d'épaisseur importante avec des conditions aux limites de type libre.

Les hypothèses cinématiques de Reissner-Mindlin ou hypothèse des sections droites

qui consiste à supposer qu'une droite normale à la surface moyenne de la coque ne reste pas droite au cours de la transformation, apporte alors des résultats plus intéressants car, par définition avec cette hypothèse, le cisaillement transverse (en abrégé C.T.) est pris en compte. Cette droite subit donc seulement une rotation sans élongation et sa cinématique est décrite par $\vec{U}_Q = \vec{U}_P + z\vec{\beta}$; où $\vec{\beta}$ est un vecteur de rotation de la fibre droite, P_o représente la projection d'un point Q_o sur la surface moyenne de la configuration initiale, P représente la projection du point Q sur la surface moyenne de la configuration déformée et z est la distance du point Q_o par rapport à la surface moyenne. Donc, le déplacement d'un point quelconque de la coque est identifié par le déplacement de sa projection sur la surface moyenne et par la rotation de la fibre droite associée à ce point. Les modélisations de coques basées sur cette hypothèse sont nommées « Mixte » car elles possèdent non seulement des inconnues en déplacement, mais aussi des inconnues en rotation à chaque nœud. Pour tenter de surmonter les difficultés liées au blocage en cisaillement transverse, [3], [15] ont travaillé sur des techniques nommées des fonctions « bulle » qui montrent que l'approximation de l'élément coque triangulaire à 3 nœuds peut être enrichie en introduisant une variable α . En se basant sur cette technique, une famille d'éléments finis de plaque ou coque a vu le jour :

L'élément de [38] basé sur un modèle mixte général dans lequel l'approche des variables cinématiques est associée à un ensemble de fonctions « bulle » indépendantes exprimées en fonction des paramètres généralisés que les auteurs éliminent par condensation statique au niveau local. L'élément « 4-node bubble » est défini par une interpolation bilinéaire des variables cinématiques w, β_x, β_y et par une approximation cubique des fonctions « bulle » internes. Il y a 29 paramètres, au total, à éliminer par condensation statique, ce qui est élevé pour un élément de plaque.

La famille d'éléments mixtes-hybrides de [46] : l'élément quadrilatéral HMPL5 est associé à 3 fonctions « bulle » w, β_x, β_y représentées par le 5ème nœud interne. Les fonctions d'interpolation des variables cinématiques sont biquadratiques, celles des variables mécaniques comme moments {M} et efforts de cisaillement {T} étant linéaires. L'élément triangulaire HMPL3 est plus simple à formuler (w, β_x, β_y : linéaires, {M} : constant et {T} : linéaire).

L'élément T63B3 de [63] est un triangle à 6 nœuds avec fonctions « bulle » d'ordre 4 pour β_x, β_y . Il possède 12 variables internes (3 pour chacune des variables, T_x, T_y, β_x et β_y) qui sont éliminées au niveau local par condensation statique. Cet élément est considéré par plusieurs auteurs comme robuste. De bons résultats ont été obtenus pour les problèmes standards de plaques minces et épaisses.

[[35], [36] ont proposé une famille d'éléments DRM (Discrete Reissner-Mindlin) triangulaires et quadrilatéraux avec des degrés de liberté additionnels au milieu des côtés. Ces éléments, basés sur le modèle de déplacement avec déformations de CT indépendantes, généralisent ceux de Kirchhoff discrets DKT et DKQ de [3].

Pourtant, tous les éléments mixtes précédents ont un inconvénient majeur qui est le temps de calcul élevé causé par l'introduction des fonctions « bulle ». Ils nécessitent plus de points d'intégration numérique au calcul des matrices élémentaires. De plus, le

temps de calcul devient encore plus grand lorsque l'on traite des problèmes non-linéaires. L'augmentation des variables généralisées associées aux fonctions « bulle » est également un inconvénient, lié cette fois-ci aux opérations d'inversion de matrices lors du processus de condensation statique.

La famille d'élément SFE (Semi Finite Element) de [12] et autres ont été développées sous ces hypothèses et ont connu un succès remarquable dans le calcul numérique de coques.

Pour donner un contexte historique des développements des éléments finis de type solide-coques, nous pouvons commencer par des travaux de [56] qui ont proposé un élément iso-paramétrique hexaédrique à 8 nœuds et 3 degrés de liberté en déplacement par nœud. Cet élément est associé à une loi de comportement modifiée de façon à prendre en compte les contraintes planes. Malheureusement, le faible degré d'interpolation du modèle sera très sensible au phénomène de blocage. Quand les structures modélisées sont en flexion dominante ou quand le rapport épaisseur sur largeur tend vers zéro, le blocage en cisaillement transverse se manifeste de façon plus évidente. Ils ont introduit une méthode appelée « modes incompatibles ». Grâce à cette technique, le comportement de l'élément hexaédrique à 8 nœuds a été nettement amélioré et surtout dans les problèmes à flexion dominante. Mais, cet élément ne passait pas le patch test pour une forme géométrique autre que le parallélogramme. Une version modifiée de cet élément, qui permet de passer le patch test, a été ensuite introduite par [47]. Plus récemment, [48] ont montré que l'introduction des modes incompatibles pouvait être justifiée dans le contexte des méthodes mixtes de type « Assumed Strain ». Avec l'apparition de la méthode des « modes incompatibles », une solution alternative pour résoudre ces problèmes de verrouillage fût la méthode d'intégration réduite et sélective présentée dans les travaux de [64]. Elle consiste à utiliser dans le schéma d'intégration numérique moins de points pour l'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire que dans une intégration exacte. Cependant, l'intégration réduite conduit généralement à des éléments instables caractérisés par la présence de modes à énergie nulle (aussi connus sous le nom de modes cinématiques ou modes de hourglass). Pour éliminer les modes de hourglass causés par l'utilisation de l'intégration réduite, plusieurs approches ont été utilisées telles que l'intégration sélective réduite et la méthode appelée « projection gamma » .

Rappelons que le concept d'intégration réduite, a connu une forte popularité grâce principalement à son faible coût en termes de temps de calcul. Aussi, la stabilisation appliquée à de tels éléments sous-intégrés doit respecter cette exigence. Or, l'intégration sélective réduite est au moins aussi coûteuse que l'intégration exacte puisqu'elle intègre exactement la partie déviatorique de la déformation. Ainsi, les éléments stabilisés par la méthode de l'intégration sélective réduite perdent une grande partie de leur intérêt et de leur efficacité. En revanche, la méthode de projection permet à la fois, de stabiliser les éléments sous-intégrés et de préserver leur faible coût. Elle consiste à rajouter à la matrice de rigidité une raideur artificielle dont le multiplicateur reste indéterminé. Cette matrice de stabilisation est obtenue par une projection orthogonale (i.e., elle doit être orthogonale aux modes rigides, et doit fournir une énergie non nulle lorsque l'un des modes de

hourglass est activé). Le multiplicateur indéterminé doit être introduit par l'utilisateur du code et peut être soit de type viscosité artificielle, soit de type rigidité artificielle. Une approche alternative pour contrôler les modes de hourglass, basée sur le principe variationnel de Hu–Washizu, a été utilisée par [4] pour formuler deux éléments à intégration réduite quadrilatéral et hexaédrique. Leur élément quadrangle à quatre nœuds présente des blocages pour les matériaux incompressibles mais possède un bon comportement dans les problèmes de flexion dans le plan.

Au cours des années 1990, les travaux de [47], [48] ont introduit une nouvelle méthode nommée « Enhanced Assumed Strain » (EAS). Le principe de cette méthode consiste à enrichir le champ de déformations en rajoutant un champ de variables qui produit des modes de déformations supplémentaires. Ces champs de variables sont ensuite projetés sur un sous-espace approprié afin d'éviter les différents types de blocages. Cette méthode a été appliquée dans les modélisations de coques en 2D et 3D donnant des résultats très prometteurs. Pourtant, l'inconvénient majeur de ces éléments était l'inefficacité en temps de calcul. En fait, le nombre de variables rajoutées (ce nombre peut atteindre 30 ou plus dans certaines formulations 3D, rend difficile le traitement des matrices de rigidité), et l'utilisation des interpolations d'ordre 4 font augmenter significativement le temps de calcul total. Plusieurs efforts ont été poursuivis par la suite afin d'améliorer les performances des éléments solide-coques. Ces techniques utilisent généralement soit la méthode d'intégration réduite, avec stabilisation des modes de hourglass, soit l'intégration complète, avec élimination des sources de verrouillage.

Un modèle bidimensionnel de coques épaisses élastiques linéaires déduit d'un problème tridimensionnel de coques d'épaisseur h a été proposé par [32] dénommé modèle N-T qui est un modèle statique rigoureusement déduit du modèle d'élasticité tridimensionnelle par la méthode de « multiple scaling et analyse limite, faisant apparaître clairement le changement de courbure de Gauss. Le déplacement ici est un polynôme du second degré des coordonnées de l'épaisseur pendant que le tenseur de déformation qui est plan ($\epsilon_{i3}(u) = 0$), contient le tenseur du changement de la troisième forme fondamentale en plus de la première et de la seconde. Conséquence, l'expression du déplacement dans la coque est donnée par : $u = u_\alpha g^\alpha + u_3 g^3$, avec $u_\alpha(x, z) = \xi_\alpha(x) - z\theta_\alpha(x) + z^2\psi_\alpha(x)$, $u_3 = \xi_3(x)$ (où (g^1, g^2, g^3) est la base contravariante de la coque) ; ainsi la déformation plane est donnée par $\epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} - zk_{\alpha\beta} + z^2Q_{\alpha\beta}$. Cependant, les contraintes planes $\sigma^{\alpha\beta}$, dépendent des déformations planes et les contraintes transversales σ^{i3} sont déterminées par la résolution des équations différentielles rigoureusement établies.

Une discrétisation par éléments finis du modèle N-T par la méthode directe de Galerkin pose des problèmes de continuité ; en effet les angles de rotation en cisaillement $\theta_\alpha = \partial_\alpha \xi_3 + 2b_\alpha^\tau \xi_\tau$ et les angles de rotation de Gauss $\psi_\alpha = b_\rho^\tau b_\alpha^\rho \xi_\tau + b_\alpha^\tau \partial_\tau \xi_3$ ne garantissent pas la continuité C^0 aux frontières des éléments adjacents à cause de la discontinuité des gradients des fonctions de forme $\xi_i, i = 1, 2, 3$. Aussi ces gradients sont présents lors du calcul des déformations ; il est question ici de construire une approximation numérique par éléments finis permettant d'obtenir un déplacement u_h qui converge vers la solution analytique u .

Plusieurs auteurs dans [57] se sont penchés sur le problème de discrétisation du gradient permettant de garantir la C^0 élément fini c'est-à-dire permettant d'obtenir une continuité aux frontières de deux éléments adjacents : [56] a introduit la méthode de la moyenne pondérée pour calculer les contraintes et il a obtenu de bons résultats pour les éléments intérieurs et frontières. Presque au même moment, l'article [51] discute en profondeur sur cette technique de la moyenne pondérée basée sur l'équivalence des forces nodales et les contraintes élémentaires. Plus tard, le travail de [16] va développer une méthode de construction par les moindres carrées sur une surface rendant régulière les contraintes calculées et utilisant la méthode des éléments finis et qui vient globaliser la L^2 -projection. Cette méthode L^2 -projection fut développée plutôt par [14] dans sa thèse de doctorat ainsi que [34] qui ont discuté sur la L^2 -projection locale permettant de calculer les contraintes en considérant la régularité discrète et la construction par les moindres carrées aux points de gauss ; mais celle-ci sera limitée sur un seul élément et par conséquent, ils n'obtiendront pas la régularité des contraintes qui restent discontinues aux frontières des éléments adjacents.

20 ans après, [62] introduit la méthode du "reconstruction du gradient" ; il s'agit de partir de la solution analytique u d'une certaine équation différentielle et de sa solution approchée u_h , et construire un opérateur G_h qui minimise le gradient de u_h ; c'est à dire $\| \nabla u - G_h u_h \| \ll \| \nabla(u - u_h) \|$. Ce dernier tentera de résoudre ce problème en introduisant sa " Superconvergence Patch Recovery" (SPR) qui est une version adaptée des moindres carrées discrète performée aux jointures des éléments partageant les mêmes sommets. Cette méthode SPR a produit un champ de continuité de contraintes qui est superconvergent pour des maillages uniformes. Peu après, [53] ont incorporé le problème d'équilibre et conditions aux limites pour rehausser cette méthode SPR et discuté des stratégies d'amélioration de la solution élément fini. Tout récemment,[57] et certains de ses collègues ont proposé une stratégie alternative appelée " Polynomial Preserving Recovery" (PPR) pour reconstruire le gradient. Et l'analyse théorique de cette méthode PPR montre une meilleure superconvergence à travers toutes formes de maillage (uniforme ou non uniforme) et qui vient améliorer la méthode SPR ; en plus, des tests numériques indiquent une optimisation d'erreurs par rapport à la méthode SPR.

Par ailleurs, les plaques et plus généralement les coques minces représentent plus de 70 % des cas de calculs industriels [42, 44, 45], [5] et ces calculs sont validés par des benchmarks bien connus. Par contre, les coques épaisses n'ont pas eu les mêmes essais que les coques minces. Ce manque d'engouement est dû au nombre réduit de modèles et benchmarks pouvant permettre une évaluation des déformations transversales ainsi qu'une bonne analyse mathématique et numérique des problèmes de coques épaisses. En tout état de cause, l'épaississement de la coque ne permet plus de négliger les effets de déformations transversales précieux et qui concourent au dimensionnement de la coque. Or, les modélisations mixtes présentées ci-dessus basées sur l'approche en contrainte plane négligent la variation de l'épaisseur des éléments au cours des transformations. Cela devient un inconvénient quand la variation de l'épaisseur n'est pas négligeable (ex. la mise en forme des tôles, des buses, des dômes). Il est nécessaire, dans ces cas, d'utiliser des théories de coques plus élaborées pour tenir compte de la variation de l'épaisseur.

Les effets de cisaillement transverse et contraintes normales dans la coque furent considérés par [13], [23] et [43]. Les effets de déformation sous cisaillement transverse et dilatation thermique à travers l'épaisseur de coques cylindriques fut considérés par [11] et beaucoup d'autres chercheurs. Plusieurs méthodes théoriques et même numériques ont pu être développées pour tenter de résorber ce problème : on peut citer la théorie de la déformation en cisaillement au premier ordre à laquelle les déplacements à la surface moyenne s'accroissent comme des fonctions linéaires de l'épaisseur et l'allongement transversale est supposé constant à travers l'épaisseur (voir [41]). Il y a aussi la théorie de coques d'ordre supérieur basée sur le champ de déplacement à laquelle les déplacements sur la surface moyenne de la coque s'accroissent comme une fonction linéaire des coordonnées de l'épaisseur et le déplacement transversal s'accroît comme une fonction quadratique des coordonnées de l'épaisseur (voir [54, 55]).

En vue d'une large utilisation des matériaux composites en ingénierie, la prédiction sur des contraintes interlaminaires exactes dans les structures multicouches anisotropiques est essentiel pour leur dimensionnement. Ces théories sous les conditions de Reissner-Mindlin ont révélé leurs limites dans la détermination du champ de contraintes exact en 3D. Une telle déficience est due au fait que ces approches ne décrivent pas la forme en zig-zag du champ de déplacement dans la direction de l'épaisseur de la coque et ne comble pas les attentes de la continuité des contraintes interlaminaires aux intersurfaces à travers l'épaisseur de la coque. Cependant, il faut trouver une distribution de contraintes à travers l'épaisseur rendant les contraintes de cisaillement transverse continues. Plusieurs chercheurs se sont penchés sur cette question en conjecturant différents types de fonctions interpolant l'allongement de la coque surtout dans la direction de l'épaisseur ; on peut citer : [39, 40], [50], [49], [17, 18] et [25, 26, 27].

C'est en 2005 que R.Nzengwa inspiré du modèle N-T, va établir un modèle d'évolution de coques épaisses linéairement élastique avec la variation des déformations transversales [33]. C'est un modèle d'évolution qui prend en compte la variation des contraintes à travers l'épaisseur de la coque linéairement élastique et qui est déduite directement du problème tridimensionnel ayant une simularité avec le problème de torsion. Partant de la loi de comportement 3D, il va déduire une cinématique qui décrit de façon globale la théorie d'évolution des coques épaisses linéairement élastiques prenant en compte l'effet de cisaillement transverse.

0.3 Hypothèse

Notre travail dans cette thèse consistera à développer un élément fini pouvant approximer les modèles N-T et Nzengwa ; c'est à dire trouver une discrétisation de la solution du problème sus-cité par un élément fini de classe C^0 rendant continues les contraintes de cisaillement transverse et les déplacements entre deux éléments adjacents. Nous allons pour cela utiliser la méthode PPR énoncée plus haut pour interpoler localement cette solution.

0.4 Plan de la Thèse

Deux axes principaux ont composé le fil conducteur de cette thèse :

Le premier concerne le développement des outils et méthodes d'approximation par éléments finis de coques épaisses linéairement élastiques sous les hypothèses de Kirchhoff-Love. Ces éléments finis appelés "Spherical Shell Finite Element" (SSFE) et "Cylindrical Shell Finite Element" (CSFE) pour les coques respectives sphériques et cylindriques et qui sont issues du modèle N-T. Ce modèle éléments finis repose sur une technique originale basée sur la discrétisation du déplacement en utilisant la méthode de reconstruction du gradient par la technique du "Polynomial Preserving Recovery" (PPR) ceci pour pallier le problème de saut rencontré à la frontière de deux éléments adjacents. Ce modèle nous a permis d'obtenir trois degrés de liberté de déplacements par noeuds-sommets et un degré de liberté de déplacement aux noeuds-milieux, soit douze degrés de liberté sur un élément triangulaire droit (surfaces planes) de la coque. Fondée sur les hypothèses de déformation plane, cette méthode d'éléments finis assure la continuité C^0 .

Le deuxième point valide les éléments finis SSFE et CSFE de coques épaisses linéairement élastiques sous les hypothèses de la variation des effets de contraintes transversales. Autrement dit, nous avons utilisé simplement la loi de comportement 3D de la coque. Il s'agit de l'approximation par éléments finis de classe C^0 du modèle statique déduit du modèle dynamique de Nzenywa établi en 2005. Nous avons utilisé toujours la méthode PPR pour pallier le problème de discontinuité aux frontières des éléments adjacents pour la discrétisation des déplacements. Cette démarche nous a permis d'utiliser quatre degrés de liberté de déplacements par noeuds-sommets et un degré de liberté de déplacement aux noeuds-milieux ; soit quinze degrés de liberté sur un élément triangulaire droit de la coque qui garantit la continuité C^0 de notre élément fini.

Rappelons que les éléments ici sont constitués de triangles droits qui permettent de mailler des surfaces C^0 par des surfaces affines par morceaux. La surface réelle est approchée par raffinement du maillage.

Liste des abréviations

a, b, c	: Première, deuxième et troisième forme fondamentale de surface
$a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$: Composante covariantes et contravariantes du tenseur métrique de la surface
$b_{\alpha\beta}, b^{\alpha\beta}$: Composante covariante et contravariante du tenseur de courbure
b_{β}^{α}	: Composante mixte du tenseur de courbure
e	: Tenseur de déformation linéarisé membranaire de surface ou tenseur linéarisé du changement de la première forme fondamentale
k	: Tenseur de changement de courbure linéarisé de surface ou tenseur linéarisé du changement de la seconde forme fondamentale
Q	: Tenseur de changement de la courbure de Gauss linéarisé ou tenseur linéarisé du changement de la troisième forme fondamentale
$M_{\varepsilon}, \overline{M}_{\varepsilon}, \overline{\overline{M}}_{\varepsilon}$: Tenseur des moments fléchissant de contraintes
$N_{\varepsilon}, \overline{N}_{\varepsilon}, \overline{\overline{N}}_{\varepsilon}$: Tenseurs de contraintes membranaires
U, V, W	: Champ de déplacement tridimensionnel
$\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$: Champ de déplacement bidimensionnel
ξ, η	: Coordonnées d'un élément de référence triangulaire
x_1, x_2	: Coordonnées curvilignes de l'élément de coque
x, y, z	: Coordonnées cartésiennes de l'élément de coque
$\overline{\Gamma}$: Symboles de Christoffel sur la surface S
∇_{α}	: Dérivation covariante sur S
:	: Produit scalaire tensoriel
J	: Matrice Jacobienne
N_i	: Fonctions d'interpolation
E	: Vecteur de déformations généralisées
\overline{H}	: Courbure moyenne de S
\overline{K}	: Courbure totale ou courbure de GAUSS de S
Γ	: Symbole de Christoffel 3D
δ	: Symboles de Kronecker
$\det(a)$: Déterminant du tenseur métrique (a)

Première partie

APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS
FINIS DE COQUES ÉPAISSES
LINÉAIREMENT ÉLASTIQUES
SOUS LES HYPOTHÈSES DE
KIRCHHOFF-LOVE

INTRODUCTION

Dans le but de valider le modèle N-T, nous allons développer un nouvel élément fini pour les coques sphériques et cylindriques épaisses linéairement élastiques. Une discrétisation par un élément fini de classique C^0 de ce modèle N-T ne présente pas de bons comportements pour les contraintes à travers les éléments adjacents; cette défaillance est due à la discontinuité du gradient du déplacement présente dans la déformation. En utilisant la méthode PPR par une interpolation locale présentée plus haut, le code numérique de coque épaisse appliqué sur des benchmarks de coques minces a confirmé sa justesse et nous a conduit à observer la bonne et rapide convergence des résultats testés. Les résultats numériques sont comparés avec d'autres résultats obtenus dans la théorie de coques minces classique de Kirchhoff-Love. On étudiera le comportement de la coque en fonction du paramètre $\chi = \frac{h}{2R}$. Cela nous permettra de mieux évaluer en terme d'énergie, la contribution de la courbure de Gauss (tenseur du changement de la troisième forme fondamentale), dépendant de χ^2 .

Cette partie sera organisée en trois chapitres et une conclusion.

Le premier chapitre va présenter les différents outils nécessaires pour modéliser les coques minces et épaisses. Il s'agira d'un rappel des généralités sur la théorie de coque, les différents grands modèles, les différents champs de contraintes et déplacements par rapport à chaque modèle sans d'explicites développements et démonstrations. Le rappel des généralités sera suivi d'une brève description du modèle N-T ainsi que de sa formulation variationnelle. Il sera ensuite procédé à la résolution des équations différentielles des contraintes transversales établies dans ce modèle. La présentation et description de la méthode PPR achèvera ce chapitre.

Le deuxième chapitre est dévolue à la discrétisation du modèle N-T par la méthode des éléments finis de classe C^0 . Notre étude s'y attèlera à la construction de l'espace solution élément fini, à la présentation du schéma numérique déduit de la discrétisation par éléments finis des déplacements et aux contraintes transversales sur un maillage triangulaire régulier utilisant la méthode PPR.

Le troisième chapitre, quant à lui, se consacrera à la validation proprement dite du modèle N-T par des tests numériques de notre nouvel élément fini de coque épaisse sur les benchmarks de coques minces. C'est ainsi que cette validation se fera sur l'hémisphère sous charges diamétralement opposées et sur le cylindre pincé avec diaphragme. La validation de notre travail se fera par : l'étude de la convergence numérique de notre élément fini ; suivi de la comparaison de notre élément fini avec d'autres éléments ayant les mêmes lois

de comportement tels que DKT “ Discrete Kirchhoff Triangle” douze et dix-huit, SFE “ Semi Finite Element”. Enfin l’analyse limite du modèle N-T et d’autres modèles tels que Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin par la variation du ratio de l’épaisseur de la coque constituera la dernière étape cette partie.

Chapitre 1

OUTILS ET MÉTHODES DE MODÉLISATION DES COQUES MINCES ET ÉPAISSES

1.1 OUTILS ET GÉNÉRALITÉS SUR LA THÉORIE DE COQUE

Dans de nombreux problèmes mécaniques où il existe une direction particulière privilégiée, on cherche à simplifier le problème en le ramenant dans le plan bien qu'il puisse être étudié avec les éléments volumiques ; mais cette technique nécessite un nombre important de degrés de liberté. Afin de simplifier les modèles tridimensionnels, il est apparu intéressant de définir des modèles cinématiques particuliers, appelés coques tel que défini plus haut. Et à partir de cette particularité géométrique, on réussit à réduire le modèle tridimensionnel en bidimensionnel, dont la différence provient principalement de la cinématique simplifiée utilisée dans l'épaisseur. La description qui suit montre que la surface moyenne de la coque peut servir de référence pour le calcul des déformations dans l'épaisseur de la coque. Avec les relations de la géométrie différentielle, une description est faite, puis la présentation d'une coque 3D.

1.1.1 Géométrie différentielle d'une surface

Soit S une surface bornée et suffisamment régulière de \mathbb{R}^3 définie par une carte $\varphi : \bar{\omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(\bar{\omega}) = \bar{S}$; où ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 ; $\bar{\omega}$ et \bar{S} désignent respectivement les adhérences de ω et S . La surface S est caractérisée par le système de coordonnées $(x^1; x^2)$; ainsi pour un point M de la surface moyenne S on aura :

$$\varphi(M) = X^1(x^1, x^2)e_1 + X^2(x^1, x^2)e_2 + X^3(x^1, x^2)e_3$$

où e_i : vecteur de la base cartésienne orthonormée du repère global fixe et X^i les

composantes contravariantes.

1.1.1.1 Base du plan tangent à la surface

En un point M de la surface S , on définit deux vecteurs tangents aux courbes gauches définies par :

$$a_\alpha = \partial_\alpha \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}, \text{ avec } \alpha = 1, 2$$

Les vecteurs a_α sont linéairement indépendants et le vecteur unitaire normal en tout point M de la surface S est donné par :

$$N = a_3 = \frac{a_1 \wedge a_2}{\|a_1 \wedge a_2\|}$$

Et la base naturelle (M, a_i) , $i = 1, 2, 3$ définit un repère local en M de la surface.

1.1.1.2 Tenseur métrique de surface

La mesure de la déformation au cours de la transformation d'un solide s'effectue en suivant l'évolution d'un repérage des points du solide. Conformément aux descriptions Lagrangiennes et Eulériennes du mouvement, on effectue ce repérage par rapport au repère cartésien fixe. Pour notre part, le choix du paramétrage curviligne matériel défini en amont, nous permet de suivre directement la transformation du matériau à partir d'une grandeur caractéristique appelée **tenseur métrique** aussi appelée **tenseur de première forme fondamentale de S** . Il est défini par :

$$(a_{\alpha\beta}) = (a_\alpha \cdot a_\beta) = (a_\beta \cdot a_\alpha) = (a_{\beta\alpha}) = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & a_1 \cdot a_2 \\ a_2 \cdot a_1 & a_2 \cdot a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

On définit ainsi un élément de surface par $dS = \sqrt{a} dx^1 dx^2$. avec $a = \det(a_{\alpha\beta})$.

1.1.1.3 Base duale

Les vecteurs de base de la surface moyenne a_α n'étant en général pas orthogonaux et unitaires, on est amené à utiliser **la base duale** définie par : $a^\alpha \cdot a_\beta = \delta_\beta^\alpha$. Notons que $\delta_\beta^\alpha = 0$ si $\alpha \neq \beta$ et $\delta_\beta^\alpha = 1$ si $\alpha = \beta$. Ces vecteurs sont liés aux vecteurs de la base naturelle par le tenseur métrique défini précédemment ;

$$a^{\alpha\beta} a_{\beta\tau} = \delta_\tau^\alpha, \quad a^\alpha = a^{\alpha\beta} a_\beta \quad a^{\alpha\beta} = a^\alpha a^\beta \quad a_\alpha = a_{\alpha\beta} a^\beta \quad (1.2)$$

Remarquons que le tenseur métrique de surface permet de passer de la base covariante à la base contravariante et vice versa. Ainsi un tenseur de surface \bar{T} pourra aussi bien s'exprimer avec ses composantes covariantes ; contravariantes ou bien mixtes. On a :

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda} \bar{T}_{\rho\lambda} \quad \bar{T}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda} a_{\beta\rho} \bar{T}^{\lambda\rho} \quad \bar{T}_\alpha^\beta = a^{\beta\lambda} \bar{T}_{\alpha\lambda} \quad (1.3)$$

1.1.1.4 Tenseur de courbure de la surface

La courbure est un élément intéressant pour caractériser la déformation. Nous explicitons dans ce paragraphe plusieurs termes caractéristiques de la courbure qui nous serviront par la suite.

Par définition, sur la surface moyenne, on a :

$$a_3 \cdot a_\alpha = 0 \quad (1.4)$$

En différentiant, on constate que :

$$a_{3,\beta} \cdot a_\alpha + a_3 \cdot a_{\alpha,\beta} = 0$$

Soit :

$$a_3 \cdot a_{\alpha,\beta} = -a_\alpha \cdot a_{3,\beta}$$

On définit alors les quantités $b_{\alpha\beta}$ comme les composantes d'un tenseur plan symétrique, appelé **tenseur de courbure** aussi appelé **tenseur de seconde forme fondamentale de S** , par :

$$(b_{\alpha\beta}) = (a_{\alpha,\beta} \cdot a_3) = (a_{\beta,\alpha} \cdot a_3) = -(a_{3,\alpha} \cdot a_\beta) = -(a_{3,\beta} \cdot a_\alpha) \quad (1.5)$$

Les composantes mixtes de ce tenseur de courbure sont définies par :

$$b_\beta^\alpha = a^{\alpha\delta} b_{\delta\beta} \quad (1.6)$$

Soient R_1 et R_2 les valeurs propres du tenseur b (aussi appelés rayons principaux); nous pouvons donc définir les notions de **courbure moyenne H** et **courbure de GAUSS** :

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2} \text{tr}(b) = \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha \quad (1.7)$$

et

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \det(b_\alpha^\beta) \quad (1.8)$$

Le **tenseur de courbure de Gauss** ou **tenseur de troisième forme fondamentale**; qui représente le produit des courbures principales; et rarement évoqué dans la littérature est défini par :

$$c = (c_{\alpha\beta}) = (b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}) = (b_{\alpha\lambda} b_\beta^\lambda) = (c_{\beta\alpha}) \quad (1.9)$$

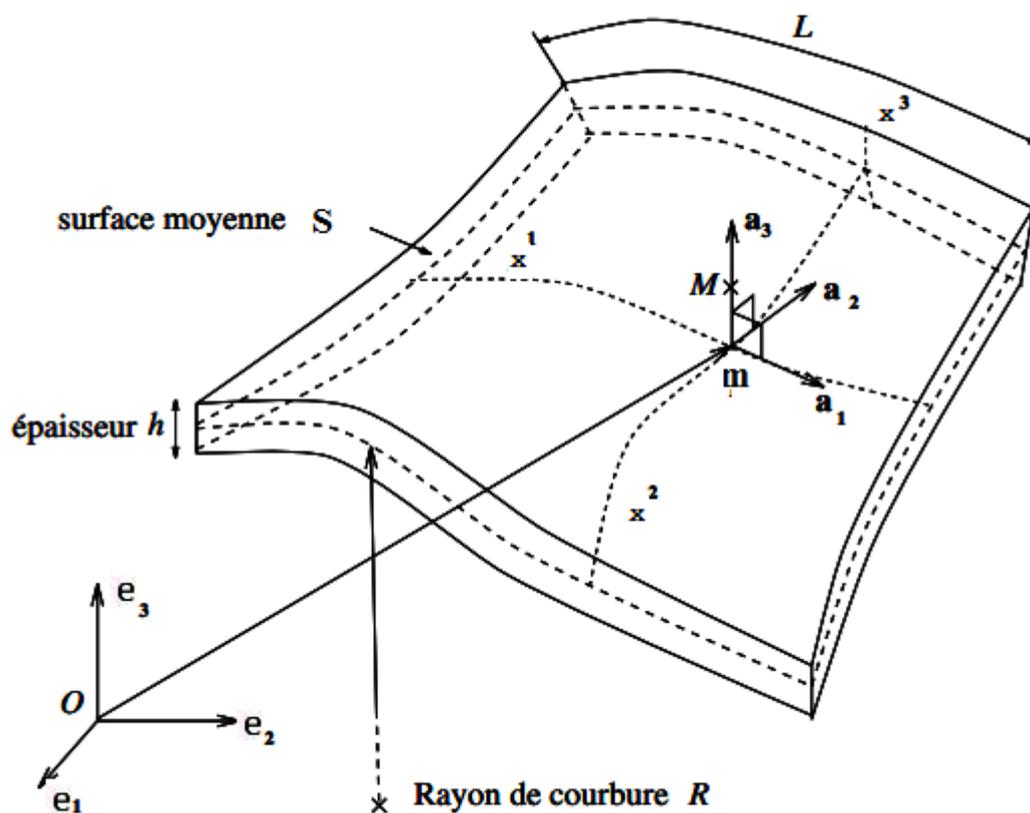
1.1.2 Base de la coque

Définition 1.1.1 Une coque Ω peut être définie comme un solide dont le volume V de frontière Γ est engendré par la surface moyenne S et sa normale $N = a_3$ qui s'étend d'une longueur $\frac{h}{3}$ de chaque côté de la surface S . L'épaisseur totale h peut varier d'un point à

un autre, mais on suppose qu'elle reste petite par rapport aux quantités géométriques qui caractérisent la surface moyenne. Soit m un point de S ayant pour coordonnées curvilignes (x^1, x^2) ; $\{a_1, a_2, a_3\}$ la base covariante associée au point m . Une coque Ω peut être définie mathématiquement par :

$$\Omega = \left\{ M \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + x_3 a_3; \quad -\frac{h}{3} < x_3 < \frac{h}{3} \right\}$$

FIGURE 1.1 – Forme Géométrique typique d'une coque



1.1.2.1 Base de la coque

Considérons toujours notre coque définie précédemment; l'élément différentiel au point M est défini par :

$$\rightarrow \begin{cases} d\overline{OM} &= d\overline{Om} + d(x^3 a_3) \\ &= (a_1 dx^1 + a_2 dx^2) + a_3 dx^3 + x^3 a_{3,\alpha} dx^\alpha \\ &= (a_1 + x^3 a_{3,1}) dx^1 + (a_2 + x^3 a_{3,2}) dx^2 + a_3 dx^3 \\ &= g_1 dx^1 + g_2 dx^2 + g_3 dx^3 \end{cases}$$

où

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{OM}_{,\alpha} = (\delta_\alpha^\nu - \mathbf{x}^3 \mathbf{b}_\alpha^\nu) \mathbf{a}_\nu \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3$$

Les trois vecteurs g_1, g_2 et $g_3 = a_3$ ainsi définis constituent une base covariante au point M de la coque si a_1 et a_2 ne sont pas liés. Les vecteurs de la base (g_1, g_2) sont coplanaires au plan tangent à la surface moyenne S au point $m(x^1, x^2)$ et le vecteur $g_3 = a_3$ est normal à cette dernière. Par ailleurs, on introduit le tenseur mixte de surface μ qui permettra de connecter la base liée à la surface moyenne et la base liée à la coque défini par :

$$\mu_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - x^3 b_\alpha^\beta \quad (1.10)$$

Ainsi, on a :

$$g_\alpha = \mu_\alpha^\beta a_\beta \quad \text{et} \quad g_3 = a_3 \quad (1.11)$$

Le tenseur μ étant inversible (confère [R.Nzengwa et B.H.Tagne Simo,1999]) , on pourrait donc définir la base duale $(g^1; g^2; g^3)$ de la coque par :

$$g^\alpha = (\mu^{-1})_\lambda^\alpha a^\lambda \quad \text{avec} \quad g^3 = a^3$$

1.1.2.2 Tenseur métrique de la coque

En se référant au tenseur de surface défini précédemment, on pourrait définir également le tenseur métrique de la coque par :

$$g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta = \mu_\alpha^\nu \mu_\beta^\lambda a_{\nu\lambda} \quad (1.12)$$

De même, on définit le tenseur métrique réciproque de la coque par :

$$g^{\alpha\beta} = (\mu^{-1})_\gamma^\alpha \cdot (\mu^{-1})_\lambda^\beta a^{\gamma\lambda} \quad (1.13)$$

Ainsi, nous pouvons également définir l'élément de volume de la coque par :

$$\begin{aligned} g &= \rho^2 \det(a_{\alpha\beta}) &= (\rho\sqrt{a})^2 \\ \sqrt{g} &= \det(g_{ij}), &\rho &= \det(\mu_\beta^\alpha) \\ dV &= \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 &= \rho dS dx^3 \\ \sqrt{g} &= \rho\sqrt{a} = \det(\mu_\beta^\alpha)\sqrt{a} &= (1 - 2Hz + z^2K)\sqrt{a} \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.2 TENSEURS DE DÉFORMATION

Comme cela a été mentionné au paragraphe précédent; la surface moyenne de la coque peut servir de référence pour l'évaluation des déformations dans l'épaisseur de la coque. Il est question pour nous ici de présenter les différents tenseurs de déformation de la surface moyenne en passant par les dérivées covariantes de surface et le symbole de Christoffel, sans toutefois oublier le nouveau tenseur de déformation de la troisième forme fondamentale; enfin nous finirons par le tenseur de déformation dans l'épaisseur de la coque.

1.2.1 Dérivation sur la surface

La dérivée covariante permet d'évaluer l'évolution d'un champ de vecteurs v en prenant en compte non seulement ses modifications intrinsèques, mais aussi celle du système de coordonnées. Ainsi, si on prend un repère en coordonnées polaires, les deux vecteurs e_r et e_θ ne sont pas constants et dépendent du point étudié. La dérivée covariante permet de prendre en compte ces deux facteurs d'évolution. Les **symboles de Christoffel** Γ_{ji}^k qui, rappelons-le, ne sont pas des tenseurs représentent alors l'évolution des vecteurs de base, à travers leur dérivée covariante. Ainsi dans une base $(e_i; e_j; e_k)$, le symbole de Christoffel est défini par :

$$\Gamma_{ji}^k = (\partial_i e_j) e_k = e_{j,i} e_k \quad (1.15)$$

Nous désignerons notre symbole de Christoffel de surface par $\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$; ainsi on a :

$$\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^\alpha = a^\alpha \bullet a_{\gamma,\beta} = a^\alpha \bullet a_{\beta,\gamma} \quad (1.16)$$

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma\beta} = a_\alpha \bullet a_{\gamma,\beta} = a_\alpha \bullet a_{\beta,\gamma} \quad (1.17)$$

Les dérivées des vecteurs de base du plan tangent à la surface (a^α ou a_β) et de la normale $a^3 = a_3$ sont données par les formules de Gauss et Weingarten, respectivement par [Naghdi,1970]; [Koiter,1970]

$$a_{\alpha,\beta} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda a_\lambda + b_{\alpha\beta} a_3 \quad (1.18)$$

$$a_{,\beta}^\alpha = -\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha a^\gamma + b_\beta^\alpha a^3 \quad (1.19)$$

$$a_{3,\alpha} = a_{,\alpha}^3 = -b_\alpha^\lambda a_\lambda = -b_{\alpha\lambda} a^\lambda \quad (1.20)$$

Les équations ci-dessus indiquent que la dérivée des vecteurs de base a_α contient un terme selon la direction normale (terme de courbure hors du plan tangent). Cet aspect est fondamentalement différent des milieux simples bidimensionnels pour lesquels la dérivée des vecteurs de base est caractérisée seulement par des vecteurs plans.

En considérant toujours notre tenseur de surface \bar{T} défini précédemment, nous pouvons définir les dérivées covariantes suivantes :

$$\nabla_\lambda \bar{T}_\alpha = \bar{T}_{\alpha,\lambda} - \bar{\Gamma}_{\alpha\lambda}^\gamma \bar{T}_\gamma \quad (1.21)$$

$$\nabla_\lambda \bar{T}^\alpha = \bar{T}_{,\lambda}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\gamma\lambda}^\alpha \bar{T}^\gamma \quad (1.22)$$

$$\nabla_\lambda \bar{T}_{\alpha\beta} = \bar{T}_{\alpha\beta,\lambda} - \bar{\Gamma}_{\alpha\lambda}^\gamma \bar{T}_{\gamma\beta} - \bar{\Gamma}_{\beta\lambda}^\gamma \bar{T}_{\alpha\gamma} \quad (1.23)$$

$$\nabla_\lambda \bar{T}^{\alpha\beta} = \bar{T}_{,\lambda}^{\alpha\beta} + \bar{\Gamma}_{\gamma\lambda}^\alpha \bar{T}^{\gamma\beta} + \bar{\Gamma}_{\gamma\lambda}^\beta \bar{T}^{\alpha\gamma} \quad (1.24)$$

$$\nabla_\lambda \bar{T}_\beta^\alpha = \bar{T}_{\beta,\lambda}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\gamma\lambda}^\alpha \bar{T}_\beta^\gamma - \bar{\Gamma}_{\beta\lambda}^\gamma \bar{T}_\gamma^\alpha \quad (1.25)$$

$$\nabla_\lambda a_{\alpha\beta} = \nabla_\lambda a^{\alpha\beta} = \nabla_\lambda \delta_\beta^\alpha = 0 \quad (1.26)$$

Considérons un champ de vecteurs v sur la surface S défini par : $v = v^\lambda a_\lambda + v^3 a_3 = v^\lambda a_\lambda + v^3 a^3$; sa dérivée covariante est définie par :

$$v_{,\alpha} = (\nabla_\alpha v_\lambda - b_{\lambda\alpha} v_3) a^\lambda + (\nabla_\alpha v_3 + b_\alpha^\lambda v_\lambda) a^3 = (\nabla_\alpha v^\lambda - b_\alpha^\lambda v_3) a_\lambda + (\nabla_\alpha v^3 + b_{\lambda\alpha} v^\lambda) a_3 \quad (1.27)$$

avec $\nabla_\alpha v^3 = v_{,\alpha}^3$ et $\nabla_\alpha v_3 = v_{3,\alpha}$.

Les dérivées covariantes du second ordre sont commutatives et on a :

$$\nabla_{\alpha\beta} v_3 = \nabla_{\beta\alpha} v_3 = v_{3,\alpha\beta} - \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda v_{3,\lambda} \quad (1.28)$$

1.2.2 Forme généralisée des tenseurs de déformation de surface

Soient \bar{u} un vecteur déplacement de la surface S , (a_1^*, a_2^*) , a_3^* les vecteurs covariants de la base tangente et le vecteur normal respectivement de la surface déformée. Alors **le tenseur de changement de la métrique ou de changement de la 1^{ère} forme fondamentale, le tenseur de changement de courbure ou de changement de la 2^{ème} forme fondamentale et le tenseur de changement de la 3^{ème} forme fondamentale** sont définis comme suit :

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta}^* - a_{\alpha\beta}) ; k_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(b_{\alpha\beta}^* - b_{\alpha\beta}) \text{ et } Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(c_{\alpha\beta}^* - c_{\alpha\beta}) \quad (1.29)$$

Les vecteurs de base a_α^* , et a_3^* de la surface déformée obtenus après linéarisation sont définis par :

$$a_\alpha^* = (\delta_\alpha^\lambda + \nabla_\alpha \bar{u}^\lambda - b_\alpha^\lambda \bar{u}_3) a_\lambda + (\nabla_\alpha \bar{u}^3 + b_\alpha^\lambda \bar{u}_\lambda) a_3 \quad (1.30)$$

$$a_3^* = -(\nabla_\alpha \bar{u}^3 + b_\alpha^\lambda \bar{u}_\lambda) a^\alpha + a_3 \quad (1.31)$$

Les parties linéarisées de ces tenseurs [Bernadou et Ciarlet ,1976] sont ainsi données par :

$$e_{\alpha\beta}(\bar{u}) = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha \bar{u}_\beta + \nabla_\beta \bar{u}_\alpha - 2b_{\alpha\beta} \bar{u}_3) \quad (1.32)$$

L'expression des composantes du tenseur mixte en utilisant la relation est donnée par

$$e_\beta^\alpha(u) = a^{\alpha\lambda} e_{\beta\lambda}(u) = \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda} (u_{\beta,\lambda} + u_{\lambda,\beta}) - a^{\alpha\lambda} \bar{\Gamma}_{\lambda\beta}^\rho u_\rho - a^{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta} u_3 \quad (1.33)$$

En posant

$$\begin{aligned}
[E_u]^t = & [u_1; \partial_1 u_1; \partial_2 u_1; u_2; \partial_1 u_2; \partial_2 u_2; u_3; -2b_1^1 u_1 - 2b_1^2 u_2 - \partial_1 u_3; -2b_1^1 \partial_1 u_1 \\
& - 2b_1^2 \partial_1 u_2 - 2b_1^1 \partial_2 u_1 - 2b_1^2 \partial_2 u_2; -2b_2^1 u_1 - 2b_2^2 u_2 - \partial_2 u_3; -2b_2^1 \partial_1 u_1 \\
& - 2b_2^2 \partial_1 u_2; -2b_2^1 \partial_2 u_1 - 2b_2^2 \partial_2 u_2; \bar{b}^1 u_1 + \bar{b}^1 u_2 + b_1^1 \partial_1 u_3 + b_1^2 \partial_2 u_3; \bar{b}^1 \partial_1 u_1 \\
& + \bar{b}^1 \partial_1 u_2; \bar{b}^1 \partial_2 u_1 + \bar{b}^1 \partial_2 u_2; \bar{b}^2 u_1 + \bar{b}^2 u_2 + b_2^1 \partial_1 u_3 + b_2^2 \partial_2 u_3; \\
& \bar{b}^2 u_1 + \bar{b}^2 u_2 + b_2^1 \partial_1 u_3 + b_2^2 \partial_2 u_3; \bar{b}^2 \partial_1 u_1 + \bar{b}^2 \partial_1 u_2; \bar{b}^2 \partial_2 u_1 + \bar{b}^2 \partial_2 u_2]
\end{aligned} \quad (1.34)$$

où nous avons posé : $\bar{b}^1 = b_1^1 b_1^1 + b_2^1 b_1^1$ $\bar{b}^1 = b_1^2 b_1^1 + b_2^2 b_1^1$ $\bar{b}^2 = b_1^1 b_2^1 + b_2^2 b_2^1$ $\bar{b}^2 = b_1^2 b_2^1 + b_2^2 b_2^2$,

le tenseur mixte du changement de la première forme fondamentale de la surface moyenne peut se mettre sous la forme :

$$e_\beta^\alpha(u) = [D_e]_\beta^\alpha [E_u] \quad (1.35)$$

où

$$\begin{aligned}
[D_e]_\beta^\alpha = & [-a^{\alpha\nu} \Gamma_{\beta\nu}^1; a^{\alpha 1} I(\beta, 1); \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda} J(\lambda, \beta); -a^{\alpha\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^2; \frac{1}{2} a^{\alpha\lambda} J(\lambda, \beta); a^{\alpha 2} J(\beta, 2); \\
& -b_\beta^\alpha; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
\end{aligned} \quad (1.36)$$

et

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

La forme généralisée du tenseur du changement de courbure (ou changement de la seconde forme fondamentale) de la surface moyenne est exprimée façon suivante, en utilisant la définition de l'angle de rotation autour de la normale :

$$\begin{aligned}
k_{\alpha\beta}(\dot{u}) = & \nabla_\alpha b_\beta^\nu \dot{u}_\nu + b_\alpha^\nu \nabla_\beta \dot{u}_\nu + b_\beta^\nu \nabla_\alpha \dot{u}_\nu + \nabla_\alpha \nabla_\beta \dot{u}_3 - b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} \dot{u}_3 \\
= & \frac{1}{2} \{ \nabla_\alpha \theta_\beta + \nabla_\beta \theta_\alpha - b_\alpha^\lambda (\nabla_\beta \bar{u}_\lambda - b_{\lambda\beta} \bar{u}_3) - b_\beta^\lambda (\nabla_\alpha \bar{u}_\lambda - b_{\lambda\alpha} \bar{u}_3) \} \\
= & \frac{1}{2} (b_{\alpha,\beta}^\nu + b_\alpha^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\nu - b_\beta^\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda) \bar{u}_\nu + b_\beta^\lambda b_{\lambda\alpha} \bar{u}_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \theta_\lambda \\
& + \frac{1}{2} (\theta_{\beta,\alpha} + \theta_{\alpha,\beta})
\end{aligned} \quad (1.38)$$

Les composantes mixtes de ce tenseur de changement de courbure de la surface moyenne est donné par :

$$\begin{aligned}
k_\beta^\alpha(u) = & a^{\alpha\lambda} k_{\beta\lambda}(u) \\
= & [D_k]_\beta^\alpha \{E_u\}
\end{aligned} \quad (1.39)$$

où

$$\begin{aligned}
[D_k]_\beta^\alpha = & [\frac{1}{2} a^{\alpha\mu} (b_{\mu,\beta}^1 + \bar{\Gamma}_{\lambda\beta}^1 b_\mu^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\lambda b_\lambda^1) 0; 0; \frac{1}{2} a^{\alpha\mu} (b_{\mu,\beta}^2 + \bar{\Gamma}_{\lambda\beta}^2 b_\mu^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\lambda b_\lambda^2); \\
& 0; 0; b^{\alpha\mu} b_{\mu\beta}; -a^{\alpha\mu} \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^1; -I(\alpha, 1) a^{\alpha 1}; \frac{1}{2} J(\alpha, \beta) a^{\alpha\mu}; -a^{\alpha\mu} \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^2; \\
& \frac{1}{2} J(\alpha, \beta) a^{\alpha\mu}; I(\alpha, 2) a^{\alpha 2}; 0, 0, 0, 0, 0, 0]
\end{aligned} \quad (1.40)$$

La forme généralisée du tenseur du changement de courbure de Gauss (ou changement de la troisième forme fondamentale) de la surface moyenne est exprimée de la façon suivante,utilisant la définition des angles de rotation autour de a_3 et rotation de gauss :

$$Q_{\alpha\beta}(\bar{u}) = \frac{1}{2}[b'_\alpha \nabla_\beta b''_\nu \bar{u}_\rho + b'_\alpha b''_\nu \nabla_\beta \bar{u}_\rho + b'_\beta b''_\nu \nabla_\alpha \bar{u}_\rho + b'_\beta \nabla_\nu b''_\alpha \bar{u}_\rho + b'_\alpha \nabla_\beta \nabla_\nu \bar{u}_3 + b'_\beta \nabla_\alpha \nabla_\nu \bar{u}_3] \quad (1.41)$$

De même, les composantes mixtes du tenseur de changement de courbure de Gauss de la surface moyenne est donné par :

$$\begin{aligned} Q_\beta^\alpha(u) &= a^{\alpha\lambda} Q_{\beta\lambda}(u) \\ &= [D_Q]_\beta^\alpha \{E_u\} \end{aligned} \quad (1.42)$$

ici,

$$\begin{aligned} [D_Q]_\beta^\alpha &= [a^{\alpha\mu} b''_\nu (b''_{\beta,\mu} + \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^\nu b''_\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\gamma b''_\gamma); 0; 0; a^{\alpha\mu} b''_\nu (b''_{\beta,\mu} + \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^\nu b''_\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\gamma b''_\gamma); \\ &\quad 0; 0; 0; (b''_{\beta,\mu} + \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^1 b''_\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\gamma b''_\gamma); 0; 0; (b''_{\beta,\mu} + \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^2 b''_\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\gamma b''_\gamma); 0; 0; \\ &\quad -a^{\alpha\mu} \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^1; I(\alpha, 1) a^{\alpha 1}; \frac{1}{2} J(\alpha, \beta) a^{\alpha\mu}; -a^{\alpha\mu} \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^2; \frac{1}{2} J(\alpha, \beta) a^{\alpha\mu}; I(\alpha, 2) a^{\alpha 2}] \end{aligned} \quad (1.43)$$

Il est à noter que les deux premiers tenseurs ($e_{\alpha\beta}$) et ($k_{\alpha\beta}$) sont couramment utilisés dans la théorie des coques minces et comme leurs noms l'indiquent; ils caractérisent respectivement le changement de la métrique et de la courbure. Contrairement aux deux premiers tenseurs, ($Q_{\alpha\beta}$) n'est pas très utilisé dans la littérature mais sera d'une importance capitale dans le modèle N-T.

Dans le cas des petits déplacements, les parties linéarisées de ces différents tenseurs seront utilisées. Les différentes formules obtenues dans cette partie seront utilisées dans la coque; d'autant plus qu'une coque sera définie en utilisant sa **surface moyenne**.

1.2.3 Dérivation covariante dans l'espace 3D

Partant du symbole de Christoffel qui a été défini précédemment pour la base tangente à la surface S , nous pouvons également définir ce même symbole relativement à la base $\{g_1, g_2, g_3\}$ de la coque par :

$$\Gamma_{ji}^k = g^k \bullet g_{i,j} \quad \text{et} \quad \Gamma_{jki} = g_k \bullet g_{i,j} \quad (1.44)$$

Nous avons donc les relations suivantes :

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik} = g_{i,k} \cdot g_k = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) \quad (1.45)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k = g^{kl} \Gamma_{ijl} \quad (1.46)$$

$$g_{,k}^i = -\Gamma_{kj}^i \cdot g^j, \quad g_{i,k} = \Gamma_{ik}^j \cdot g_j \quad (1.47)$$

1.2.4 Relation entre tenseurs de surface et tenseurs d'espace

Nous allons présenter les différentes relations qui lient les tenseurs de surface et les tenseurs d'espace qui seront utilisées par la suite dans notre modèle.

1.2.4.1 Cas du symbole de Christoffel

Nous avons défini précédemment la base covariante g_α au point M de la coque ; nous pouvons dès lors définir ses différentes dérivées par :

$$g_{\alpha,\beta} = \mu_\alpha^\nu a_{\nu,\beta} - z b_{\alpha,\beta}^\nu a_\nu \quad (1.48)$$

Ainsi

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = g_{\alpha,\beta} \cdot g^\gamma = (\mu^{-1})_\nu^\gamma [\Gamma_{\alpha\beta}^\nu - z(\nabla_\beta b_\alpha^\nu + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda b_\lambda^\nu)] \quad (1.49)$$

Partant du développement limité de Taylor du tenseur (μ^{-1}) [Nzengwa et Tagne Simo,1999], on peut donc définir la relation entre les symboles de Christoffel de surface et d'espace par :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma + (\mu^{-1})_\nu^\gamma \nabla_\beta \mu_\alpha^\nu \quad (1.50)$$

1.2.4.2 Cas des vecteurs

Soit un vecteur T défini par :

$$T = T_\alpha g^\alpha + T_3 g^3 = T^\alpha g_\alpha + T^3 g_3 \quad (g^3 = a_3 = a^3) \quad (1.51)$$

où bien en utilisant le tenseur de surface on a :

$$T = T_\alpha a^\alpha + T_3 a^3 = T^\alpha a_\alpha + T^3 a_3 \quad (1.52)$$

Nous pouvons dès lors définir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} T^3 = T_3 = \bar{T}^3 = \bar{T}_3 ; T_\alpha = \mu_\alpha^\nu \bar{T}_\nu ; T^\alpha = (\mu^{-1})_\nu^\alpha \bar{T}^\nu \\ \bar{T}_\alpha = (\mu^{-1})_\alpha^\nu T_\nu ; \bar{T}^\alpha = (\mu)^\alpha_\nu T^\nu \\ T_\beta^\alpha = (\mu^{-1})_\nu^\alpha \mu_\beta^\lambda \bar{T}_\lambda^\nu ; \bar{T}_\beta^\alpha = \mu_\nu^\alpha (\mu^{-1})_\beta^\lambda T_\lambda^\nu \\ T_3^\alpha = (\mu^{-1})_\nu^\alpha \bar{T}_3^\nu ; \bar{T}_3^\alpha = \mu_\nu^\alpha T_3^\nu \\ T_\alpha^3 = \mu_\alpha^\nu \bar{T}_\nu^3 ; \bar{T}_\alpha^3 = (\mu^{-1})_\alpha^\nu T_\nu^3 ; T_3^3 = \bar{T}_3^3 \end{aligned} \quad (1.53)$$

1.2.4.3 Cas des dérivées 3D et 2D

Partant toujours du vecteur T défini précédemment, on aimerait trouver une expression des dérivées d'espace $T_{i/j}$ et $T_{/j}^i$ en fonction des dérivées de surface. On a les relations suivantes [R.Nzengwa et B.H Tagne Simo, 1999] :

$$T_{\alpha/\beta} = T_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda T_\lambda - \Gamma_{\alpha\beta}^3 T_3 = \mu_\alpha^\nu [\nabla_\beta \bar{T}_\nu - b_{\nu\beta} \bar{T}^3]$$

$$T_{/j}^\alpha = (\mu^{-1})_\nu^\alpha [\nabla_\beta \bar{T}^\nu - b_\beta^\nu \bar{T}^3]$$

$$T_{\alpha/3} = \mu_\alpha^\nu \bar{T}_{\nu,3} ; T_{3/\alpha} = \bar{T}_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda \bar{T}_\lambda ; T_{/3}^\alpha = (\mu^{-1})_\nu^\alpha \bar{T}_{,3}^\nu ; T_{,\alpha}^3 = \bar{T}_{,\alpha}^3 + b_{\alpha\lambda} \bar{T}^\lambda$$

$$T_{/3}^3 = T_{3/3} = T_{3,3} = \bar{T}_{,3}^3 \quad (1.54)$$

1.3 GÉNÉRALITÉS SUR LES MODÈLES DE COQUES

Le problème d'équilibre tridimensionnel de coques d'épaisseur h isotrope et linéairement élastique occupant le domaine Ω et de surface moyenne S est défini par :

$$\begin{cases} -div \sigma = f & \text{dans } \Omega & (1) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 & (2) \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \bar{h} & \text{sur } \Gamma_1 & (2) \end{cases} \quad (1.55)$$

$\sigma^{ij}(u) = \lambda tr(\epsilon(u)) g^{ij} + 2\mu \epsilon^{ij}(u)$ ici, λ et μ sont les coefficients de Lamé avec

$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i/j} + u_{j/i})$ le tenseur de déformation ; f et \bar{h} sont respectivement les forces volumique intérieure et surfacique au bord Γ_1 de la coque Ω , \vec{n} est le vecteur unitaire normale ; $u_{i/j}$ est l'expression des dérivées d'espace du déplacement ; γ_0 est la partie encastrée de ∂S et γ_1 le reste.

Posons $\Omega^h = S \times]-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[$. Nous allons réécrire l'équation (1.55) sous une forme plus générale de la façon suivante :

$$\begin{cases} div \sigma = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sigma \vec{n} = g & \text{sur } \Gamma_1 \\ g = \bar{h}_- & \text{sur } \Gamma_- \\ g = \bar{h}_+ & \text{sur } \Gamma_+ \\ g = \bar{h} & \text{sur } \gamma_1 \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \\ A^{ijkl}(x) = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \\ \lambda \text{ et } \mu \text{ sont les modules de Lamé} \\ \sigma^{ij}(x) = \frac{1}{2} A^{ijkl}(x) (u_{k/l} + u_{l/k}) \end{cases} \quad \text{ici } \begin{cases} (\mu)_\tau^\alpha = \delta_\tau^\alpha + z b_\tau^\alpha \\ g^{\alpha\beta} = (\mu^{-1})_\rho^\alpha (\mu^{-1})_l^\beta a^{\rho l} \\ \gamma = \partial S \\ \Gamma_0 = \gamma_0 \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \\ \Gamma_1 = \gamma_1 \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] [\cup \Gamma_- \cup \Gamma_+ \\ \Gamma_- = S \times \{-\frac{h}{2}\} \\ \Gamma_+ = S \times \{+\frac{h}{2}\} \end{cases}$$

Plusieurs modèles théoriques de coque abondent dans la littérature , selon la cinématique adoptée, plusieurs expressions de déformations sont formulées permettant ainsi d'obtenir l'expression des déplacements issus de cette cinématique.

Un grand nombre de cinématiques de coque ont été développés par l'utilisation d'un développement en série de Taylor du champ de déplacement sous la forme :

$$\begin{cases} U_\alpha(x^1, x^2, z) &= \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \xi_\alpha(x^1, x^2) - \frac{z}{A_\alpha} \frac{\partial \xi_3(x^1, x^2)}{\partial x^\alpha} + w(z) \gamma_\alpha(x^1, x^2) \\ U_3(x^1, x^2, z) &= \xi_3(x^1, x^2) \\ \gamma_\alpha(x^1, x^2) &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \xi_3(x^1, x^2)}{\partial x^\alpha} + \omega_\alpha(x^1, x^2) \end{cases}$$

Ce champ de déplacement comporte cinq inconnues variationnelles à savoir deux déplacements membranaires ξ_α , un déplacement transverse ξ_3 , et deux rotations de cisaillement transverse γ_α . Nous rappelons que x^1, x^2 et $x^3 = z$ sont les coordonnées curvilignes, A_α les métriques, R_α les rayons de courbure. Les différents modèles développés dans la littérature se distinguent par la définition de la fonction $w(z)$ utilisée pour représenter le cisaillement transverse. Nous allons donc présenter dans la suite les deux modèles les plus utilisés c'est à dire le modèle de Kirchhoff-Love (K-L) ; celui de Reissner – Mindlin (R-M) et enfin nous terminerons par le modèle de R.Nzengwa et B.H Tagne Simo (N-T) utilisant plutôt une approche non heuristique.

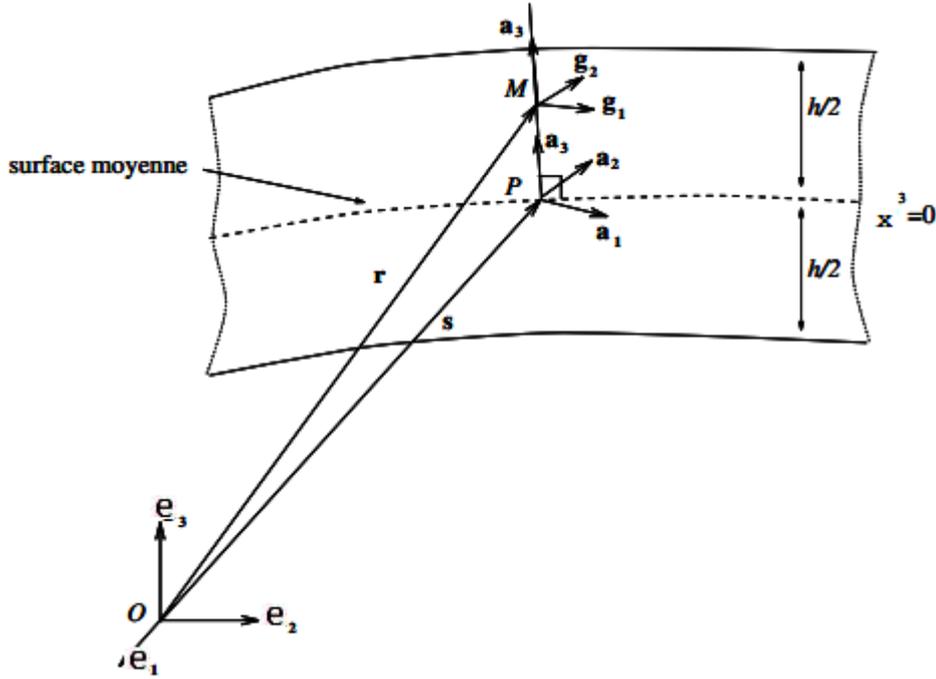
1.3.1 Théorie de coques minces

On se place dans le cadre particulier des coques minces. Dans ce cas, l'hypothèse cinématique de base est celle de **Kirchhoff-Love (Hypothèse de conservation de la normale) établie par [19] et [22]** qui stipule :

1. Les fibres droites normales à la surface moyenne avant la déformation restent droites et normales à la surface moyenne après la déformation ;
2. Les contraintes normales perpendiculaires à la surface moyenne peuvent être négligées dans les lois constitutives contrainte-déformation ;
3. Le déplacement transverse est indépendant de l'épaisseur de la coque.

Une première conséquence de cette hypothèse est que les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées et donc le déplacement défini plus haut est tel que $w(z) = 0$.

FIGURE 1.2 – Représentation de la coque sous l'hypothèse K-L



Les déformations issues de cette théorie sont données par :

$$\begin{cases} \epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}(x^1, x^2) - zk_{\alpha\beta}(x^1, x^2) \\ \epsilon_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

1.3.2 Théorie de coques épaisses

1.3.2.1 Hypothèse Reissner-Mindlin (R-M)

Une hypothèse tenant compte de l'évolution de la normale (plus générale et moins restrictive que l'hypothèse K-L), fut introduite par [28] et [45] dénommée : **Hypothèses des sections droites** qui stipule que les fibres normales à la surface moyenne de la coque restent droites mais pas nécessairement normales à la surface moyenne pendant la transformation.

Cette hypothèse attribuée à plusieurs auteurs (Hencky-Mindlin-Reissner-Nagdhi) suppose une rotation de la normale au cours de la déformation. Elle permet de prendre en compte les effets de cisaillement transverse (C.T.) qui, rappelons-le, sont prépondérants dans les coques épaisses ; ainsi les déplacements sont définis tels que $w(z) = z$.

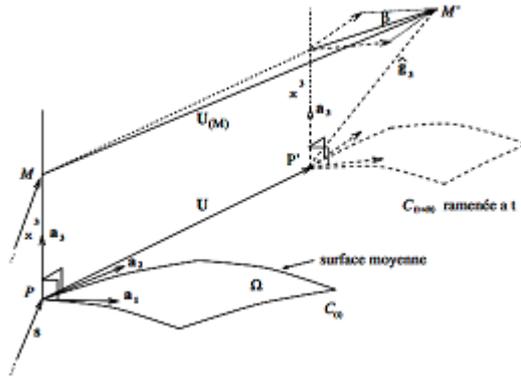
Remarques :

- La théorie de Kirchhoff peut être interprétée comme un cas particulier de la théorie de Reissner-Mindlin. En effet, un modèle élément fini basé sur la théorie de

Reissner-Mindlin devra donner des résultats en accord avec la théorie de Kirchhoff si l'influence du C.T. est faible.

- Dans la théorie des plaques, dite du premier ordre, le modèle de plaque de Reissner-Mindlin est plutôt adapté aux plaques épaisses et le modèle de Kirchhoff-Love aux plaques minces.

FIGURE 1.3 – Représentation de la coque sous l'hypothèse de R-M



L'hypothèse cinématique de base de sections droites Reissner – Mindlin permet donc de prendre en compte les effets de cisaillement transverse, contrairement à l'hypothèse de Kirchhoff – Love, plus restrictive, impliquant la conservation des normales et qui néglige de ce fait ces effets.

Il faut aussi souligner que le cisaillement transverse étant très faible pour les plaques et coques minces, les modèles de coques de Kirchhoff – Love sont en principe dans ce cas plus précis que les modèles de Reissner – Mindlin. Ces derniers sont en effet adaptés aux coques épaisses et l'obtention d'un cisaillement transverse nul pour les coques minces est souvent très difficile. En particulier, pour la modélisation par éléments finis, cette nécessité entraîne en général des phénomènes de verrouillage (blocage) en CT que nous évoquerons plus loin.

1.3.2.2 Hypothèse Nzenywa-Tagne Simo (N-T)

Le modèle N-T est un modèle bidimensionnel de coques épaisses élastiques linéaires déduit d'un problème tridimensionnel de coques d'épaisseur h (1.3) proposé par [32] qui est un modèle statique rigoureusement déduit du modèle d'élasticité tridimensionnelle après "multiple scaling" et analyse limite développé dans [32]. La solution limite conduit à une déformation plane réelle (non tronquée) et fait apparaître clairement le changement de courbure de Gauss. Le déplacement ici est un polynôme du second degré de l'épaisseur pendant que le tenseur de déformation qui est plan ($\epsilon_{i3}(u) = 0$), contient le tenseur du changement de la troisième forme fondamentale en plus de la première et de la seconde. En effet,

considérons $(a_1; a_2; a_3)$ et $(a^1; a^2; a^3)$ les bases covariantes et contravariantes respectivement de la surface moyenne S et $\{g_1, g_2, g_3\}, \{g^1, g^2, g^3\}$ respectivement les bases covariantes et contravariantes de la coque Ω . Alors comme nous avons vu aux paragraphes précédents,

$$g_\alpha = (\delta_\alpha^\tau - z b_\alpha^\tau) a_\tau = (\mu_\alpha^\tau) a_\tau, \quad g_3 = a_3 \quad (1.56)$$

$$g^\alpha = (\mu_\tau^\alpha)^{-1} a^\tau, \quad g^3 = a^3$$

$$d\Omega = (1 - 2z b_\alpha^\alpha + z^2 \det(b_\beta^\alpha)) dz dS = \phi(x, z) dz dS \quad (1.57)$$

où $b_\alpha^\rho = a^{\rho\gamma} b_{\gamma\alpha}$ et $b_{\gamma\alpha}$ sont les composantes des tenseurs de courbure et $a^{\rho\gamma}$ est la composante contravariante de la métrique de la surface moyenne S . Le champ de vecteur peut être exprimé indifféremment par les composantes par morceaux de bases g^i ou a^i comme suit :

$$v = v_i(x, z) g^i = \bar{v}_i(x, z) a^i, \quad v_\alpha = (\mu_\alpha^\tau) \bar{v}_\tau \quad \text{et} \quad \bar{v}_\alpha = (\mu_\alpha^\tau)^{-1} v_\tau$$

Alors les tenseurs de déformation (confère [32]) sont donnés par

$$\begin{cases} \epsilon_{\alpha\beta}(u) &= \frac{1}{2} (u_{\alpha/\beta} + u_{\beta/\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} ((\mu_\alpha^\tau) (\nabla_\beta \bar{u}_\tau - b_{\tau\beta} \bar{u}_3) + (\mu_\beta^\tau) (\nabla_\alpha \bar{u}_\tau - b_{\alpha\tau} \bar{u}_3)) \\ \epsilon_{3\alpha}(u) &= \frac{1}{2} (u_{\alpha/3} + u_{3/\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} ((\mu_\alpha^\tau) \bar{u}_{\tau,3} + \bar{u}_{3,\alpha} + b_\alpha^\tau \bar{u}_\tau) \\ \epsilon_{33}(u) &= \bar{u}_{3,3} \end{cases} \quad (1.58)$$

L'équation $\epsilon_{i3}(u) = 0; i=1,2,3$ conduit aux résultats suivant :

$$\begin{cases} \bar{u}_\alpha = (\mu_\alpha^\tau) \xi_\tau - z \partial_\alpha \xi_3 & \bar{u}_3 = \xi_3 \quad \text{pour} \quad \xi_\alpha, \xi_3 \quad \text{fonction de} \quad x = (x_1, x_2) \\ \text{et} \\ u_\alpha = \xi_\alpha - z (\partial_\alpha \xi_3 + 2b_\alpha^\tau \xi_\tau) + z^2 (b_\nu^\tau b_\alpha^\nu \xi_\tau + b_\alpha^\tau \partial_\tau \xi_3) & u_3 = \xi_3 \end{cases} \quad (1.59)$$

Le tenseur de déformation à cet effet donne : (confère :[32])

$$\begin{cases} \epsilon_{\alpha\beta}(u) &= e_{\alpha\beta}(\xi) - z k_{\alpha\beta}(\xi) + z^2 Q_{\alpha\beta}(\xi) \\ e_{\alpha\beta}(\xi) &= \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha - 2b_{\alpha\beta} \xi_3) \\ k_{\alpha\beta}(\xi) &= \nabla_\alpha b_\beta^\nu \xi_\nu + b_\alpha^\nu \nabla_\beta \xi_\nu + b_\beta^\nu \nabla_\alpha \xi_\nu + \nabla_\alpha \nabla_\beta \xi_3 - b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} \xi_3 \\ Q_{\alpha\beta}(\xi) &= \frac{1}{2} [b_\alpha^\nu \nabla_\beta b_\nu^\rho \dot{u}_\rho + b_\alpha^\nu b_\nu^\rho \nabla_\beta \dot{u}_\rho + b_\beta^\nu b_\nu^\rho \nabla_\alpha \dot{u}_\rho + b_\beta^\nu \nabla_\nu b_\alpha^\rho \dot{u}_\rho \\ &\quad + b_\alpha^\nu \nabla_\beta \nabla_\nu \dot{u}_3 + b_\beta^\nu \nabla_\alpha \nabla_\nu \dot{u}_3] \end{cases} \quad (1.60)$$

Nous rappelons ici que $(e_{\alpha\beta}), (k_{\alpha\beta})$ et $(Q_{\alpha\beta})$ sont respectivement les tenseurs de changement de la première, seconde et troisième forme fondamentale de la surface moyenne, pendant que le déplacement

$$u = u_\alpha(x, z)g^\alpha + \xi_3(x)a^3 = \bar{u}_\alpha(x, z)a^\alpha + \xi_3(x)a^3 \quad (1.61)$$

est la forme généralisée du déplacement de Kirchhoff-Love (confère[32] et peut être écrit sous la forme du modèle de Reissner-Mindlin comme suit :

$$u = (\xi_\alpha(x) - z\theta_\alpha(x) + z^2\psi_\alpha(x))g^\alpha + \xi_3(x)a^3 = (\xi_\alpha(x) + z\beta_\alpha(x))a^\alpha + \xi_3(x)a^3 \quad (1.62)$$

où $\beta_\alpha = \xi_{3,\alpha} + 2b'_\alpha \xi_\nu = \theta_\alpha + zb'_\alpha \xi_\nu$ est l'angle de rotation. Rappelons que dans la littérature classique la rotation est θ_α . Les tenseurs de déformations sont mal calculés dans certaines littératures à cause de l'utilisation de la mauvaise base . la condition $\epsilon_{i3}(u) = 0$ modifie la loi constitutive qui est exprimée avec les constantes de Lamé , maintenant données par

$$\sigma^{\alpha\beta}(u) = (\bar{\lambda}g^{\gamma\delta}g^{\alpha\beta} + \mu(g^{\alpha\gamma}g^{\delta\beta} + g^{\alpha\delta}g^{\gamma\beta})) \epsilon_{\gamma\delta}(u), \quad \bar{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \quad (1.63)$$

où de façon équivalent, avec le module de Young E et le coefficient de Poisson ν :

$$\sigma^{\alpha\beta}(u) = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu g^{\gamma\delta}g^{\alpha\beta} + (1 - \nu)(g^{\alpha\gamma}g^{\delta\beta} + g^{\alpha\delta}g^{\gamma\beta})) \epsilon_{\gamma\delta}(u).$$

Considérons une coque d'épaisseur h , encadrée sur la partie Γ_0 du bord ∂S , sollicité aux forces de volume f^α , f^3 et aux forces de surface \bar{h}^α , \bar{h}^3 sur son bord Γ^1 . Supposons les forces suffisamment régulières ; alors les contraintes transversales sont solution des équations aux dérivées partielles : $\forall 1 \leq \alpha \leq 2$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma^{\alpha 3}}{\partial z} + 2\Gamma_{\lambda 3}^\alpha \sigma^{\lambda 3} + \Gamma_{\lambda 3}^\lambda \sigma^{\alpha 3} & = - \left(\sigma_{,\beta}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha \sigma^{\lambda\beta} - f^\alpha \right) \text{ dans } H^1(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}; H^{-1}(S)) \\ \sigma^{\alpha 3}(-\frac{h}{2}) = -\bar{h}_-^\alpha & \text{sur } \Gamma_+ \\ \sigma^{\alpha 3}(+\frac{h}{2}) = \bar{h}_+^\alpha & \text{sur } \Gamma_- \end{cases} \quad (1.64)$$

où $f^\alpha \in L^2(\Omega)$;
et

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial z} + \Gamma_{\alpha 3}^\alpha \sigma^{\alpha 3} & = - \left(\sigma_{,\alpha}^{3\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^3 \sigma^{\lambda\alpha} + \Gamma_{\beta\lambda}^\beta \sigma^{\lambda 3} - f^3 \right) \text{ dans } H^2(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}; H^{-2}(S)) \\ \sigma^{33}(-\frac{h}{2}) = -\bar{h}_-^3 & \text{sur } \Gamma_+ \\ \sigma^{33}(+\frac{h}{2}) = \bar{h}_+^3 & \text{sur } \Gamma_- \end{cases} \quad (1.65)$$

où $f^3 \in H^1(\Omega)$; toutes ces équations correctement établies dans[32].

Ici,

$$\begin{cases} H^1(S) = \{\eta \in L^2(S), \nabla_\alpha \eta \in L^2(S)\} \\ IH_{\gamma_0}^1(S) = \{(\eta_\alpha) \in IH^1(S), \eta_\alpha = 0 \text{ sur } \gamma_0\} \\ IH^1(S) = [H^1(S)]^2 \\ H^2(S) = \{\eta \in H^1(S), \nabla_\alpha \eta \in H^1(S)\} \\ H_{\gamma_0}^2(S) = \{\eta \in H^2(S), \eta = \partial_\alpha \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0\} \end{cases} \quad (1.66)$$

1.3.3 Formulation variationnelle du modèle N-T

La coque ici est supposée faite d'un matériau élastique, homogène et isotrope ; et dans ce cas le tenseur de déformation et le tenseur de contrainte sont liées par la loi généralisée de Hooke définie par :

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.67)$$

Où C^{ijkl} sont les coefficients d'élasticité définis par :

$$C^{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} + \frac{2\nu}{1-\nu} g^{ij} g^{kl}) \quad (1.68)$$

car la contrainte est plane.

Les quantités E et ν désignent respectivement le module de Young et le coefficient de poisson du matériau, en particulier $g^{\alpha 3} = g^{3\alpha} = 0$ et $g^{33} = 1$.

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} C^{33\alpha\beta} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)} g^{\alpha\beta}, & C^{3\alpha 3\beta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} g^{\alpha\beta} \\ C^{333\alpha} &= C^{3\alpha\beta\lambda} = 0 & C^{3333} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-\nu)} g^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.69)$$

Etant en contrainte plane, c'est-à-dire $\sigma^{33} = 0$; ceci entraîne que $\epsilon_{33} = \frac{-\nu}{1-\nu} g^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}$.

Le problème aux limites défini en 3D peut être transformé en un problème 2D [32] ; ceci en utilisant la géométrie de la surface, les dérivées covariantes de surface, les relations entre les dérivées covariantes d'espace et de surface et bien d'autres relations définies aux paragraphes précédents. Ainsi, nous obtenons de ces équations la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\xi_\alpha, \xi_3) \in (\mathbb{H}_{\gamma_0}^1(S))^2 \times \mathbb{H}_{\gamma_0}^2(S) \text{ tel que :} \\ \int_S (\bar{N}_0 e : \bar{e} + \bar{N}_2 k : \bar{k} + \bar{N}_2 e : \bar{Q} + \bar{N}_2 Q : \bar{e} + \bar{N}_4 Q : \bar{Q} - \bar{N}_1 e : \bar{k} \\ - \bar{N}_1 k : \bar{e} - \bar{N}_3 k : \bar{Q} - \bar{N}_3 Q : \bar{k}) dS = \bar{L}(\bar{v}), \quad \forall \bar{v} \in (\mathbb{H}_{\gamma_0}^1(S))^2 \times \mathbb{H}_{\gamma_0}^2(S) \end{array} \right. \quad (1.70)$$

Avec

$$\bar{N}_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (-z)^n [\bar{\lambda} g^{\gamma\delta} g^{\alpha\beta} + \mu (g^{\alpha\gamma} g^{\delta\beta} + g^{\alpha\delta} g^{\gamma\beta})] \varphi(x, z) dz \quad n = 0; 1; 2; 3; 4. \quad (1.71)$$

Partant de cette intégrale, et en posant

$$\begin{aligned}
N(\bar{u}) &= \bar{N}_0 e(\bar{u}) + \bar{N}_1 k(\bar{u}) + \bar{N}_2 Q(\bar{u}) \\
M(\bar{u}) &= \bar{N}_1 e(\bar{u}) + \bar{N}_2 k(\bar{u}) + \bar{N}_3 Q(\bar{u}) \\
M^*(\bar{u}) &= \bar{N}_2 e(\bar{u}) + \bar{N}_3 k(\bar{u}) + \bar{N}_4 Q(\bar{u})
\end{aligned} \tag{1.72}$$

On peut donc déduire une meilleure équation variationnelle bidimensionnelle du premier ordre de la coque donnée par :

$$\begin{aligned}
\int_S (N(\bar{u}) : e(\bar{v}) + M(\bar{u}) : k(\bar{v}) + (M^*)(\bar{u}) : Q(\bar{v})) dS &= \int_S [p^\alpha \eta_\alpha + p^3 \eta_3] dS + \int_{\gamma_1} [q^\alpha \eta_\alpha + q^3 \eta_3] d\gamma \\
&\quad + \int_{\gamma_1} m^\alpha \theta_\alpha d\gamma \\
&= L(\bar{v})
\end{aligned} \tag{1.73}$$

Où on a posé

$$\left\{ \begin{aligned}
p^\alpha &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} f^\tau w_\tau^\alpha(z) dz + \dot{h}_+^\tau \left(\frac{h}{2}\right) w_\tau^\alpha\left(\frac{h}{2}\right) + \dot{h}_-^\tau w_\tau^\alpha\left(\frac{-h}{2}\right); \\
p^3 &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} f^3 dz + \dot{h}_+^3\left(\frac{h}{2}\right) + \dot{h}_-^3\left(\frac{-h}{2}\right) - \partial_\tau \bar{f} \\
q^\alpha &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\dot{h}^\alpha - z b_\tau^\alpha \dot{h}^\tau \right] dz \\
q^3 &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\dot{h}^3 \right] dz \\
m^\alpha &= \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \dot{h}^\alpha dz - \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 b_\tau^\alpha \dot{h}^\tau dz \\
\theta_\alpha &= - (b_\alpha^\nu \eta_\nu + \nabla_\alpha \eta_3)
\end{aligned} \right.$$

$$\text{Ici, } w_\tau^\alpha(z) = \delta_\tau^\alpha - z b_\tau^\alpha + z^2 b_\nu^\alpha b_\tau^\nu \quad \dot{w}_\alpha^\tau(z) = -z \delta_\tau^\alpha - z^2 b_\tau^\alpha.$$

1.3.3.1 Fonctionnelle d'énergie

En développant les différentes formulations variationnelles données plus haut et en utilisant le développement en série de Taylor de $(\mu^{-1})_\beta^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (b^n)_\beta^\alpha$ avec $(b^0)_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$, $b^1 = b$ et $b^n = b^{n-1}b = bb^{n-1}$, il ressort que la fonctionnelle d'énergie rattachée à notre problème peut être mise sous la forme (en première approximation $\mu^{-1} = I$ et en deuxième approximation $\mu^{-1} = I + zb$)

$$\left\{ \begin{aligned}
\text{trouver } u = (\eta_\alpha, \eta_3) &\in (H_{\gamma_0}^1(S))^2 \times H_{\gamma_0}^2(S) && \text{tel que} \\
A_s(u, v) = L(v), \quad \forall v &= (\xi_\alpha, \xi_3) \in (H_{\gamma_0}^1(S))^2 \times H_{\gamma_0}^2(S); && s = 0, 1
\end{aligned} \right. \tag{1.74}$$

où

$$\begin{aligned} A_0(u, v) &= \int_S ((N(u)) : e(v) + \bar{M}(u) : k(v)) dS \\ A_1(u, v) &= \int_S ((N(u) + \bar{N}(u)) : e(v) + \bar{M}(u) : k(v) + (M(u) + \bar{M}^*(u)) : Q(v)) dS \end{aligned} \quad (1.75)$$

qui est respectivement la forme variationnelle des coques minces et épaisses auxquels

$$\begin{cases} N^{\alpha\beta}(u) = \frac{2E\varepsilon}{1-\nu^2} [(1-\nu)e^{\alpha\beta}(u) + \nu e_\lambda^\lambda(u)a^{\alpha\beta}] \\ \bar{N}^{\alpha\beta}(u) = \frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu)Q^{\alpha\beta}(u) + \nu Q_\lambda^\lambda(u)a^{\alpha\beta}] \\ \bar{M}^{\alpha\beta}(u) = \frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu)k^{\alpha\beta}(u) + \nu k_\lambda^\lambda(u)a^{\alpha\beta}] \\ M^{\alpha\beta}(u) = \frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu)e^{\alpha\beta}(u) + \nu e_\lambda^\lambda(u)a^{\alpha\beta}] \\ \bar{M}^{*\alpha\beta}(u) = \frac{2E\varepsilon^5}{5(1-\nu^2)} [(1-\nu)Q^{\alpha\beta}(u) + \nu Q_\lambda^\lambda(u)a^{\alpha\beta}] \end{cases} \quad (1.76)$$

avec :

- bM, \bar{M} et $b\bar{M}^*$ sont composantes de moments de flexion ;
- N, \bar{N} : composantes membranaire de forces résultantes.

En utilisant les équations (1.35), (1.39), (1.42) et les formulations variationnelles (1.75) peuvent se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} A_0(u, v) &= \int_S \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \{E_v\}^t \left[(1-\nu)([D_e]_\beta^\alpha)^t [D_e]_\alpha^\beta + \nu([D_e]_\alpha^\alpha)^t ([D_e]_\beta^\beta) \right] \{E_u\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \{E_v\}^t \left[(1-\nu)([D_k]_\beta^\alpha)^t [D_k]_\alpha^\beta + \nu([D_k]_\alpha^\alpha)^t ([D_k]_\beta^\beta) \right] \{E_u\} \right) dS \\ &= L(v) \end{aligned} \quad (1.77)$$

et

$$\begin{aligned} A_1(u, v) &= \int_S \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \{E_v\}^t \left[(1-\nu)([D_e]_\beta^\alpha)^t [D_e]_\alpha^\beta + \nu([D_e]_\alpha^\alpha)^t ([D_e]_\beta^\beta) \right] \{E_u\} \right. \\ &\quad + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \{E_v\}^t \left[(1-\nu)([D_k]_\beta^\alpha)^t [D_k]_\alpha^\beta + \nu([D_k]_\alpha^\alpha)^t ([D_k]_\beta^\beta) \right] \{E_u\} \\ &\quad + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \{E_v\}^t \left[(1-\nu)([D_e]_\beta^\alpha)^t [D_Q]_\alpha^\beta + \nu([D_e]_\alpha^\alpha)^t ([D_Q]_\beta^\beta) \right] \{E_u\} \\ &\quad + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \{E_v\}^t \left[(1-\nu)([D_Q]_\beta^\alpha)^t [D_e]_\alpha^\beta + \nu([D_Q]_\alpha^\alpha)^t ([D_e]_\beta^\beta) \right] \{E_u\} \\ &\quad \left. + \frac{Eh^5}{80(1-\nu^2)} \{E_v\}^t \left[(1-\nu)([D_Q]_\beta^\alpha)^t [D_Q]_\alpha^\beta + \nu([D_Q]_\alpha^\alpha)^t ([D_Q]_\beta^\beta) \right] \{E_u\} \right) dS \\ &= L(v) \end{aligned} \quad (1.78)$$

Rappelons que $A_0(u, v) = L(v)$ est le modèle K-L classique pour coques minces alors que $A_1(u, v) = L(v)$ est le modèle approché au premier ordre de N-T "N-T best first order variational equation".

Les normes sur $(IH^1(S))^2 \times H^2(S)$ et $IH^1(S)$ sont définies respectivement par

$$\|(\eta_\alpha, \eta_\beta)\|^2 = \sum_{i=1}^3 \|\eta_i\|_{L^2(S)}^2 + \sum_{\alpha, \beta} \|\nabla_\alpha \eta_\beta\|_{L^2(S)}^2 + \sum_\alpha \|\nabla_\alpha \eta_\beta\|_{L^2(S)}^2 + \sum_{\alpha, \beta} \|\nabla_{\alpha\beta} \eta_\beta\|_{L^2(S)}^2$$

1.74

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = \sum_{i,j=1}^3 \|v_i\|_{L^2(S)}^2 + \|v_{i/j}\|_{L^2(S)}^2 \quad (1.79)$$

Le lemme 2 dans [Nzengwa et Tagne Simo] montre que la sémi-norme

$$|(\eta_\alpha, \eta_\beta)|^2 = \sum_{\alpha,\beta} \|e_{\alpha\beta}(\eta)\|_{L^2(S)}^2 + \sum_{\alpha,\beta} \|k_{\alpha\beta}(\eta)\|_{L^2(S)}^2 \quad (1.80)$$

dans $IH_{\gamma_0}^1(S) \times H_{\gamma_0}^2(S)$ est équivalente à la norme induite sur $IH^1(S) \times H^2(S)$. Et avec cette norme sur $IH_{\gamma_0}^1(S) \times H_{\gamma_0}^2(S)$ donc sur $H_{\gamma_0}^1(S) \times H_{\gamma_0}^2(S)$.

Théorème 1.3.1 (Existence et unicité) *le problème variationnel tronqué ci-dessus admet une et une seule solution (u_α, u_3) pour la norme dans $(H_{\gamma_0}^1(S))^2 \times H_{\gamma_0}^2(S)$. Et cette solution est sous la forme :*

$$u_\alpha = \xi_\alpha - z(\partial_\alpha \xi_3 + 2b_\alpha^\tau \xi_\tau) + z^2(b_\nu^\tau b_\alpha^\nu \xi_\tau + b_\alpha^\tau \partial_\alpha \xi_3) \quad u_3 = \xi_3$$

– La preuve de ce théorème peut être consultée dans [32]

1.3.3.2 Contraintes membranaires et transversales

Les expressions des contraintes membranaires sont données par : (confère [32])

$$\sigma^{\alpha\beta}(x^1, x^2, z) = \frac{1}{h} N^{\alpha\beta}(x^1, x^2) - \frac{12z}{h^3} \bar{M}^{\alpha\beta}(x^1, x^2) + \frac{80z^2}{h^5} \bar{M}^{*\alpha\beta}(x^1, x^2) \quad (1.81)$$

qui peut, en utilisant les relations (1.76) : et la transformation de vecteurs covariantes en vecteurs mixtes pour éviter la variation, on a

$$\sigma^{\alpha\beta}(x^1, x^2, z) = \frac{E}{h(1-\nu^2)} \left\{ (1-\nu) a^{\alpha\lambda} \left[e_\lambda^\beta - \frac{12z}{h^2} k_\lambda^\beta + \frac{80z^2}{h^4} Q_\lambda^\beta \right] + \nu a^{\alpha\beta} \left[e_\lambda^\lambda - \frac{12z}{h^2} k_\lambda^\lambda + \frac{80z^2}{h^4} Q_\lambda^\lambda \right] \right\} \quad (1.82)$$

Soient Γ_{jk}^i les symboles de Christoffel définis par les relations (1.44), (1.49) et (1.50).

Posons

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -3\Gamma_{13}^1 - \Gamma_{23}^2 & -2\Gamma_{23}^1 \\ -2\Gamma_{13}^2 & -3\Gamma_{23}^2 - \Gamma_{13}^1 \end{bmatrix} \quad C_\beta = \begin{pmatrix} -\sigma_{,\beta}^{1\beta} - \Gamma_{\beta 1}^1 \sigma^{1\beta} - \Gamma_{\beta 2}^1 \sigma^{2\beta} + f^1 \\ -\sigma_{,\beta}^{2\beta} - \Gamma_{\beta 1}^2 \sigma^{1\beta} - \Gamma_{\beta 2}^2 \sigma^{2\beta} + f^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la résolution des équations différentielles (1.64) nous donne :

$$\begin{pmatrix} \sigma^{13}(x^1, x^2, z) \\ \sigma^{23}(x^1, x^2, z) \end{pmatrix} = \exp(-\Lambda z) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \exp(\Lambda z) C_\beta dz \quad (1.83)$$

Pour le cas de la sphère où la fonction géométrique est définie par :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} X = R \sin(y) \cos(x) \\ Y = R \sin(y) \sin(x) \\ Z = R \cos(y) \end{cases},$$

les tenseurs métriques covariantes et contravariantes sur la surface moyenne S sont définis par :

$$(a_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} R^2 \sin^2(y) & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix} \quad (a^{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2 \sin^2(y)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{bmatrix},$$

les tenseurs de courbure (ou de la seconde forme fondamentale) covariantes et contravariantes sont donnés par

$$(b_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} R \sin^2(y) & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}; \quad (b^{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^3 \sin^2(y)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^3} \end{bmatrix}; \quad (b_{\beta}^{\alpha}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

et les symboles de Christoffel sont définis par

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0; \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \cotan(y); \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{-1}{2} \sin(2y) \\ \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = 0; \quad \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \frac{1}{h-R}; \quad \Gamma_{11}^3 = (R-h) \sin^2(y), \quad \Gamma_{22}^3 = R-h; \end{aligned}$$

Ainsi, en exploitant les expressions (1.64), nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma^{13}(x^1, x^2, z) &= \exp\left(\frac{4}{h-R}z\right) \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \exp\left(-\frac{4}{h-R}z\right) \left[-\sigma_{,x^1}^{11} - \sigma_{,x^2}^{12} - \Gamma_{\beta 1}^1 \sigma^{1\beta} - \Gamma_{\beta 2}^1 \sigma^{2\beta} + f^1 \right] dz \right\} \\ \sigma^{23}(x^1, x^2, z) &= \exp\left(\frac{4}{h-R}z\right) \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \exp\left(-\frac{4}{h-R}z\right) \left[-\sigma_{,x^1}^{21} - \sigma_{,x^2}^{22} - \Gamma_{\beta 1}^2 \sigma^{1\beta} - \Gamma_{\beta 2}^2 \sigma^{2\beta} + f^2 \right] dz \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.84)$$

En posant $\tau = \frac{-4}{h-R}$ et

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\sigma}_0^{13} &= \frac{-E}{1-\nu^2} [(a^{11}(e_1^1 + \nu e_2^2))_{,x^1} + (1-\nu)(a^{11}e_1^2)_{,x^2} + (1-\nu)\cotan(y)a^{11}e_1^2 \\ &\quad + (1-\nu)\cotan(y)a^{22}e_2^2] \\ \bar{\sigma}_1^{13} &= \frac{-E}{1-\nu^2} [(a^{11}(K_1^1 + \nu k_2^2))_{,x^1} + (1-\nu)(a^{11}k_1^2)_{,x^2} + (1-\nu)\cotan(y)a^{11}k_1^2 \\ &\quad + (1-\nu)\cotan(y)a^{22}k_2^2] \\ \bar{\sigma}_2^{13} &= \frac{-E}{1-\nu^2} [(a^{11}(Q_1^1 + \nu Q_2^2))_{,x^1} + (1-\nu)(a^{11}Q_1)_{,x^2} + (1-\nu)\cotan(y)a^{11}Q_1^2 \\ &\quad + (1-\nu)\cotan(y)a^{22}Q_2^2] \end{aligned} \right.$$

Utilisant les équations (1.83) on obtient comme première composante des contraintes transversales :

$$\sigma^{13}(x, y, z) = \left\{ -\bar{h}_-^1 \exp(-\tau(z + \frac{h}{2})) + [1 - \exp(-\tau(z + \frac{h}{2}))] \left[\frac{\bar{\sigma}_0^{13}}{\tau} + \frac{\bar{\sigma}_1^{13}}{\tau^2} + 2\frac{\bar{\sigma}_2^{13}}{\tau^3} \right] \right. \\ \left. + (z - \frac{h}{2}) \left(-\frac{\bar{\sigma}_1^{13}}{\tau} - 2\frac{\bar{\sigma}_2^{13}}{\tau^2} \right) + \left(z^2 + \frac{h^2}{4} \right) \frac{\bar{\sigma}_2^{13}}{\tau^3} \right\} \{E_u\} \quad (1.85)$$

De la même manière, posons

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\sigma}_0^{23} &= \frac{-E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu)(a^{22}e_{2,x^1}^2 + (a^{11}e_1^2)_{,x^2} + \frac{1}{2}\sin(2y)a^{11}(e_1^1 + \nu e_2^2)) \right] \\ \bar{\sigma}_1^{23} &= \frac{-E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu)(a^{22}k_{2,x^1}^2 + (a^{11}k_1^2)_{,x^2} + \frac{1}{2}\sin(2y)a^{11}(k_1^1 + \nu k_2^2)) \right] \\ \bar{\sigma}_2^{23} &= \frac{-E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu)(a^{22}Q_{2,x^1}^2 + (a^{11}Q_1^2)_{,x^2} + \frac{1}{2}\sin(2y)a^{11}(Q_1^1 + \nu Q_2^2)) \right] \end{aligned} \right.$$

On obtient la deuxième composante des contraintes transversales :

$$\sigma^{23}(x, y, z) = \left\{ -\bar{h}_-^2 \exp(-\tau(z + \frac{h}{2})) + [1 - \exp(-\tau(z + \frac{h}{2}))] [\frac{\bar{\sigma}_0^{23}}{\tau} + \frac{\bar{\sigma}_1^{23}}{\tau^2} + 2\frac{\bar{\sigma}_2^{23}}{\tau^3} + (z - \frac{h}{2})(-\frac{\bar{\sigma}_1^{23}}{\tau} - 2\frac{\bar{\sigma}_2^{23}}{\tau^2}) + (z^2 + \frac{h^2}{4})\frac{\bar{\sigma}_2^{23}}{\tau^3}] \right\} \{E_u\} \quad (1.86)$$

Bien plus, en revenant aux équations différentielles (1.65), l'expression des contraintes de cisaillement transversales est donnée par :

$$\sigma^{33}(x^1, x^2, z) = \exp(\frac{-2}{h-R}z) \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \exp(\frac{2}{h-R}z) \left[-\sigma_{,x^1}^{13} - \sigma_{,x^2}^{23} - \Gamma_{\beta\eta}^3 \sigma^{\eta\beta} - \Gamma_{\beta\eta}^\beta \sigma^{3\eta} + f^3 \right] dz \right\}$$

En posant par intégration membres à membres

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{\bar{\sigma}_{0,x^1}^{13} + \bar{\sigma}_{0,x^2}^{23}}{\tau} + \frac{\bar{\sigma}_{1,x^1}^{13} + \bar{\sigma}_{1,x^2}^{23}}{\tau^2} + \frac{\bar{\sigma}_{2,x^1}^{13} + \bar{\sigma}_{2,x^2}^{23}}{\tau^3} \\ \gamma_2 = \frac{\bar{\sigma}_{1,x^1}^{13} + \bar{\sigma}_{1,x^2}^{23}}{\tau} + 2\frac{(\bar{\sigma}_{2,x^1}^{13} + \bar{\sigma}_{2,x^2}^{23})}{\tau^2} \\ \gamma_3 = 2\frac{(\bar{\sigma}_{2,x^1}^{13} + \bar{\sigma}_{2,x^2}^{23})}{\tau^3}; \quad \varsigma = \frac{2}{h-R} = \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{23}^2 \\ \gamma_0 = \gamma_1 + \frac{h}{2}\gamma_2 - \frac{h^4}{4}\gamma_3 \\ \bar{\gamma}_1 = \frac{E(h-R)\sin^2(y)}{1-\nu^2} a^{11}(e_1^1 + \nu e_2^2) - E\frac{\cotan(y)}{1+\nu} a^{11}e_1^2 + \frac{E(h-R)}{1-\nu^2} a^{22}(e_2^2 + \nu e_1^1) \\ \bar{\gamma}_2 = \frac{E(h-R)\sin^2(y)}{1-\nu^2} a^{11}(k_1^1 + \nu k_2^2) - E\frac{\cotan(y)}{1+\nu} a^{11}k_1^2 + \frac{E(h-R)}{1-\nu^2} a^{22}(k_2^2 + \nu k_1^1) \\ \bar{\gamma}_3 = \frac{E(h-R)\sin^2(y)}{1-\nu^2} a^{11}(Q_1^1 + \nu Q_2^2) - E\frac{\cotan(y)}{1+\nu} a^{11}Q_1^2 + \frac{E(h-R)}{1-\nu^2} a^{22}(Q_2^2 + \nu Q_1^1) \end{array} \right.$$

Nous obtenons l'expression des contraintes de cisaillement transversales compte tenu des conditions initiales et aux limites (1.65) définie par :

$$\begin{aligned} \sigma^{33}(x, y, z) = & \left\{ \left[\frac{\gamma_0}{\varsigma-\tau} - \gamma_2 \left(\frac{z}{\varsigma-\tau} - \frac{1}{(\varsigma-\tau)^2} \right) + \gamma_3 \left(\frac{z^2}{\varsigma-\tau} - \frac{2z}{(\varsigma-\tau)^2} + \frac{2}{(\varsigma-\tau)^3} \right) \right] \exp(-\tau(z - \frac{h}{2})) \right. \\ & + \left[\frac{\bar{\gamma}_1 - \gamma_0}{\varsigma} + (\gamma_2 - \bar{\gamma}_2) \left(\frac{z}{\varsigma} - \frac{1}{\varsigma^2} \right) + (\bar{\gamma}_3 - \gamma_3) \left(\frac{z^2}{\varsigma} - \frac{2z}{\varsigma^2} + \frac{2}{\varsigma^3} \right) \right] \\ & + \exp(-\tau(z - \frac{h}{2})) \left[\bar{h}_+^3 + \frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}_1}{\varsigma} + (\bar{\gamma}_2 - \gamma_2) \left(\frac{h}{2\varsigma} - \frac{1}{\varsigma^2} \right) + (\gamma_3 - \bar{\gamma}_3) \left(\frac{h^2}{4\varsigma} - \frac{h}{\varsigma^2} + \frac{2}{\varsigma^3} \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{\gamma_0}{\varsigma-\tau} + \gamma_2 \left(\frac{h}{2(\varsigma-\tau)} - \frac{1}{(\varsigma-\tau)^2} \right) - \gamma_3 \left(\frac{h^2}{4(\varsigma-\tau)} - \frac{h}{(\varsigma-\tau)^2} + \frac{2}{(\varsigma-\tau)^3} \right) \right] \right\} \{E_u\} \quad (1.87) \end{aligned}$$

Pour le cas du cylindre où la fonction géométrique est définie par :

$$\overrightarrow{OM} \left\{ \begin{array}{l} X = R\cos(x) \\ Y = R\sin(x) \\ Z = y \end{array} \right.$$

Où x et y sont des coordonnées curvilignes, $0 \leq y \leq L$ et $0 < x < \Pi/2$; R est le rayon du cylindre et X, Y, Z acoordonnées globales.

les tenseurs métriques covariantes et contravariantes sur la surface moyenne S sont définis par $:(a_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$ $(a^{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{bmatrix}$ et les tenseurs de courbure (ou de la

seconde forme fondamentale) respectivement covariantes et contravariantes sont donnés par :

$$(b_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}; \quad (b^{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R^3} \end{bmatrix}; \quad (b_{\beta}^{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R} \end{bmatrix}$$

Posons h l'épaisseur du cylindre ; les symboles de Christoffel sont définis par :

$$\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} = 0; \quad 1 \leq \alpha, \beta, \lambda \leq 2$$

$$\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = 0; \quad \Gamma_{22}^3 = z - R; \quad \Gamma_{23}^2 = \frac{1}{z-R};$$

En exploitant les expressions (1.64), nous avons : en posant $\tau = \frac{-1}{h-R}$, $\varsigma = \frac{3}{h-R}$ et

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_0^{13} = \frac{-E}{1-\nu^2} [(a^{11}(e_1^1 + \nu e_2^2))_{,x^1} + (1-\nu)(a^{11}e_1^2)_{,x^2}] \\ \bar{\sigma}_1^{13} = \frac{-E}{1-\nu^2} [(a^{11}(K_1^1 + \nu k_2^2))_{,x^1} + (1-\nu)(a^{11}k_1^2)_{,x^2}] \\ \bar{\sigma}_2^{13} = \frac{-E}{1-\nu^2} [(a^{11}(Q_1^1 + \nu Q_2^2))_{,x^1} + (1-\nu)(a^{11}Q_1^2)_{,x^2}] \end{cases}$$

nous obtenons comme première composante des contraintes transversales :

$$\begin{aligned} \sigma^{13}(x, y, z) = & \left\{ -\bar{h}_-^1 \exp(-\tau(z + \frac{h}{2})) + [1 - \exp(-\tau(z + \frac{h}{2}))] \left[\frac{\bar{\sigma}_0^{13}}{\tau} + \frac{\bar{\sigma}_1^{13}}{\tau^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\frac{\bar{\sigma}_2^{13}}{\tau^3} + (z - \frac{h}{2}) \left(-\frac{\bar{\sigma}_1^{13}}{\tau} - 2\frac{\bar{\sigma}_2^{13}}{\tau^2} \right) + (z^2 + \frac{h^2}{4}) \frac{\bar{\sigma}_2^{13}}{\tau^3} \right] \right\} \{E_u\} \end{aligned} \quad (1.88)$$

De même, en posant

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_0^{23} = \frac{-E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu)(a^{22}e_{2,x^1}^2 + (a^{11}e_1^2)_{,x^2}) \right] \\ \bar{\sigma}_1^{23} = \frac{-E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu)(a^{22}k_{2,x^1}^2 + (a^{11}k_1^2)_{,x^2}) \right] \\ \bar{\sigma}_2^{23} = \frac{-E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu)(a^{22}Q_{2,x^1}^2 + (a^{11}Q_1^2)_{,x^2}) \right] \end{cases}$$

avec une intégration par partie de (1.64), nous obtenons la deuxième composante des contraintes transversales :

$$\begin{aligned} \sigma^{23}(x, y, z) = & \left\{ -\bar{h}_-^2 \exp(-\varsigma(z + \frac{h}{2})) + [1 - \exp(-\varsigma(z + \frac{h}{2}))] \left[\frac{\bar{\sigma}_0^{23}}{\varsigma} + \frac{\bar{\sigma}_1^{23}}{\varsigma^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\frac{\bar{\sigma}_2^{23}}{\varsigma^3} + (z - \frac{h}{2}) \left(-\frac{\bar{\sigma}_1^{23}}{\varsigma} - 2\frac{\bar{\sigma}_2^{23}}{\varsigma^2} \right) + (z^2 + \frac{h^2}{4}) \frac{\bar{\sigma}_2^{23}}{\varsigma^3} \right] \right\} \{E_u\} \end{aligned} \quad (1.89)$$

Revenant aux équations (1.65), et en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{\bar{\sigma}_{0,x^1}^{13}}{\tau} + \frac{\bar{\sigma}_{0,x^2}^{23}}{\varsigma} + \frac{\bar{\sigma}_{1,x^1}^{13}}{\tau^2} + \frac{\bar{\sigma}_{1,x^2}^{23}}{\varsigma^2} + \frac{\bar{\sigma}_{2,x^1}^{13}}{\tau^3} + \frac{\bar{\sigma}_{2,x^2}^{23}}{\varsigma^3} \\ \gamma_2 = \frac{\bar{\sigma}_{1,x^1}^{13}}{\tau} + \frac{\bar{\sigma}_{1,x^2}^{23}}{\varsigma} + 2\frac{\bar{\sigma}_{2,x^1}^{13}}{\tau^2} + 2\frac{\bar{\sigma}_{2,x^2}^{23}}{\varsigma^2} \\ \gamma_3 = 2\frac{\bar{\sigma}_{2,x^1}^{13}}{\tau^2} + 2\frac{\bar{\sigma}_{2,x^2}^{23}}{\varsigma^2}; \quad \iota = \frac{1}{h-R} = \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{23}^2 \\ \gamma_0 = \gamma_1 + \frac{h}{2}\gamma_2 - \frac{h^4}{4}\gamma_3 \\ \bar{\gamma}_1 = \frac{E(h-R)}{1-\nu^2}a^{22}(e_2^2 + \nu e_1^1) \\ \bar{\gamma}_2 = \frac{E(h-R)}{1-\nu^2}a^{22}(k_2^2 + \nu k_1^1) \\ \bar{\gamma}_3 = \frac{E(h-R)}{1-\nu^2}a^{22}(Q_2^2 + \nu Q_1^1) \end{array} \right.$$

compte tenu des conditions initiales et aux limites de (1.65) nous avons les contraintes de cisaillement transversales en considérant $\bar{h}_-^3 \equiv 0$:

$$\begin{aligned} \sigma^{33}(x, y, z) = & \left\{ \left[\frac{\gamma_0}{\varsigma-\tau} - \gamma_2 \left(\frac{z}{\varsigma-\tau} - \frac{1}{(\varsigma-\tau)^2} \right) + \gamma_3 \left(\frac{z^2}{\varsigma-\tau} - \frac{2z}{(\varsigma-\tau)^2} + \frac{2}{(\varsigma-\tau)^3} \right) \right] \right. \\ & \exp(-\tau(z - \frac{h}{2})) + \left[\frac{\bar{\gamma}_1 - \gamma_0}{\varsigma} + (\gamma_2 - \bar{\gamma}_2) \left(\frac{z}{\varsigma} - \frac{1}{\varsigma^2} \right) + (\bar{\gamma}_3 - \gamma_3) \right. \\ & \left. \left(\frac{z^2}{\varsigma} - \frac{2z}{\varsigma^2} + \frac{2}{\varsigma^3} \right) \right] + \exp(-\tau(z - \frac{h}{2})) \left[\bar{h}_+^3 + \frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}_1}{\varsigma} + (\bar{\gamma}_2 - \gamma_2) \right. \\ & \left. \left(\frac{h}{2\varsigma} - \frac{1}{\varsigma^2} \right) + (\gamma_3 - \bar{\gamma}_3) \left(\frac{h^2}{4\varsigma} - \frac{h}{\varsigma^2} + \frac{2}{\varsigma^3} \right) + \frac{\gamma_0}{\varsigma-\tau} + \gamma_2 \left(\frac{h}{2(\varsigma-\tau)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{(\varsigma-\tau)^2} \right) - \gamma_3 \left(\frac{h^2}{4(\varsigma-\tau)} - \frac{h}{(\varsigma-\tau)^2} + \frac{2}{(\varsigma-\tau)^3} \right) \right] \} \{E_u\}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Chapitre 2

DISCRÉTISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DU PROBLÈME TRONQUÉ

Dans ce chapitre, il sera abordé l'approximation du problème variationnel tronqué (1.74) par la méthode des éléments finis dont l'une des méthodes directes de discrétisation est celle de Galerkin où les champs de contraintes éléments finis obtenus par l'approche déplacement présente une évidente lacune par rapport au champ exact. Ils sont discontinus aux interfaces entre les éléments qui sont de petites surfaces planes. Ceci vient du fait que les fonctions d'interpolation des déplacements sont seulement de continuité C^0 le long de ces interfaces et l'objectif étant d'approximer ces déplacements par des fonctions affines.

Comme nous l'avons énoncé au chapitre précédent, les deux modèles de coques fréquemment utilisés sont Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin. Lorsqu'on utilise les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love, l'expression de la déformation s'appuie sur le changement de la deuxième forme fondamentale (tenseur de variation de courbure) $k_{\alpha\beta}$. Le modèle N-T qui est une forme généralisée du modèle K-L utilise en plus, des termes additionnels sur le changement de la troisième forme fondamentale de la surface moyenne de la coque $Q_{\alpha\beta}$. Et à l'intérieur de ces tenseurs apparaît la dérivée seconde $u_{3,\alpha\beta}$ du déplacement normal de la coque qui est présent dans l'expression de l'énergie de déformation. Ce qui signifie que la dérivée $u_{3,\alpha}$ doit être continue à l'intérieur mais aussi aux interfaces entre deux éléments adjacents ; alors une approximation du déplacement u_3 n'est possible que s'il est de continuité C^1 entre ces interfaces pour avoir un élément fini conforme. Si on utilise l'hypothèse cinématique de Reissner-Mindlin, seules les dérivées premières interviennent dans le calcul de la déformation et la conformité de l'élément fini n'est assurée que lorsque la continuité est C^0 aux interfaces entre deux éléments.

En rappelant toujours que le modèle N-T est la forme généralisée du modèle K-L dont la métrique utilise la base réelle de la coque, il nous apparaît important de rester dans cette hypothèse de déformation plane générale, mais en conservant une continuité C^0 . Cette démarche nécessite d'utiliser moins de cinq degrés de liberté par noeud pour réduire le temps de calcul afin d'éviter le phénomène de blocage lorsque nous allons faire varier l'épaisseur de la coque. Et cette opération nous ramène en théorie des coques de

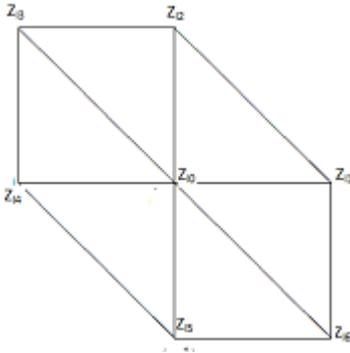
Reissner-Mindlin.

Plusieurs recherches relativement récentes ont consisté à transformer cet indicateur en une mesure de l'erreur. En utilisant le modèle déplacement $\sigma_h = H[\epsilon(u_h)]$ où σ_h est la contrainte éléments finis, u_h la solution approchée, et en considérant un champ de contraintes continu $\bar{\sigma}$ le plus proche possible de la solution exacte, l'erreur est estimée de manière classique par la norme énergétique de la distance entre la solution éléments finis et le champ de contraintes lissé

$$err_e = \left[\int_{\Omega_e} (\bar{\sigma} - \sigma_h)^T H^{-1} (\bar{\sigma} - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}$$

Parmi les méthodes permettant de minimiser au sens des moindres carrées cette distance entre le champ continu $\bar{\sigma}$ et le champ éléments finis σ_h , on peut citer la technique du "polynomial Preserving Recovery" déduite de la méthode de reconstruction du gradient. Cette dernière méthode PPR cadre avec nos objectifs : le calcul des déplacements et des contraintes nodales en s'appuyant sur des valeurs des contraintes éléments finis dont les éléments sont connectés au noeud considéré. Pour plus de simplicité, il sera fait recours dans toute la suite au maillage triangulaire régulier où la connection entre les éléments qui sont des surfaces planes est simple et présentée de la façon suivante :

FIGURE 2.1 – Maillage sur les éléments connectés à un noeud



Le passage du problème continu au problème discret nécessite le choix des fonctions de forme ou fonctions d'interpolation N_i qui relient les déplacements d'un point quelconque intérieur à un élément aux N_h déplacements nodaux u_i qui sont des nouvelles inconnues du problème discret ; on a $u(x, y) = \sum_{i=1}^{N_h} u_i N_i(x, y)$. Si u_h est la solution élément finis C^0

qui approxime u , alors $u_h(x, y) = \sum_{i=1}^{N_h} u_i N_i^h(x, y)$. En prenant

$$\begin{cases} E_1 = (I, J, K) \\ E_2 = (I, J, L) \end{cases}$$

deux triangles ayant un noeud commun I , alors on note

$$\begin{cases} U_1 = (U_h^I, U_h^J, U_h^K), \\ U_2 = (U_h^I, U_h^J, U_h^L) \end{cases}$$

la valeur des déplacements dans les triangles respectifs E_1 et E_2 . La restriction de u_h à chacun de ces éléments est :

$$\begin{cases} u_{h|E_1} = N_1^h U_1^t, u_{h|E_2} = N_2^h U_2^t, \\ u'_{h|E_1} = N_1^{th} U_1^t, u'_{h|E_2} = N_2^{th} U_2^t \end{cases}$$

où N_i^{th} sont les dérivées de N_i^h par rapport aux variables x ou y . Au noeud commun I , la dérivée de u_h , $u'_h(I)$, n'est pas la même pour les deux éléments E_1 et E_2 . Cela veut dire que dans la région ayant I pour point commun comme présenté à la figure ci-dessus, le gradient de u_h , ∇u_h , ne peut pas être calculé à cause du saut au voisinage du point I . Conséquence, ∇u_h n'est pas la meilleure approximation de ∇u à travers les éléments et les contraintes- déformations calculées utilisant ∇u ne peuvent pas être continues à travers les côtés des triangles. La question évidente est comment définir de façon unique et optimale ∇u_h au noeud I commun aux différents éléments afin d'assurer la continuité de ces paramètres aux interfaces des éléments !

Malgré les difficultés relevées, nous nous plierons aux exigences qu'imposent une méthode d'approximation classique. C'est pourquoi dans ce chapitre nous nous évertuerons à présenter tout d'abord la méthode PPR qui permettra de minimiser au mieux l'écart entre le champ de contraintes transversales continu et éléments finis. En suite, il sera élaborer l'espace d'approximation où est localisée la solution éléments finis suivi de son schéma numérique. Cette discrétisation sera terminée par l'établissement d'un code éléments finis (matrice de rigidité élémentaire, connectivité et assemblage des éléments du maillage) qui est le socle de notre nouveau élément fini appliqué au modèle N-T.

2.1 Méthode de reconstruction du gradient par la technique du PPR

Considérons $S \subset \mathbb{R}^2$ la surface moyenne de la coque et ∂S son bord. Soit $(x, y) \in S$ les coordonnées d'un point $Z_I = Z_{I0}$ du domaine de la solution $U_{ad} = (H_{\gamma_0}^1(S))^2 \times H_{\gamma_0}^2(S)$ considéré comme origine d'une partition T_h de S (comme indiqué dans la figure ci-dessus). Soit h_I la plus grande des longueurs des côtés attachées à Z_I et $\mathfrak{S}_{h_I}(Z_I) = \{Z \in U_{ad} / |Z - Z_I| < h_I\}$ une boule ouverte de centre Z_I et de rayon h_I . l'ensemble $\{\mathfrak{S}_{h_I}(Z_I)\}_{I=1}^n$ recouvre S (ou est un recouvrement de S) si seulement si $S \subset \bigcup_{I=1}^n \mathfrak{S}_{h_I}(Z_I)$.

Utilisant cette approche, si le nombre n de noeuds (inclu z_I) est inférieur à $m = (k+2)(k+3)/2$, (ici k est le degré du polynôme nécessaire pour interpoler le paramètre qui dans notre cas est le déplacement) nous élargissons le domaine en prenant les noeuds contenus dans $B_{2h_I}(z_I)$, et on continue le processus jusqu'à obtenir la condition $n \geq m$ qui

est la technique de recouvrement PPR de [57]. L'idée de cette technique du PPR est de définir un opérateur local G_h tel que $G_h u_h(Z_I)$ soit unique à travers tout élément connecté à I de telle manière que $|G_h u_h - \nabla u|$ soit meilleure approximation que $|\nabla u_h - \nabla u|$. Ce qui nous permet d'envisager une convergence rapide (ou superconvergence) car la méthode PPR vient garantir la superconvergence de $G_h u_h$ vers ∇u indépendamment du type de maillage.

En effet, soit Z_i le noeud où ∇u doit être déterminé. Soit Z_i^j les noeuds de tous les triangles E_j ayant Z_i comme sommet commun. Supposons que $u_h|_{E_j} \in P_{k+1}$, l'ensemble des polynômes de degrés $k+1$, alors la méthode de reconstruction du gradient par la technique du PPR consiste à définir un polynôme $p \in P_{k+1}$ tel que

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N_h} (p(x + \tau_j) - u_h(x + \tau_j))^2 = \min_{q \in P_{k+1}} \sum_{j=1}^{N_h} (q(x + \tau_j) - u_h(x + \tau_j))^2 \\ G_h u_h(Z_i) = \nabla p(Z_i) \end{cases} \quad (2.1)$$

Cette valeur dépend de l'échantillon de points choisis. L'approche par la méthode de reconstruction du gradient de Zienkiewicz-zhu est basée sur la discrétisation locale au sens des moindres carrés et améliorée par Zhimin.Z et Ahmed.N dans [57] stipulant que dans le plan, si le nombre de noeuds $n \geq (k+2)(k+3)/2$ et si la somme de deux angles adjacents dans le maillage est inférieur à la valeur π , alors $G_h u_h(Z_i)$ est unique pour tout point Z_i . Dans tout ce qui suit nous allons utiliser un maillage triangulaire où quelque soit le nombre de région dû au raffinement du maillage, cette propriété est vérifiée et nous avons la relation :

$$G_h u_h(Z_i) = \nabla p(x_i, y_i) = \nabla \tilde{p}(0, 0) \simeq \nabla u(x_i, y_i) \quad (2.2)$$

Le polynôme construit au sens des moindres carrés est sous la forme :

$$P_{k+1}(x, y; z_I) = IP^T a = \tilde{I}P^T \tilde{a} \quad (2.3)$$

avec

$$IP^T = (1, x, y, x^2, \dots, x^{k+1}, x^k y, \dots, y^{k+1})$$

$$\tilde{I}P^T = (1, \xi, \eta, \xi^2, \dots, \xi^{k+1}, \xi^k \eta, \dots, \eta^{k+1})$$

Nous pouvons dimensionner notre élément de région de telle manière que $x = h\xi$ et $y = h\eta$

$$a^T = (a_1, a_2, \dots, a_m)$$

$$\tilde{a}^T = (a_1, ha_2, ha_3, \dots, h^{k+1}a_m)$$

Le vecteur \tilde{a} est déterminé par le système linéaire :

$$A^T A \tilde{a} = A^T b_h \quad (2.4)$$

où

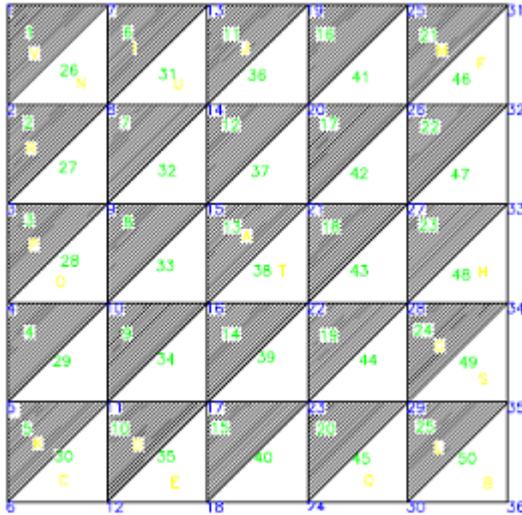
$$\begin{cases} \vec{b}_h^T &= (u(z_{I1}), u(z_{I2}), \dots, u(z_{In})) \\ \vec{\xi} &= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ \vec{\eta} &= (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \\ \vec{\xi\eta} &= (\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \dots, \xi_n\eta_n) \\ \vec{e} &= \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n \right) \\ A &= \left(\vec{e}, \vec{\xi}, \vec{\eta}, \left(\vec{\xi}\right)^2, \dots, \left(\vec{\xi}\right)^k \vec{\eta}, \dots, \left(\vec{\eta}\right)^{k+1} \right) \end{cases} \quad (2.5)$$

L'équation (2.4) admet une solution unique si le rang de la matrice A est égal à m

$$\text{rang}(A) = m \quad (2.6)$$

Utilisant toujours un maillage triangulaire, comme représenté dans la figure ci-dessous,

FIGURE 2.2 – Triangulation de la surface moyenne S



nous devons distinguer plusieurs types de noeuds : les noeuds-internes à l'intérieur du domaine, les noeuds-coins aux bords du domaine et les noeuds- milieux toujours aux bords du domaine. Et suivant le type de noeud, la discrétisation suivant les éléments finis de classe C^0 est différente :

- Pour les déplacements membranaires u_α ($\alpha = 1; 2$), on a rappelé dans [32] que l'existence et l'unicité de la solution est garantie si $(u_1, u_2) \in (H_{\gamma_0}^1(S))^2$. Ainsi, nous allons interpoler ces déplacements par des fonctions affines de la forme :

$$P_1(x, y) = (1, x, y) (a_0, a_1, a_3)^t = (1, \xi, \varsigma) (\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \widehat{a}_2)^t \quad (2.7)$$

par une transformation conforme de facteur h , on peut avoir $x = h\xi$ et $y = h\varsigma$; où $(\vec{\xi}, \vec{\varsigma})$ sont les vecteurs de coordonnées barycentriques au centre de chaque élément des valeurs des dérivées aux six éléments connectés au point $Z_I = (x, y)$.

Posons $e = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $\widehat{a} = (\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \widehat{a}_2) = (a_0, ha_1, ha_2)$, $A = (e, \vec{\xi}, \vec{\varsigma})$, $H = \text{diag}(\text{diag}(1, h, h))$.

Considérons $\bar{b}_h = (u_\alpha^i)_{i=1}^6$ l'approximation de u_α aux noeuds Z_I^i $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; et nous déterminons \widehat{a} de telle manière que $A\widehat{a} = \bar{b}_h$.

Alors, nous obtenons

$$P_1(x, y) = (1, x, y) H^{-1}(A^t A)^{-1} A^t \bar{b}_h \quad (2.8)$$

remarquons que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P_1}{\partial x}(x, y) = (0, 1, 0) H^{-1}(A^t A)^{-1} A^t \bar{b}_h = [P_1 X_\alpha^1] \bar{b}_h \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, y) = (0, 0, 1) H^{-1}(A^t A)^{-1} A^t \bar{b}_h = [P_1 X_\alpha^2] \bar{b}_h \end{cases} \quad (2.9)$$

Donc pour interpoler les déplacements membranaires u_α dans chaque élément triangulaire, nous n'avons besoin que de ses trois noeuds sommet qui sont les inconnues des polynômes linéaires.

- Pour les déplacements transverses u_3 , l'existence et l'unicité de la solution sont garanties si $(u_3) \in H^2(S)$; pour cela il faut l'interpoler par des polynômes quadratiques de la forme :

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= (1, x, y, x^2, xy, y^2) (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)^t \\ &= (1, \xi, \varsigma, \xi^2, \xi\varsigma, \varsigma^2) (\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \widehat{a}_3, \widehat{a}_4, \widehat{a}_5, \widehat{a}_6)^t \end{aligned} \quad (2.10)$$

où $x = h\xi$ et $y = h\varsigma$; avec (ξ, ς) qui sont les coordonnées des noeuds des points de chaque élément de la partition, donc les dérivées existent. Soit $e = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$,

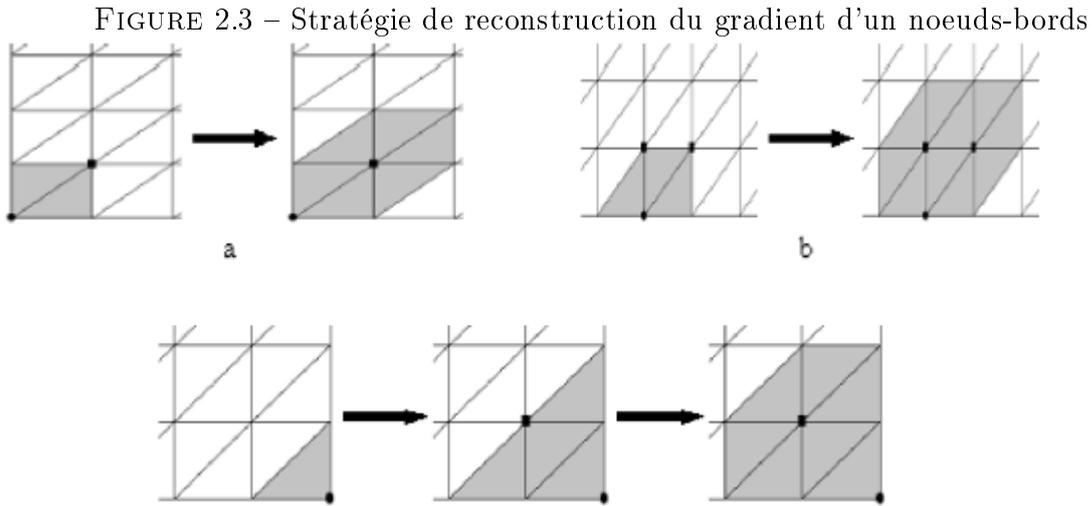
$$\widehat{a} = (\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \widehat{a}_3, \widehat{a}_4, \widehat{a}_5, \widehat{a}_6) = (a_1, ha_2, ha_3, h^2 a_4, h^2 a_5, h^2 a_6)$$

les vecteurs de la matrice $B = (e, \vec{\xi}, \vec{\varsigma}, \vec{\xi}^2, \vec{\xi}\vec{\varsigma}, \vec{\varsigma}^2)$ et considérons la matrice diagonale $H_1 = \text{diag}(\text{diag}(1, h, h, h^2, h^2, h^2))$ et aussi $\bar{b}_h = (u_3^0, u_3^1, u_3^2, u_3^3, u_3^4, u_3^5, u_3^6)^t$ une approximation de u_3 au point Z_I ; alors $P_2(x, y) = (1, x, y, x^2, xy, y^2) H_1^{-1}(B^t B)^{-1} B^t \bar{b}_h$, et nous obtenons une interpolation du gradient de u_3 dans une partition quelconque par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_3}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P_2}{\partial x}(x, y) = (0, 1, 0, 2x, y, 0) H_1^{-1}(B^t B)^{-1} B^t \bar{b}_h = [P_2 X_3^1] \bar{b}_h \\ \frac{\partial u_3}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial P_2}{\partial y}(x, y) = (0, 0, 1, 0, x, 2y) H_1^{-1}(B^t B)^{-1} B^t \bar{b}_h = [P_2 X_3^2] \bar{b}_h \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}(x, y) = (0, 1, 0, 2, 0, 0) H_1^{-1}(B^t B)^{-1} B^t \bar{b}_h = [P_2 X_3^{11}] \bar{b}_h \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial y}(x, y) = (0, 0, 0, 0, 1, 0) H_1^{-1}(B^t B)^{-1} B^t \bar{b}_h = [P_2 X_3^{12}] \bar{b}_h \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2}(x, y) = (0, 0, 0, 0, 0, 2) H_1^{-1}(B^t B)^{-1} B^t \bar{b}_h = [P_2 X_3^{22}] \bar{b}_h \end{cases} \quad (2.11)$$

Pour interpoler les déplacements transversaux u_3 dans chaque élément triangulaire, nous avons besoin de six noeuds dont les trois noeuds-sommets et les trois noeuds-milieux de chaque côté du triangle ; ceci représente les inconnues des polynômes quadratiques.

Avec $G_h u_i$ donné à chaque sommet, par les mêmes processus que dans (2.9) et (2.11), nous sommes capable de former un champ de gradients reconstruit par une base de fonctions qui interpole ces gradients. Toutefois, le recouvrement du gradient aux noeuds situés aux bord ∂S de S est très délicate. La technique du PPR dans [57] utilise une stratégie expérimentale pour simuler le recouvrement du gradient des déplacements aux sommets des noeuds $z_I \in \partial S$, ceci en prenant les couches des sommets très proche de z_I qui contiennent au moins un noeud-interne. Considérons cette nième couche et notons par z_1, z_2, \dots, z_m , les noeuds-internes de ces couches, où $m \geq 1$. L'union des choix des points utilisés pour le reconstruction du gradient aux points z_1, z_2, \dots, z_m et les n premiers noeuds près de z_I constituent l'ensemble choisi pour le reconstruction du gradient au point z_I (confère [57]) et illustré par les figures suivantes :



Ainsi cette technique du PPR pour reconstruire le gradient en tout point du maillage triangulaire régulier, nous facilite l'approximation du problème variationnel tronqué (1.74) par la discrétisation par éléments finis des champs de contraintes transversales obtenus par l'approche déplacement assurant la continuité C^0 aux interfaces des éléments adjacents. La présentation de l'espace des fonctions de formes qui interpolent la solution de notre problème ainsi que le schéma numérique qui garantit la convergence rapide de cette solution éléments finis vers la solution exacte est opportun.

Définition 2.1.1 *soit T_j un élément quelconque (un segment, un triangle, un polygone, etc..), P^{T_j} l'espace des polynômes en x et y de degré 1 ou 2, E^{T_j} un ensemble fini de points de T_j ; alors un élément fini de Lagrange est la donnée du triplet (T_j, E^{T_j}, P^{T_j}) tel que E^{T_j} réalise la P^{T_j} unisolvance (l'application linéaire de P^{T_j} dans \mathbb{R}^N est un isomorphisme) ;*

Définition 2.1.2 *Un élément fini est de classe C^0 si l'interpolation du déplacement sur l'élément T_j quelconque de T_h peut être fait par des fonctions affines même si aux noeuds de l'élément on a des fonctions continues.*

2.2 Espace d'interpolation

La continuité forte de notre problème variationnel tronqué (1.74) est définie dans l'espace U_{ad} . Soit T_j un élément triangulaire de noeuds sommet $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$ et $a_3 = (x_3, y_3)$. Supposons P_1 et P_2 les polynômes d'ordre respectif un et deux avec pour bases respectives $\{1, x, y\}$ et $\{1, x, y, x^2, y^2, xy\}$; alors les bases de fonctions barycentriques respectives $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ et $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 4\lambda_1\lambda_2, 4\lambda_1\lambda_3, 4\lambda_2\lambda_3\}$ générant ces polynômes P_1 et P_2 sont définies dans ce triangle par :

$$\begin{cases} \lambda_1(x, y) = \frac{1}{2\Delta}[(y_3 - y_2)(x_2 - x) - (x_3 - x_2)(y_2 - y)] \\ \lambda_2(x, y) = \frac{1}{2\Delta}[(y_1 - y_3)(x_3 - x) - (x_1 - x_3)(y_3 - y)] \\ \lambda_3(x, y) = \frac{1}{2\Delta}[(y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(y_1 - y)] \end{cases} \quad (2.12)$$

$$2 \Delta = 2 \int_{T_j} dx dy = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_3 - x_2)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_2) \quad (2.13)$$

T_h étant une triangularisation de la surface moyenne de la coque, n_h le nombre de triangles et N_h le nombre de noeuds. Nous notons :

$$X_h^1 = \{v_h \in C^0(\bar{S}), v_h|_{T_j} \in P_1(T_j), \forall T_j, j = 1, \dots, n_h\}$$

le sous espace vectoriel de $H_{\gamma_0}^1(S)$ de dimension N_h et

$$X_h^2 = \{v_h \in C^1(\bar{S}), v_h|_{T_j} \in P_2(T_j), \forall T_j, j = 1, \dots, n_h \text{ et } \nabla v_h = G_h v_h = \nabla P_2\},$$

le sous espace vectoriel de $H_{\gamma_0}^2(S)$ de dimension N_h^2 qui est le nombre de noeuds unisolvants (noeuds-sommet et noeuds-milieux). Alors

$$\mathcal{U}_h = X_h^1 \times X_h^1 \times X_h^2$$

est un sous espace vectoriel de $U_{ad} = (H_{\gamma_0}^1(S))^2 \times H_{\gamma_0}^2(S)$ où les vecteurs sont les polynômes de la forme P_1 et P_2 et cet espace vectoriel \mathcal{U}_h est de dimension $N = 2N_h + N_h^2$.

2.3 Schéma numérique du problème variationnel tronqué

Soit T_h une triangularisation de la coque à travers sa surface moyenne S , $T_j \in T_h$ un élément triangulaire de sommets a_1, a_2, a_3 et de noeuds-milieux des côtés a_4, a_5, a_6 . Soit un élément quelconque $\eta^h \in \mathcal{U}_h$ défini ainsi qu'il suit :

$$\eta_\alpha^h(x, y) |_{T_j} \in P_1, \quad \alpha = 1, 2; 1 \leq j \leq n_h \quad (2.14)$$

et

$$\eta_3^h(x, y) |_{T_j} \in P_2, \quad 1 \leq j \leq n_h \quad (2.15)$$

En utilisant les polynômes barycentriques et en écrivant $\lambda_4 = \lambda_1$, $1 \leq l \leq 2$; $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$ et $1 \leq j \leq n_h$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_\alpha^h(x, y) |_{T_j} = \sum_{k=1}^3 \eta_\alpha^h(a_k) \lambda_k(x, y) = \sum_{k=1}^3 \bar{\eta}_\alpha^k \lambda_k(x, y) \\ \eta_3^h(x, y) |_{T_j} = \sum_{k=1}^3 \eta_3^h(a_k) \lambda_k(x, y) + \sum_{k=4}^6 \eta_3^h(a_k) \lambda_{k-3}(x, y) \lambda_{k-2}(x, y) \\ \quad = \sum_{k=1}^3 \bar{\eta}_3^k \lambda_k(x, y) + \sum_{k=4}^6 \bar{\eta}_3^k \lambda_{k-3}(x, y) \lambda_{k-2}(x, y) \\ \partial_\alpha \eta_3^h(x, y) |_{T_j} = \sum_{k=1}^3 \partial_\alpha \eta_3^h(a_k) \lambda_k(x, y), \quad \partial_\alpha \eta_l^h(a_k) = G_h(\eta_l^h)(a_k) \\ \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(x, y) |_{T_j} = \sum_{k=1}^3 \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_k) \lambda_k(x, y), \quad \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_k) = G_h(\partial_\alpha \eta_3^h)(a_k) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Dans ces formules, G_h est l'opérateur du gradient défini dans la méthode PPR ; $\bar{\eta}_3^4, \bar{\eta}_3^5$ et $\bar{\eta}_3^6$ sont respectivement les fonctions inconnues de η_3 aux noeuds-milieux des côtés a_1a_2 , a_1a_3 et a_2a_3 .

Ainsi, notre nouveau problème variationnel faible est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \eta^h \in \mathcal{U}_h \\ \text{tel que} \\ A_s(\eta^h, \xi^h) = L(\xi^h) \quad \forall \xi^h \in \mathcal{U}_h \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Théorème 2.3.1 (Existence et unicité du problème variationnel faible) *le problème variationnel faible (2.17) ci-dessus admet une et une seule solution η^h dans \mathcal{U}_h formée des n_h fonctions. De toute façon, quand $\eta^h \in \mathcal{U}^h$; il peut être écrit par :*

$$\eta^h(x) = \sum_{i=1}^{n_h} \eta_i^h \lambda_i(x) \quad \forall x \in \bar{S}$$

et le problème revient à déterminer les fonctions η_i^h .

- l'espace \mathcal{U}_h étant un sous espace vectoriel fermé de U_{ad} , la norme dans U_{ad} est la même dans \mathcal{U}_h ; on applique Lax-Milgram .

2.4 Convergence du schéma numérique

Théorème 2.4.1 (De convergence du schéma numérique 1) *Etant donné une triangulation T_h de la coque à travers sa surface moyenne S , soit ; $\eta^h = (\eta_\alpha^h, \eta_\beta^h)_{\alpha=1,2} \in \mathcal{U}_h$ la projection orthogonale de la solution (exacte) $\eta = (\eta_\alpha, \eta_\beta)_{\alpha=1,2}$ sur \mathcal{U}_h . Pour la norme $\|\bullet\|_{U_{ad}}$ où $U_{ad} = (IH^1(S))^2 \times H^2(S)$ définie par :*

$$\begin{aligned} \|(\eta_\alpha, \eta_\beta)\|^2 &= \sum_{i=1}^3 \|\eta_i\|_{L^2(S)}^2 + \sum_{\alpha,\beta} \|\nabla_\alpha \eta_\beta\|_{L^2(S)}^2 \\ &\quad + \sum_\alpha \|\nabla_\alpha \eta_\beta\|_{L^2(S)}^2 + \sum_{\alpha,\beta} \|\nabla_{\alpha\beta} \eta_\beta\|_{L^2(S)}^2 \end{aligned}$$

Le schéma numérique (2.14)-(2.16) converge.

Lemme : S étant de mesure finie, on a l'injection continue $L^\infty(S) \hookrightarrow L^2(S)$.

\textbf{Preuve :} en effet, pour $f \in L^\infty(S)$, on a $\int_S |f(x)| dx \leq \sup_{x \in S} |f(x)|^2 \int_S dx \leq \text{mes}(S) \|f\|_{L^\infty(S)}^2$; d'où

$$\|f\|_{L^2(S)} \leq \sqrt{\text{mes}(S)} \|f\|_{L^\infty(S)}.$$

Preuve(convergence) : Considérons la différence $\eta(x, y) - \eta^h(x, y)$ sur l'un des triangles de T_h , comme illustré précédemment, $G_h : \mathcal{U}_h \rightarrow \mathcal{U}_h$ est l'opérateur (polynôme) qui préserve la reconstruction dans le sens où $G_h \eta^h = \nabla \eta^h = P_k$, $k = 1, 2$ (le reconstruction du gradient consistant à définir la valeur de $G_h \eta^h$ à chaque noeud) suivant les valeurs de k donné par (2.9)-2.11). D'après le théorème 8.2 dans [61], il existe une constante $c > 0$ indépendante de h et/ou de $\eta_\beta \in C^2(S)$, $\eta_\alpha \in C^1(S)$ $\alpha = 1, 2$ tels que la méthode PPR pour un point intérieur (x, y) de l'élément $T \in T_h$ soi Superconvergence, on a :

$$\begin{cases} |\partial_\alpha \eta_\beta(x, y) - \partial_\alpha \eta_\beta^h(x, y)| \leq ch^3 \|\eta_\beta\|_{W_\infty^3(T)} & \forall \alpha = \{1, 2\} \\ |\partial_\alpha \eta_\beta(x, y) - \partial_\alpha \eta_\beta^h(x, y)| \leq ch^2 \|\eta_\beta\|_{W_\infty^3(T)} & \forall \alpha, \beta = \{1, 2\} \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\begin{cases} \|\partial_\alpha \eta_\beta - \partial_\alpha \eta_\beta^h\|_{L^\infty(T)} \leq ch^3 \|\eta_\beta\|_{W_\infty^3(T)} & \forall \alpha = \{1, 2\} \\ \|\partial_\alpha \eta_\beta - \partial_\alpha \eta_\beta^h\|_{L^\infty(T)} \leq ch^2 \|\eta_\beta\|_{W_\infty^3(T)} & \forall \alpha, \beta = \{1, 2\} \end{cases}$$

et en utilisant le lemme suivant, on obtient

$$\begin{cases} \|\partial_\alpha(\eta_\beta - \eta_\beta^h)\|_{L^2(S)} \leq ch^3 \|\eta_\beta\|_{W_\infty^3(S)} & \forall \alpha = \{1, 2\} \\ \|\partial_\alpha(\eta_\beta - \eta_\beta^h)\|_{L^2(S)} \leq ch^2 \|\eta_\beta\|_{W_\infty^3(S)} & \forall \alpha, \beta = \{1, 2\} \end{cases} \quad (2.18)$$

Bien plus, en utilisant la densité des fonctions $C^2(\bar{S})$ dans $H^2(S)$ et $C^1(\bar{S})$ dans $H^1(S)$, on peut déduire qu'on peut trouver une constante $\varepsilon > 0$ tel que pour $\eta_\beta \in C^2(\bar{S})$ et $\eta_\beta \in C^1(\bar{S})$ $\forall \beta \in \{1, 2\}$, on a :

$$\begin{cases} \|\eta_3 - \eta_3^h\|_{L^2(S)} \leq \varepsilon h^2 \|\eta_3\|_{H^2(S)} \\ \|\eta_\beta - \eta_\beta^h\|_{L^2(S)} \leq \varepsilon h^2 \|\eta_\beta\|_{H^1(S)} \end{cases} \quad (2.19)$$

η_3 étant dans $C^2(\bar{S})$ et η_3^h dans \mathcal{U}_h , puisque $\eta_3^h|_{\gamma_0} = 0$ on a

$$\frac{\partial}{\partial x}(\eta_3 - \eta_3^h)(x, y) = \frac{\partial \eta_3}{\partial x} - \frac{\eta_3(h, 0) - \eta_3(0, 0)}{h}$$

on en déduit que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\eta_3 - \eta_3^h)(x, y) = \frac{1}{h} \int_0^h \left(\int_\tau^x \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial x^2}(t, y) dt + \int_0^y \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial x \partial y}(\tau, \xi) d\xi \right) d\tau \\ \frac{\partial}{\partial y}(\eta_3 - \eta_3^h)(x, y) = \frac{1}{h} \int_0^h \left(\int_\xi^y \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial y^2}(x, t) dt + \int_0^x \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial x \partial y}(\tau, \xi) d\tau \right) d\xi \end{cases}$$

ce qui nous ramène à écrire

$$\begin{cases} (\eta_3 - \eta_3^h)(x, y) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}(\eta_3 - \eta_3^h)(t, y) dt + \int_0^y \frac{\partial}{\partial y}(\eta_3 - \eta_3^h)(x, \xi) d\xi \\ \quad - \int_0^x \left\{ \int_0^y \frac{\partial^2(\eta_3 - \eta_3^h)}{\partial x \partial y}(\tau, \xi) d\xi \right\} d\tau \end{cases}$$

ce qui implique qu'en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schawtz, on obtient pour tout α, β dans $\{1, 2\}$:

$$\int_{T_j} |\nabla_{\alpha\beta}(\eta_3 - \eta_3^h)(x, y)|^2 dx dy \leq \int_{T_j} |\nabla_\alpha(\eta_3 - \eta_3^h)(x, y)|^2 dx dy + \int_{T_j} |(\eta_3 - \eta_3^h)(x, y)|^2 dx dy$$

soit en sommant sur les éléments $T_j \in T_h$, on a en utilisant (2.18) et (2.19), pour tout α, β dans $\{1, 2\}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\alpha\beta}(\eta_3 - \eta_3^h)\|_{L^2(S)}^2 &\leq \|\nabla_\alpha(\eta_3 - \eta_3^h)\|_{L^2(S)}^2 + \|(\eta_3 - \eta_3^h)\|_{L^2(S)}^2 \\ &\leq c_1 h^4 \|\eta_3\|_{W_\infty^3(S)}^2 + c_2 h^4 \|\eta_3\|_{H^2(S)}^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

On déduit de (2.18), (2.19) et (2.20) que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\eta - \eta^h\|_{\mathcal{U}_h} = 0.$$

2.5 Discrétisation des gradients par la méthode PPR

Pour simplifier les calculs posons,

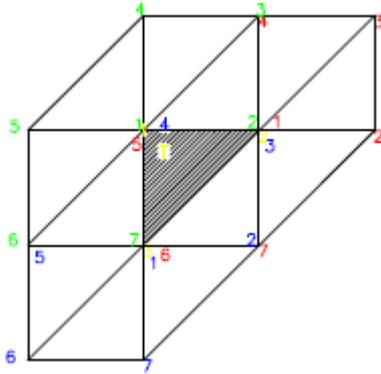
- $[P_\nu I_\alpha^\beta] = [P_\nu X_\alpha^\beta]$ et $[P_2 I_\alpha^{\alpha\beta}] = [P_2 X_\alpha^{\alpha\beta}]$ les coefficients d'approximation du gradient aux noeuds interne du maillage
- $[P_\nu C_\alpha^\beta] = [P_\nu X_\alpha^\beta]$ et $[P_2 C_\alpha^{\alpha\beta}] = [P_2 X_\alpha^{\alpha\beta}]$ les coefficients d'approximation du gradient au noeuds-coins du bord du maillage

- $[P_\nu M_\alpha^\beta] = [P_\nu X_\alpha^\beta]$ et $[P_2 M_\alpha^{\alpha\beta}] = [P_2 X_\alpha^{\alpha\beta}]$ les coefficients d'approximation du gradient au noeuds-milieux du bord du maillage

Considérons la Triangulation de la surface moyenne S présentée dans la figure 2.2 ci-dessus; nous allons utiliser la technique du PPR énoncée précédemment pour évaluer le recouvrement du gradient en chaque point quelconque de ce maillage. Le maillage étant régulier et uniforme, les éléments sont des triangles rectangles isocèles (de côté h et d'hypothénuse $\sqrt{2}h$). Nous rappelons que l'interpolation des déplacements membranaires $u_\alpha, \alpha = 1, 2$ par des polynômes P_1 nécessite trois noeuds sur un élément triangulaire (soit les noeuds-sommets) alors que l'interpolation des déplacements transversaux u_3 est avec les polynômes P_2 qui nécessite six noeuds sur un élément triangulaire (soit les trois noeuds-sommet et les trois noeuds- milieu de chaque côté du triangle); De façon conventionnelle, nous supposons le sommet d'angle droit comme le point a_1 (considéré comme le premier noeud) et les autres points a_2 et a_3 sont choisis suivant le sens des aiguilles d'une montre.

1. Si les trois sommets de notre élément triangulaire sont tous internes au maillage, alors nous avons :

FIGURE 2.4 – Élément où tous les sommets sont internes



$$\left\{ \begin{array}{l}
\partial_\alpha \eta_i^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_1 I_i^\alpha] [\bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x, y), \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x+h, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x, y-h)]^t \\
= [P_1 I_1^\alpha] [A_1] [\bar{\eta}_1^1, \bar{\eta}_1^2, \bar{\eta}_1^3]^t \quad i = 1, 2 \\
\partial_\alpha \eta_3^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_2 I_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y), \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x+h, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y-h)]^t \\
= [P_2 I_3^\alpha] [A_1] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
\partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_1) \lambda_1^T(x, y) = [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [\bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y), \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x+h, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y-h)]^t \\
= [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [A_1] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
\partial_\alpha \eta_i^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_1 I_i^\alpha] [\bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x, y), 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x-h, y), \bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x-h, y-h), 0]^t \\
= [P_1 I_i^\alpha] [A_2] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2
\end{array} \right. \quad (2.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\partial_\alpha \eta_3^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_2 I_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x, y), 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x-h, y), \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x-h, y-h), 0]^t \\
= [P_2 I_3^\alpha] [A_2] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
\partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [\bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x, y), 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x-h, y), \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x-h, y-h), 0]^t \\
= [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [A_2] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
\partial_\alpha \eta_i^h(a_3) \lambda_3^T(x, y) = [P_1 I_i^\alpha] [\bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x, y), 0, \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x+h, y+h), \bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x, y+h), 0, 0, 0]^t \\
= [P_1 I_i^\alpha] [A_3] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2 \\
\partial_\alpha \eta_3^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_2 I_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y), 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x+h, y+h), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y+h), 0, 0, 0]^t \\
= [[P_2 I_3^\alpha] [A_3] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
\partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y), 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x+h, y+h), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y+h), 0, 0, 0]^t \\
= [[P_2 I_3^{\alpha\beta}] [A_3] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t
\end{array} \right.$$

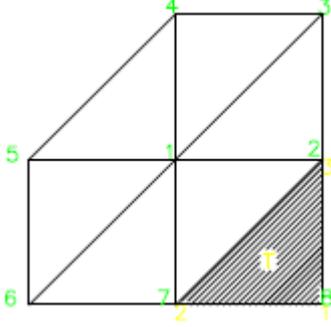
$$[A_1] = \begin{bmatrix} \lambda_1(x_1, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(x_1+h, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3(x_1, y_1-h) \end{bmatrix}^t$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1(x_2-h, y_2) & 0 & 0 \\ \lambda_2(x_2, y_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3(x_2-h, y_2-h) & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1(x_3, y_3+h) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2(x_3+h, y_3+h) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3(x_3, y_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

2. Si l'élément a un noeud-coin et les deux autres noeuds_milieu, nous avons dans ce cas

FIGURE 2.5 – Élément où le premier noeud est un noeud-coin le second et le troisième des noeuds-milieu



$$\left\{ \begin{array}{l}
 \partial_{\alpha} \eta_i^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_1 C_i^{\alpha}] [0, \bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x, y + h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x - h, y), \bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x, y)]^t \\
 = [P_1 C_1^{\alpha}] [B_1] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2 \\
 \partial_{\alpha} \eta_3^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_2 C_3^{\alpha}] [0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y + h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x - h, y), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y)]^t \\
 = [P_2 C_3^{\alpha}] [B_1] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
 \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_2 C_3^{\alpha\beta}] [0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y + h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x - h, y), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y)]^t \\
 = [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [B_1] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
 \partial_{\alpha} \eta_i^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_1 M_i^{\alpha}] [0, \bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x + h, y + h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x, y), \bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x + h, y)]^t \\
 = [P_1 M_i^{\alpha}] [B_2] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \partial_{\alpha} \eta_3^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_2 M_3^{\alpha}] [0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x + h, y + h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x, y), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x + h, y)]^t \\
 = [P_2 M_3^{\alpha}] [B_2] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
 \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_2 M_3^{\alpha\beta}] [0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x + h, y + h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x, y), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x + h, y)]^t \\
 = [P_2 M_3^{\alpha\beta}] [B_2] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
 \partial_{\alpha} \eta_i^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_1 I_i^{\alpha}] [0, \bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x - h, y - h), \bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x, y - h)]^t \\
 = [P_1 I_i^{\alpha}] [B_3] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2 \\
 \partial_{\alpha} \eta_3^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_2 I_3^{\alpha}] [0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x - h, y - h), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y - h)]^t \\
 = [[P_2 I_3^{\alpha}] [B_3] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
 \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x - h, y - h), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y - h)]^t \\
 = [[P_2 I_3^{\alpha\beta}] [B_3] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t
 \end{array} \right.$$

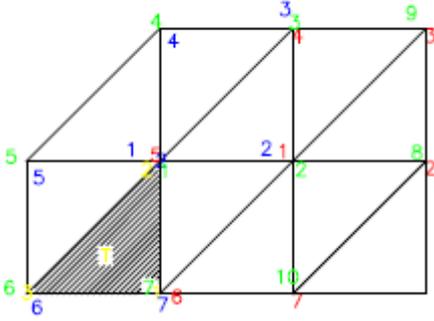
$$[B_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_1^{T_j}(x_1, y_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_2^{T_j}(x_1 - h, y_1) & 0 \\ 0 & \Phi_3^{T_j}(x_1, y_1 + h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_1^{Tj}(x_2 + h, y_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_2^{Tj}(x_2, y_2) & 0 \\ 0 & \Phi_3^{Tj}(x_2 + h, y_2 + h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_1^{Tj}(x_3, y_3 - h) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_2^{Tj}(x_3 - h, y_3 - h) & 0 \\ 0 & \Phi_3^{Tj}(x_3, y_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

3. Si l'élément a son premier noeud un noeud-milieu, le deuxième noeud un noeud-coin et le troisième noeud-interne, alors on a :

FIGURE 2.6 – Élément où le premier noeud est un noeud-milieu, le second un noeud-coin et le troisième un noeud-interne



$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\alpha \eta_i^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_1 M_i^\alpha] [\bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x, y + h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x - h, y), \bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x, y), 0, 0, 0]^t \\ \quad = [P_1 M_1^\alpha] [C_1] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2 \\ \partial_\alpha \eta_3^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_2 M_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y + h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x - h, y), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y), 0, 0, 0]^t \\ \quad = [P_2 M_3^\alpha] [C_1] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\ \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_2 M_3^{\alpha\beta}] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y + h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x - h, y), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y), 0, 0, 0]^t \\ \quad = [P_2 M_3^{\alpha\beta}] [C_1] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\ \partial_\alpha \eta_i^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_1 C_i^\alpha] [\bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x + h, y + h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x, y), \bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x + h, y)]^t \\ \quad = [P_1 C_i^\alpha] [C_2] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \\ \partial_\alpha \eta_3^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_2 C_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x + h, y + h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x, y), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x + h, y)]^t \\ \quad = [P_2 C_3^\alpha] [C_2] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \end{array} \right. \quad (2.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\alpha \eta_3^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_2 C_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x+h, y+h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x, y), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x+h, y)]^t \\ \quad = [P_2 C_3^\alpha] [C_2] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\ \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_2 C_3^{\alpha\beta}] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x+h, y+h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x, y), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1^T(x+h, y)]^t \\ \quad = [P_2 C_3^{\alpha\beta}] [C_2] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\ \partial_\alpha \eta_i^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_1 I_i^\alpha] [\bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x-h, y-h), \bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x, y-h)]^t \\ \quad = [P_1 I_i^\alpha] [C_3] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2 \\ \partial_\alpha \eta_3^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_2 I_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x-h, y-h), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y-h)]^t \\ \quad = [[P_2 I_3^\alpha] [C_3] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\ \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2^T(x-h, y-h), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y-h)]^t \\ \quad = [[P_2 I_3^{\alpha\beta}] [C_3] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \end{array} \right.$$

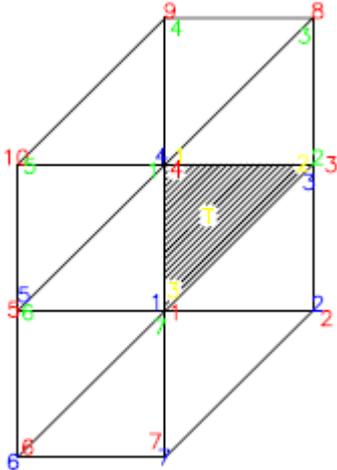
$$[C_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1(x_1, y_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2(x_1 - h, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3(x_1, y_1 + h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[C_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1(x_2 + h, y_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2(x_2, y_2) & 0 \\ \lambda_3(x_2 + h, y_2 + h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[C_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1(x_3, y_3 - h) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2(x_3 - h, y_3 - h) & 0 \\ \lambda_3(x_3, y_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

4. Si l'élément a deux noeuds-internes et un noeud-milieu, nous avons dans ce cas :

FIGURE 2.7 – Élément où le premier noeud est un noeud-interne, le second un noeud-milieu et le troisième un noeud-interne



$$\left\{ \begin{array}{l}
\partial_\alpha \eta_i^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_1 I_i^\alpha] [\bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x, y), \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x+h, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x, y)]^t \\
= [P_1 I_1^\alpha] [F_1] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2 \\
\partial_\alpha \eta_3^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_2 I_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y), \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x+h, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y)]^t \\
= [P_2 I_3^\alpha] [F_1] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
\partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [\bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y), \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x+h, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y)]^t \\
= [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [F_1] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
\partial_\alpha \eta_i^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_1 M_i^\alpha] [\bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x-h, y-h), \bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x-h, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x, y), 0, 0, 0]^t \\
= [P_1 M_i^\alpha] [F_2] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2 \\
\partial_\alpha \eta_3^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_2 M_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x-h, y-h), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x-h, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x, y), 0, 0, 0]^t \\
= [P_2 M_3^\alpha] [F_2] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
\partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_2 M_3^{\alpha\beta}] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x-h, y-h), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x-h, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x, y), 0, 0, 0]^t \\
= [P_2 M_3^{\alpha\beta}] [F_2] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
\partial_\alpha \eta_i^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_1 I_i^\alpha] [\bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x, y), \bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x, y+h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x+h, y+h)]^t \\
= [P_1 I_i^\alpha] [F_3] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2 \\
\partial_\alpha \eta_3^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_2 I_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y+h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x+h, y+h)]^t \\
= [[P_2 I_3^\alpha] [F_3] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
\partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [\bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y), \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y+h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x+h, y+h)]^t \\
= [[P_2 I_3^{\alpha\beta}] [F_3] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t
\end{array} \right.$$

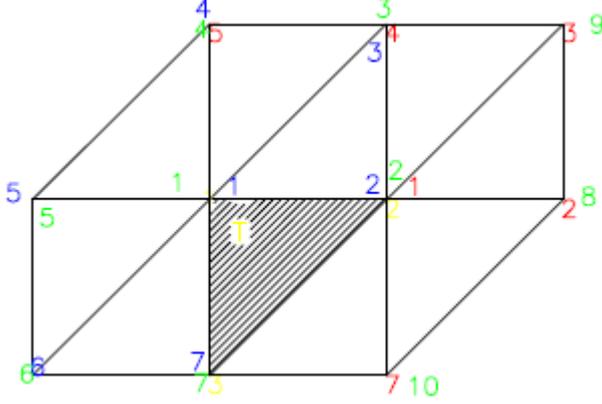
$$[F_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_1^{T_j}(x_1, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_2^{T_j}(x_1-h, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_3^{T_j}(x_1, y_1+h) & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[F_2] = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_1^{T_j}(x_2+h, y_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_2^{T_j}(x_2, y_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_3^{T_j}(x_2+h, y_2+h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[F_3] = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_1^{T_j}(x_3, y_3-h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_2^{T_j}(x_3-h, y_3-h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_3^{T_j}(x_3, y_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

5. Si l'élément a deux noeuds-internes et un noeud-milieu, nous avons pour ce cas :

FIGURE 2.8 – Élément où les premiers noeuds sont des noeuds-interne et le troisième un noeud-milieu



$$\left\{ \begin{array}{l}
 \partial_\alpha \eta_i^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_1 I_i^\alpha] [\bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x, y), \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x+h, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x, y-h)]^t \\
 = [P_1 I_1^\alpha] [D_1] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2 \\
 \partial_\alpha \eta_3^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_2 I_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y), \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x+h, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y-h)]^t \\
 = [P_2 I_3^\alpha] [D_1] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
 \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_1) \lambda_1(x, y) = [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [\bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y), \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x+h, y), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y-h)]^t \\
 = [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [D_1] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
 \partial_\alpha \eta_i^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_1 I_i^\alpha] [\bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x, y), 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x-h, y), \bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x-h, y-h)]^t \\
 = [P_1 I_i^\alpha] [D_2] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2 \\
 \partial_\alpha \eta_3^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_2 I_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x, y), 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x-h, y), \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x-h, y-h)]^t \\
 = [P_2 I_3^\alpha] [D_2] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
 \\
 \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_2) \lambda_2(x, y) = [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [\bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x, y), 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x-h, y), \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x-h, y-h)]^t \\
 = [P_2 I_3^{\alpha\beta}] [D_2] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
 \partial_\alpha \eta_i^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_1 M_i^\alpha] [\bar{\eta}_i^1 \lambda_1(x, y+h), \bar{\eta}_i^2 \lambda_2(x+h, y+h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_i^3 \lambda_3(x, y), 0, 0, 0]^t \\
 = [P_1 M_i^\alpha] [D_3] [\bar{\eta}_i^1, \bar{\eta}_i^2, \bar{\eta}_i^3]^t \quad i = 1, 2 \\
 \partial_\alpha \eta_3^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_2 M_3^\alpha] [\bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y+h), \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x+h, y+h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y), 0, 0, 0]^t \\
 = [P_2 M_3^\alpha] [D_3] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t \\
 \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_3) \lambda_3(x, y) = [P_2 M_3^{\alpha\beta}] [\bar{\eta}_3^1 \lambda_1(x, y+h), \bar{\eta}_3^2 \lambda_2(x+h, y+h), 0, 0, 0, 0, \bar{\eta}_3^3 \lambda_3(x, y), 0, 0, 0]^t \\
 = [P_2 M_3^{\alpha\beta}] [D_3] [\bar{\eta}_3^1, \bar{\eta}_3^2, \bar{\eta}_3^3]^t
 \end{array} \right.$$

$$[D_1] = \begin{bmatrix} \Phi_1^{T_j}(x_1, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2^{T_j}(x_1+h, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_3^{T_j}(x_1, y_1-h) & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_1^{T_j}(x_2 - h, y_2) & 0 & 0 \\ \Phi_2^{T_j}(x_2, y_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_3^{T_j}(x_2 - h, y_2 - h) & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[D_3] = \begin{bmatrix} \Phi_1^{T_j}(x_3, y_3 + h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2^{T_j}(x_3 + h, y_3 + h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_3^{T_j}(x_3, y_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

Dans ce qui suit, nous allons simplement expliciter la matrice associée au recouvrement du gradient en chaque noeud suivant le type d'élément représenté dans la figure 2.2 de la triangulation de la surface moyenne ;

6. Si l'élément a son premier et troisième noeud qui sont de noeuds-milieu et son deuxième un noeud-interne, nous avons dans ce cas :

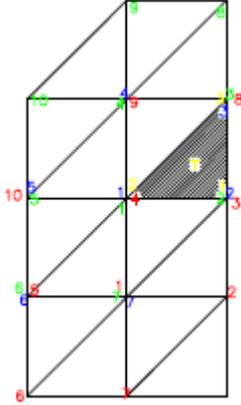


FIGURE 2.9 – Élément où le premier noeud est un noeud-milieu, le second un noeud-interne et le troisième un noeud-milieu

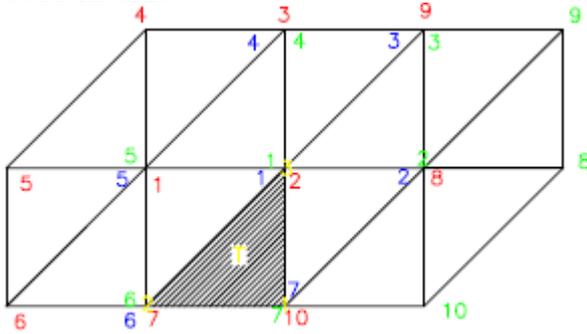
$$[G_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_1^{T_j}(x_1, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_2^{T_j}(x_1 - h, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_3^{T_j}(x_1, y_1 - h) & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[G_2] = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_1^{T_j}(x_2 + h, y_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_2^{T_j}(x_2, y_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_3^{T_j}(x_2 + h, y_2 + h) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[G_3] = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_1^{T_j}(x_3, y_3 - h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_2^{T_j}(x_3 - h, y_3 - h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_3^{T_j}(x_3, y_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

7. Dans le cas où le premier et deuxième noeud sont des noeuds-milieu et la troisième un noeud-interne, nous avons :

FIGURE 2.10 – Élément où les premiers noeuds sont des noeuds-milieu et le troisième un noeud-interne



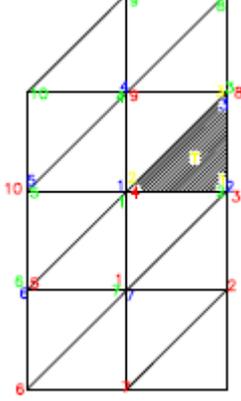
$$[E_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_1^{T_j}(x_1, y_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_2^{T_j}(x_1 - h, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_3^{T_j}(x_1, y_1 + h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[E_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_1^{T_j}(x_2 + h, y_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_2^{T_j}(x_2, y_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_3^{T_j}(x_2 + h, y_2 + h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[E_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_1^{T_j}(x_3, y_3 - h) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_2^{T_j}(x_3 - h, y_3 - h) & 0 \\ \Phi_3^{T_j}(x_3, y_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

8. Si les noeuds sont représentés tels que indiqué par la figure 2.11 ci-dessous, alors les matrices correspondantes dans la figure 2.2 peuvent être exprimées par :

FIGURE 2.11 – Élément où le premier noeud est un noeud-milieu, le second un noeud-interne et le troisième un noeud-milieu



$$[H_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_1^{T_j}(x_1, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_2^{T_j}(x_1 - h, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_3^{T_j}(x_1, y_1 + h) & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[H_2] = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_1^{T_j}(x_2 + h, y_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_2^{T_j}(x_2, y_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_3^{T_j}(x_2 + h, y_2 + h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

$$[H_3] = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_1^{T_j}(x_3, y_3 - h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_2^{T_j}(x_3 - h, y_3 - h) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_3^{T_j}(x_3, y_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

On déduit par la même technique, toutes les matrices correspondantes dans la configuration de la triangularisation de la figure 2.2.

2.6 Matrice de rigidité élémentaire

En revenant aux expressions des fonctionnelles d'énergie (1.77) et (1.78), nous avons

$$A_s(u, v) = \int_S \{E_v\}^t C_g^s \{E_u\} dS = \sum_{j=1}^{n_h} \int_{T_j} (\{E_v^{T_j}\}^t C_g^s \{E_u^{T_j}\}) dx dy \quad (2.23)$$

En utilisant les polynômes d'interpolations (2.9), (2.11), et les approximations des gradients (2.22) où l'élément T_j a le premier noeud qui est un noeud-milieu, le deuxième un noeud-coin et le troisième un noeud-interne

posons $i = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \lambda_i(x, y) \\ \rho_k = 4\lambda_{k-3}(x, y)\lambda_{k-2}(x, y), k = 4, 5, 6 \\ \beta_i^\alpha = [P_1 M_i^\alpha][C_1](:, i) + [P_1 C_i^\alpha][C_2](:, i) + [P_1 I_i^\alpha][C_3](:, i) \\ \gamma_i^\alpha = [P_2 M_3^\alpha][C_1](:, i) + [P_2 C_3^\alpha][C_2](:, i) + [P_2 I_3^\alpha][C_3](:, i) \\ \tau_i^{\alpha\beta} = [P_2 M_3^{\alpha\beta}][C_1](:, i) + [P_2 C_3^{\alpha\beta}][C_2](:, i) + [P_2 I_3^{\alpha\beta}][C_3](:, i) \end{array} \right. \quad (2.24)$$

alors le vecteur déformation (1.34) sur l'élément T_j peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ E_u^{T_j} \right\} = [B^{T_j}] \left\{ d_u^{T_j} \right\} \text{ où}$$

et

$$\left\{ d_{\bar{u}}^{T_j} \right\} = [\bar{u}_1^{j1}, \bar{u}_1^{j2}, \bar{u}_1^{j3}, \bar{u}_2^{j1}, \bar{u}_2^{j2}, \bar{u}_2^{j3}, \bar{u}_3^{j1}, \bar{u}_3^{j2}, \bar{u}_3^{j3}, \bar{u}_3^{j4}, \bar{u}_3^{j5}, \bar{u}_3^{j6}]^t \quad (2.25)$$

Ainsi, les matrices de rigidité élémentaire peuvent s'exprimer sous la forme :

$$[K_s^j] = \int_{T_j} ([B^{T_j}]^t C_g^s [B^{T_j}]) dx dy; 1 \leq j \leq .N_h, \quad s = 0, 1 \quad (2.26)$$

où

$$C_g^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (1-\nu) \left([D_e]_{\beta}^{\alpha} \right)^t \left([D_e]_{\alpha}^{\beta} \right) + \frac{Eh}{1-\nu^2} \nu \left([D_e]_{\alpha}^{\alpha} \right)^t \left([D_e]_{\lambda}^{\lambda} \right) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \left([D_k]_{\beta}^{\alpha} \right)^t \left([D_k]_{\alpha}^{\beta} \right) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nu \left([D_k]_{\alpha}^{\alpha} \right)^t \left([D_k]_{\lambda}^{\lambda} \right) \quad (2.27)$$

$$C_g^1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (1-\nu) \left([D_e]_{\beta}^{\alpha} \right)^t \left([D_e]_{\alpha}^{\beta} \right) + \frac{Eh}{1-\nu^2} \nu \left([D_e]_{\alpha}^{\alpha} \right)^t \left([D_e]_{\lambda}^{\lambda} \right) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \left([D_k]_{\beta}^{\alpha} \right)^t \left([D_k]_{\alpha}^{\beta} \right) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nu \left([D_k]_{\alpha}^{\alpha} \right)^t \left([D_k]_{\lambda}^{\lambda} \right) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \left([D_Q]_{\beta}^{\alpha} \right)^t \left([D_e]_{\alpha}^{\beta} \right) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nu \left([D_Q]_{\alpha}^{\alpha} \right)^t \left([D_k]_{\lambda}^{\lambda} \right) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \left([D_e]_{\beta}^{\alpha} \right)^t \left([D_Q]_{\alpha}^{\beta} \right) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nu \left([D_e]_{\alpha}^{\alpha} \right)^t \left([D_Q]_{\lambda}^{\lambda} \right) + \frac{Eh^5}{80(1-\nu^2)} (1-\nu) \left([D_Q]_{\beta}^{\alpha} \right)^t \left([D_Q]_{\alpha}^{\beta} \right) + \frac{Eh^5}{80(1-\nu^2)} \nu \left([D_Q]_{\alpha}^{\alpha} \right)^t \left([D_Q]_{\lambda}^{\lambda} \right) \quad (2.28)$$

qui sont les matrices 19×19 de comportement généralisée.

En posant $F_0(x, y) = ([B^{T_j}]^t C_g^0 [B^{T_j}])$ et $F_1(x, y) = ([B^{T_j}]^t C_g^1 [B^{T_j}])$; nous pouvons résoudre la question de poids de gauss associé à notre problème par la transformation :

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_0^j] = \int_{T_j} F_0(x, y) dx dy; 1 \leq j \leq .N_h \\ \quad = \frac{1}{3} F_0\left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3, \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_2 + \frac{1}{6}y_3\right) + \\ \quad \frac{1}{3} F_0\left(\frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3, \frac{1}{6}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{6}y_3\right) + \\ \quad \frac{1}{3} F_0\left(\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{3}x_3, \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{6}y_2 + \frac{2}{3}y_3\right) \\ [K_1^j] = \int_{T_j} F_1(x, y) dx dy; 1 \leq j \leq .N_h \\ \quad = \frac{1}{3} F_1\left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3, \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_2 + \frac{1}{6}y_3\right) + \\ \quad \frac{1}{3} F_1\left(\frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3, \frac{1}{6}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{6}y_3\right) + \\ \quad \frac{1}{3} F_1\left(\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{3}x_3, \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{6}y_2 + \frac{2}{3}y_3\right) \end{array} \right. \quad (2.29)$$

En rappelant l'équation (1.73) et la formulation variationnelle (1.74), son second membre peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
L(\dot{v}) &= \sum_{j=1}^N \int_{T_j} \left\{ d_{\bar{v}}^{T_j} \right\}^t [B^{T_j}]^t [P] | J |^{T_j} dS + \oint_{\omega_1^*}^{\omega_2^*} \left\{ d_{\bar{v}}^{T_j} \right\}^t [B^{T_j}]^t [G] | J_* |^{T_j} d\zeta \\
&= \sum_{j=1}^{n_h} \left\{ d_{\bar{v}}^{T_j} \right\} [f^j]
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Où $[f^j] = [F_1^{j1}, F_1^{j2}, F_1^{j3}, F_2^{j1}, F_2^{j2}, F_2^{j3}, F_3^{j1}, F_3^{j2}, F_3^{j3}, F_3^{j4}, F_3^{j5}, F_3^{j6}]^T$ et $\left\{ d_{\bar{v}}^{T_j} \right\}$ telque défini à l'équation (2.25), ici $|J_*|$ est le déterminant du Jacobien d'amarage entre l'élément linéaire $d\zeta$ de la courbe $\phi(\gamma_1)$ à l'élément réel $d\gamma$.

Ainsi, en revenant aux équations variationnelles approchées (2.17), à la fonction d'énergie (2.23) et aux différentes transformations obtenues sur cette fonction d'énergie ainsi que le second membre de la formulation variationnelle (2.30), nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \eta^h \in \mathcal{U}_h \\ \text{tel que} \\ \sum_{j=1}^{n_h} \int_{T_j} \left(\left\{ d_{\xi^h}^{T_j} \right\}^t \left\{ [B^{T_j}] \right\}^t C_g^s \left\{ [B^{T_j}] \left\{ d_{\eta^h}^{T_j} \right\} \right\} \right) dx dy = \sum_{j=1}^{n_h} \left\{ d_{\xi^h}^{T_j} \right\} [f^j] \quad \forall \xi^h \in \mathcal{U}_h \end{array} \right.$$

En exploitant l'expression de la matrice de comportement généralisée (2.26), la formulation suivante peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \eta^h \in \mathcal{U}_h \\ \text{tel que} \\ \sum_{j=1}^{n_h} \left\{ d_{\xi^h}^{T_j} \right\}^t \left[[K_s^j] \left\{ d_{\eta^h}^{T_j} \right\} - [f^j] \right] = 0, \quad \forall \xi^h \in \mathcal{U}_h \end{array} \right.$$

Ce qui revient à résoudre pour chaque élément triangulaire T_j , $1 \leq j \leq n_h$ le système linéaire :

$$[K_s^j] \left\{ d_{\eta^h}^{T_j} \right\} - [f^j] = 0 \quad 1 \leq j \leq n_h, \quad s = 0, 1 \tag{2.31}$$

L'algorithme d'assemblage des éléments découle simplement des calculs de la matrice de rigidité de chaque élément, de la maîtrise de la connectivité des éléments du maillage, du chargement du second membre et surtout de la bonne interprétation des conditions initiales et aux limites. L'obtention de ces données achève la résolution numérique de notre problème tronqué associé au modèle N-T.

Ainsi, au regard de ce qui précède, une famille d'éléments finis de coques pour le modèle N-T a été décrite et les principes généraux de leur formulation ont été présentés. En effet, ces éléments originaux reposent sur l'idée de la reconstruction des gradients de déplacements se trouvant à l'intérieur de la solution de notre problème. Cette technique nous a conduit aux calculs de la matrice $[B^{T_j}]$ pour chaque élément T_j . Et comme nous l'avons décrit plus haut, chaque élément possède trois noeuds-sommets donc 3 degrés de

liberté par noeud pour l'approximation locale de $(\eta_1^h, \eta_2^h, \eta_3^h)$ et trois noeuds-milieu de chaque côté du triangle donc 1 degré de liberté pour l'approximation locale de η_3^h .

Après avoir étudié chaque élément de la coque pris séparément, il apparait nécessaire de décrire le comportement de toute la structure par l'assemblage des éléments en prenant en considération autant que possible la résolution des équations des systèmes linéaires précédent. Dans la méthode des éléments finis, l'assemblage est la construction de la matrice de rigidité globale $[K_g]$ et du vecteur d'impulsion total $[F_g]$ donnés respectivement par les vecteurs élémentaires $[f^j]$ et des matrices de rigidité élémentaire $[K^j]$.

Soit m le nombre de degrés de liberté d'un élément (qui pour notre élément est égale à 12) ; l'algorithme d'assemblage des systèmes linéaires est donné par :

```

 $[K_g] = \text{zeros}(N_h, N_h); \quad [F_g] = \text{zeros}(N_h);$ 
pour  $e = 1$  à  $N_h$ 
pour  $k = 1$  à  $m$ 
calcul des vecteurs  $[f_k^j]$  ;
 $i = \text{matrice de connectivité} = (k, e)$  ;
calcul du vecteur  $[f_i] = [f_i] + [f_k^j]$  ( avec une matrice d'adressage à une entrée) en
faisant intervenir les conditions initiales et aux limites ;
pour  $l = 1$  à  $m$ 
calcul de chaque matrice de rigidité élémentaire  $[K_{kl}^l]$  ;
 $p = \text{connectivity matrix} = (l, e)$  ;
calcul de la matrice de rigidité  $[K_{ip}] = [K_{ip}] + [K_{kl}^j]$  ( avec une matrice d'adressage à
double entrée) en tenant compte des conditions aux limites ;
fin pour  $l$ 
fin pour  $k$ 
fin pour  $e$ 

```

En dépit de la construction de la matrice de rigidité de la structure $[K_g] = \sum_{j=1}^{n_h} [K^j]$,

du vecteur $[F_g] = \sum_{j=1}^{n_h} [f^j]$ lié aux sollicitations intérieures et extérieures et du vecteur inconnue $\{d\} = [\{d^{T_1}\}, \{d^{T_2}\}, \dots, \{d^{T_{n_h}}\}]^t$ de notre problème, la résolution du système $[K_g] \{d\} - [F_g] = 0$ ne permet pas d'obtenir directement la solution de notre problème au regard de l'analyse liée à l'inversion de la matrice de rigidité $[K_g]$. En effet, l'utilisation de la méthode PPR avec des éléments qui sont des surfaces planes nécessite un bon raffinement de maillage afin de mieux approcher la solution de notre problème ; et cela demande une matrice de rigidité de grande taille qui nous conduit directement à faire appel aux méthodes numériques pour contourner le problème de singularité. Toutefois, la méthode PPR a l'avantage qu'elle utilise moins de degrés de liberté, donc un faible coût en termes de temps de calcul et taux de convergence.

Chapitre 3

VALIDATION NUMÉRIQUE DES ÉLÉMENTS DE COQUES ASSOCIÉS AU MODÈLE N-T

Les tests d'évaluation d'un modèle par éléments finis permet d'une part de vérifier les propriétés de convergence numérique (consistance et stabilité) et d'autre part d'analyser la vitesse (taux) de convergence et l'influence de l'exactitude de la distorsion géométrique et cinématique utilisée pour simuler certains paramètres difficiles à calculer directement.

Notre objectif ici est double : premièrement de montrer la performance de notre nouvel élément fini de coques épaisses associé au modèle N-T ; deuxièmement de montrer l'habileté de notre élément à mieux approximer en termes de consistance dans le calcul numérique de certains paramètres tels que les déplacements, les contraintes et les déformations tout en le comparant à certains éléments existants ayant les mêmes lois de comportement.

Ainsi, les objectifs prioritaires ici sont :

- contrôler la bonne convergence de notre élément fini basé sur la variation du nombre d'éléments par demi-côte ;
- évaluer la performance du schéma numérique en le comparant à d'autres existants ;
- analyser le comportement du schéma objet de notre étude en faisant varier la valeur du ratio $\chi = h/2R$;
- dégager l'aptitude de l'élément à mieux simuler le comportement des coques soumis au phénomène de couplage membrane-flexion ;
- analyser l'impact généré par notre élément et les calculs des contraintes transversales σ^{i3} afférents.

Les objectifs prioritaires ci-dessus énumérés se valideront au travers des tests sur des cas de benchmarks concernant particulièrement :

1. Hémisphère sous charges diamétralement opposées ;
2. Cylindre pincé avec diaphragme.

3.1 Hémisphère sous charges diamétralement opposées

Le but d'étudier ce cas de benchmark test est d'examiner l'exactitude de la théorie de coques épaisses linéairement élastiques associée au modèle N-T par la construction d'un élément fini nommé " Spherical shell Finite Element" (SSFE) dont le schéma numérique a été présenté au chapitre 2. Nous allons focaliser notre investigation sur un benchmark bien connu tel l'hémisphère sous charges diamétralement opposées présenté à la figure 3.1 ci-dessous et utilisé pour évaluer la performance de notre élément SSFE de coque.

En effet, l'étude de ce benchmark test d'hémisphère soumis à quatre charges diamétralement opposées est assujetti au test de coques minces proposé dans [24] comme test standard. Ce benchmark est habituellement utilisé pour vérifier l'absence de blocage en membrane et une bonne représentation de la notion de corps rigide. L'hémisphère est soumis à d'importantes rotations de corps rigide autour de la normale à la surface moyenne. Les déformations de flexion inextensible en membrane sont également importantes et ce problème sert d'excellent test pour examiner l'aptitude de notre élément de coque à représenter les modes rigides et les modes inextensibles. A cause de la symétrie de l'hémisphère donnée à la figure 3.1, nous allons effectuer nos calculs sur le quart de la surface moyenne déformée représentée à la figure 3.2 dont les simulations sont faites avec l'outil Matlab R2015a. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont indiquées par : $\chi = h/2R = 0.002$, le rayon de l'hémisphère $R = 10m$, son épaisseur $h = 0.04m$, l'angle soutenu par le pôle nord de l'hémisphère est $\theta = 18^\circ$, le module d'Young est $E = 6.825e + 7Pa$, sa constante de Poisson est $\nu = 0.3$ et les charges diamétralement opposées aux points A et B sont $0.5N$. Les conditions aux limites au bord lisse E est $W = 0$ et les conditions de symétries sur le côté AC est $V = 0$ et sur le côté BD est $U = 0$

Une solution de référence présentée dans [24] donne le déplacement suivant la direction de la charge $U_A = V_B = 0.094m$.

3.1.1 Convergence

Les modèles de Kirchhoff-Love (K-L) et Nzenywa-Tagne Simo (N-T) pour la théorie de coque sont implémentés en utilisant notre élément SSFE et les résultats obtenus sont analysés et comparés avec d'autres éléments finis DKT12, DKT18 proposés par [6] et SFE3(cmc) par [12] puis commenté. La table 3.1 ci-dessous montre les résultats des déplacements au point chargé A et la figure 3.3 décrit parfaitement leurs variations ainsi que leur vitesse de convergence. Toutes les propriétés de convergence numérique (consistance et stabilité) sont clairement établies lorsqu'on analyse la table 3.1 et la figure 3.3. Par conséquent, notre élément SSFE converge vers la solution de référence autant que les autres éléments DKT et SFE pour le déplacement au point chargé A .

TABLE 3.1 – Table des résultats de déplacements au point A de l'hémisphère

épaisseur = 0.04 et Force = 0.5N sol_ref = solution de référence ($U_A * 10^3$)						
N	DKT12	DKT18	SKLFE	SFE3(cmc)	SSFE	sol_ref
2	121	87	-	4.1	—	94
3	-	-	1.6	-	1.61	94
4	108	94	10.2	28	10.21	94
6	102	94	52.3	63	52.3	94
8	99	93	73.8	77	73.8	94
10	98	93	81.56	82	81.55	94
12	96	93	86.3	84	86.32	94
15			88.4	86	88.4	94
20			86.5	87	86.52	94

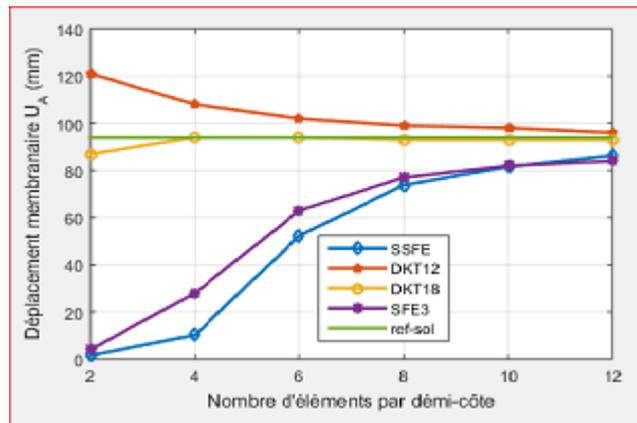


FIGURE 3.3 – Courbes de convergence de l'hémisphère

3.1.2 *Ecart et déviation de l'hémisphère*

Les rapports proportionnels $2\chi = h/R$ donnés dans la table 3.2 sont rangés suivant les valeurs 0.006, 0.099, 0.12, 0.15, 0.175 et 0.2 de la coque sphérique. Ici, le rayon de la sphère est maintenu constant pendant que l'épaisseur h varie avec le rapport 2χ . Nous observons dans les table 3.1, table 3.2 et la figure 3.3 que pour l'épaississement dans $0 < 2\chi < 0.099$, les déplacements membranaires au point chargé A sont les mêmes pour les deux modèles K-L et N-T. Quand le rapport $2\chi = h/R$ est supérieur ou égal à 0.099, les déplacements de flexion inextensible en membrane calculés sont différents pour les deux modèles K-L et N-T. Cela signifie qu'autour de $2\chi \simeq \frac{1}{10}$, les deux approches K-L et N-T sont différentes lors de l'accroissement du rapport par l'épaisseur de la coque.

Nous allons examiner maintenant l'écart entre les déplacements au point chargé A entre les deux modèles K-L et N-T. En faisant varier l'épaisseur dans le rapport présenté par $2\chi = 0.06, 0.099, 0.12, 0.15, 0.175$ et 0.2, les résultats représentés dans la table 3.2, les figures 3.2, figure 3.3, figure 3.4, figure 3.5 et figure 3.6 montrent clairement que les écarts des déplacements sont établis pour ces valeurs spécifiques du ratio. Et cette déviation est d'avantage importante avec l'accroissement de l'épaisseur et avec le raffinement du maillage au point chargé A .

TABLE 3.2 – Comparaison de deux modèles de coques sphériques épaisses par rapport au ratio $\frac{h}{R}$: Reissner-Mindlin et Nzungwa-Tagne

rapport h/R	Modèle	MAILLAGE					
		5×5	7×7	9×9	11×11	13×13	15×15
0.006	$R - M$	$1.77 * 10^{-5}$	$3.91 * 10^{-4}$	0.0035	0.088	0.0954	0.0950
	$N - T$	$1.77 * 10^{-5}$	$3.91 * 10^{-4}$	0.0035	0.0877	0.0954	0.0950
0.099	$R - M$	$1.14 * 10^{-5}$	$2.64 * 10^{-4}$	0.0018	0.0109	0.0209	0.0204
	$N - T$	$1.14 * 10^{-5}$	$2.64 * 10^{-4}$	0.0018	0.0110	0.0209	0.0204
0.12	$R - M$	$2.91 * 10^{-6}$	$8.76 * 10^{-6}$	$4.52 * 10^{-3}$	$1.07 * 10^{-2}$	$2.76 * 10^{-2}$	$2.47 * 10^{-2}$
	$N - T$	$4.67 * 10^{-6}$	$9.72 * 10^{-6}$	$3.52 * 10^{-3}$	$9.90 * 10^{-3}$	$2.67 * 10^{-2}$	$2.47 * 10^{-2}$
0.15	$R - M$	$1.07 * 10^{-6}$	$1.20 * 10^{-5}$	$4.67 * 10^{-4}$	$5.02 * 10^{-3}$	$1.57 * 10^{-2}$	$1.39 * 10^{-2}$
	$N - T$	$3.03 * 10^{-6}$	$4.21 * 10^{-6}$	$1.79 * 10^{-4}$	$2.35 * 10^{-3}$	$1.36 * 10^{-2}$	$1.17 * 10^{-2}$
0.175	$R - M$	$1.23 * 10^{-6}$	$2.87 * 10^{-6}$	$3.20 * 10^{-4}$	$3.22 * 10^{-3}$	$9.41 * 10^{-3}$	$8.96 * 10^{-3}$
	$N - T$	$8.20 * 10^{-7}$	$1.02 * 10^{-6}$	$2.30 * 10^{-4}$	$3.41 * 10^{-4}$	$7.12 * 10^{-3}$	$6.89 * 10^{-3}$
0.2	$R - M$	$5.36 * 10^{-7}$	$3.51 * 10^{-6}$	$4.89 * 10^{-4}$	$2.89 * 10^{-3}$	$5.88 * 10^{-3}$	$5.52 * 10^{-3}$
	$N - T$	$4.01 * 10^{-7}$	$3.10 * 10^{-6}$	$3.71 * 10^{-4}$	$2.49 * 10^{-4}$	$5.57 * 10^{-3}$	$5.23 * 10^{-3}$

FIGURE 3.4 – Variation du déplacement membranaire U_A en A pour la proportion $2\chi = h/R = 0.006$.

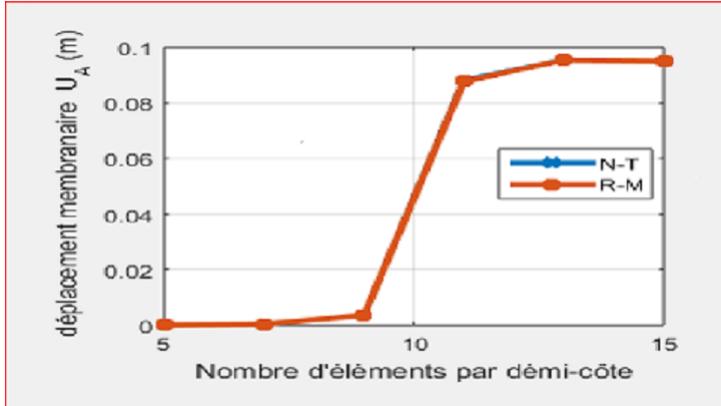


FIGURE 3.5 – Variation du déplacement membranaire U_A en A pour la proportion $2\chi = h/R = 0.006$.

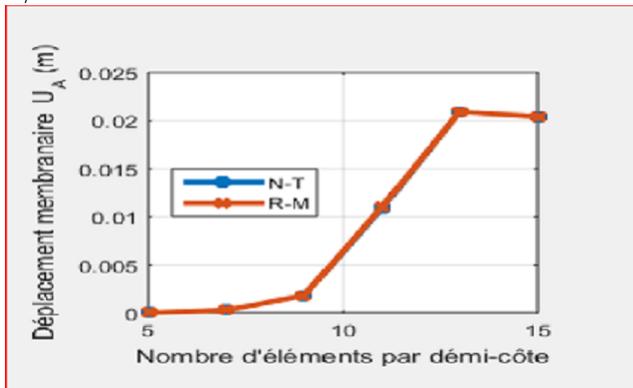


FIGURE 3.6 – Variation du déplacement membranaire U_A en A pour la proportion $2\chi = h/R = 0.12$.

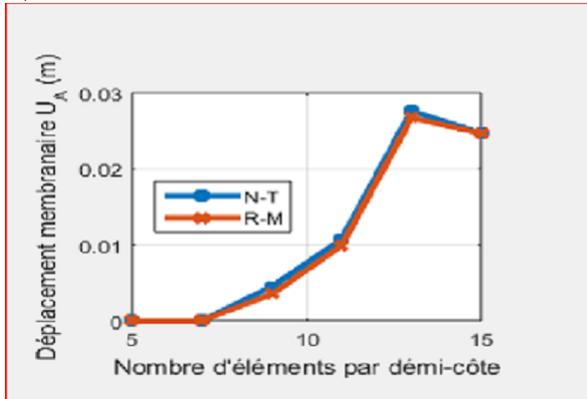
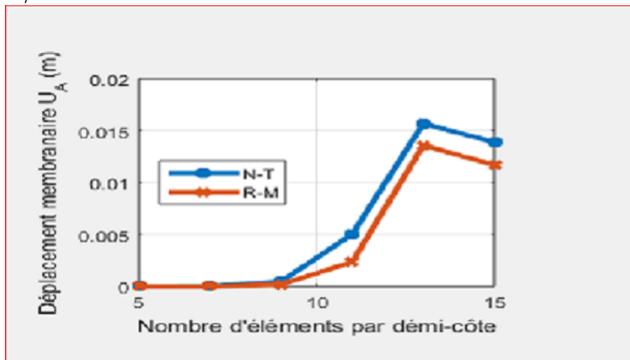


FIGURE 3.7 – Variation du déplacement membranaire U_A en A pour la proportion $2\chi = h/R = 0.15$



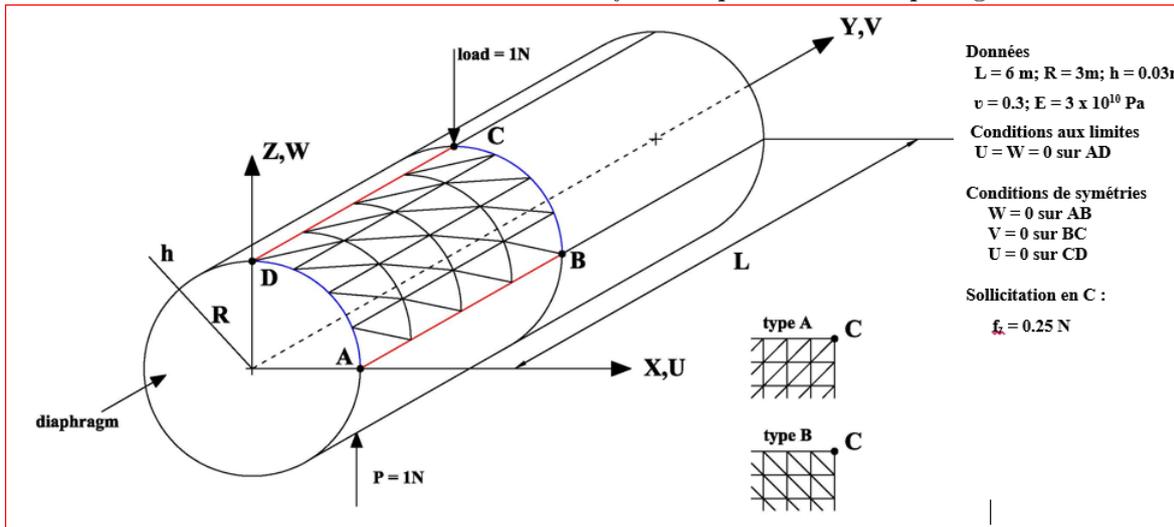
3.2 Cylindre pincé avec diaphragme

Ce cas de benchmark vient compléter la validation du modèle N-T de coques épaisses linéairement élastique et de ce fait nous permet de construire suivant sa géométrie l'élément fini nommé "Cylindrical Shell Finite Element" (CSFE) ayant le même schéma numérique que celui présenté au chapitre 2. Le cylindre pincé avec diaphragme est soumis à deux charges concentrées diamétralement opposées et qui repose à ses extrémités sur deux diaphragmes rigides dans leur plan comme représenté à la figure 3.8 ci-dessous. Et ce test est celui de coque mince qui nous permet de mieux décrire des champs de déformations de

membrane très complexe couplés de flexion sans extension de la surface moyenne surtout aux points chargés. Bien plus, ce test nous permet de mieux apprécier la performance et l'aptitude de notre élément CSFE à mieux simuler les structures coques cylindriques.

Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont représentées et présentées dans la figure 3.8 ci-dessous.

FIGURE 3.8 – Benchmark de cylindre pincé avec diaphragme



3.2.1 Convergence Numérique

Une solution de référence a été présentée dans [Lindberg et al, 1969] : déplacement transverse W_C au point C suivant Z sous la charge : $\tilde{W}_C = \frac{-EhW_C}{P} = 164.24$ et le déplacement membranaire V_D au point D suivant Y : $\tilde{V}_D = \frac{-EhV_D}{P} = 4.11$. Ces résultats (solutions de références) de coque symétrique peuvent être considérés comme des solutions exactes de coque 3D. Seulement le huitième du cylindre pincé avec diaphragme a été maillé. Il s'avère que, quel que soit le maillage régulier de type A et de type B effectué, les résultats numériques présentés aux tables 3.4 et 3.5 ci-dessous et implémentés pour les modèles de Kirchhoff-Love (K-L) et Nzenywa-Tagne Simo (N-T) sur la théorie de coques minces ont montré une bonne convergence de notre élément fini CSFE. Bien plus, une analyse comparée avec d'autres éléments finis ayant les mêmes lois de comportement DKT12, DKT18 proposés par [6] et SFE3(cmc) dans [12] montre que notre élément fini CSFE converge de même que les autres tant au point chargé C que au point D tels que présentés dans les tables 3.4, 3.5 et dans les figures 3.9.

TABLE 3.3 – Table des résultats du cylindre pincé avec diaphragme au point C

épaisseur = 0.03m, Force = 0.25N sol_ref = solution de référence $\tilde{W}_C = 164.24$						
N	DKT12	DKT18	CSFE	SFE3(cmc)	<i>CKLFE</i>	sol_ref
2	10.72	10.65	–	5.99	–	164.24
3	-	-	9.74	-	9.74	164.24
4	114.03	80.86	108.23	53.13	108.25	164.24
6	196.44	122.13	179.6	111.56	179.61	164.24
8	213.85	141.76	199.55	136.70	199.56	164.24
10	218.27	151.08	209.3	146.47	209.3	164.24
12	216.53	155.77	207.02	150.70	207.02	164.24
15	209.70	159.28	202.14	153.54	202.16	164.24
20			199.27		199.28	164.24

TABLE 3.4 – Table des résultats du cylindre pincé avec diaphragme au point D

épaisseur = 0.03m, sol_ref = solution de référence $\tilde{V}_D = 4.114$						
N	DKT12	DKT18	CSFE	SFE3(cmc)	<i>CKLFE</i>	sol_ref
2	1.02	1.01	–	0.57	–	4.114
3	-	-	0.98	-	0.99	4.114
4	5.68	4.11	5.33	3.18	5.36	4.114
6	6.06	4.17	5.96	4.39	5.98	4.114
8	5.00	4.10	4.7	4.31	4.72	4.114
10	4.42	4.10	4.23	4.19	4.23	4.114
12	4.42	4.10	4.17	4.14	4.18	4.114
15	4.30	4.11	4.11	4.11	4.13	4.114
20			4.09		4.11	4.114

FIGURE 3.9 – Convergences du Cylindre pincé avec diaphragme au point chargé C

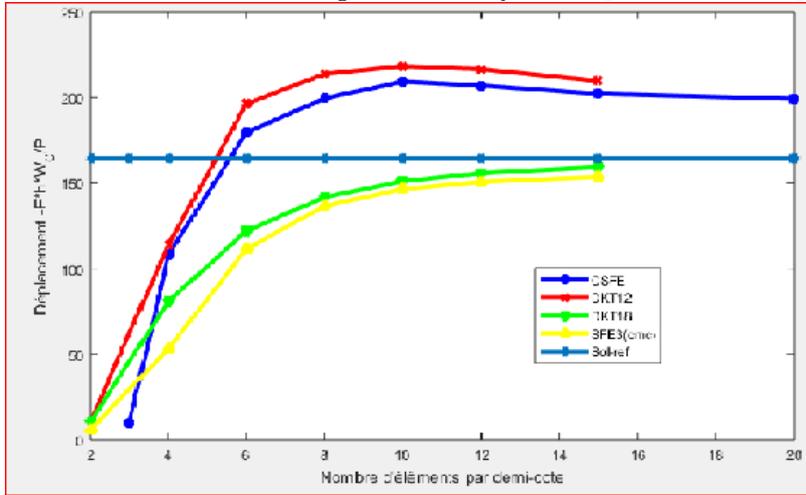
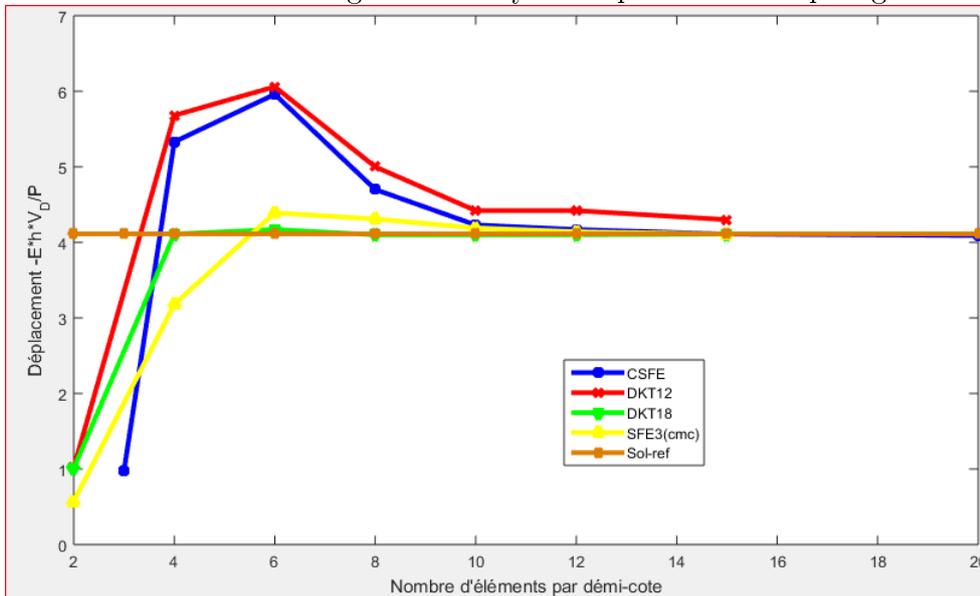


FIGURE 3.10 – Convergences du Cylindre pincé avec diaphragme au point chargé D



3.2.2 Écart et déviation du cylindre pincé avec diaphragme

Contrairement à l'étude faite précédemment pour le cas de l'hémisphère au point chargé, nous allons ici nous pencher sur la même investigation du cas du cylindre pincé

ci-dessus où le point n'est pas chargé, par exemple au point D où nous avons obtenu la convergence. Les rapports proportionnels $2\chi = h/R$ donnés dans la table 3.5 sont rangés suivant les valeurs 0.01, 0.02, 0.3, 0.316 et 0.4 de la coque cylindrique au point D . Ici, le rayon du cylindre est toujours maintenu constant pendant que l'épaisseur h varie avec le rapport 2χ . Nous observons dans les table 3.5, table 3.2 que pour l'épaississement dans $0 < 2\chi < 0.316$, les déplacements membranaires au point D sont les mêmes pour les deux modèles K-L et N-T. Quand le rapport $2\chi = h/R$ est supérieur ou égal à 0.316, les déplacements de flexion $\bar{V}_D = -\frac{E^*h^*V_D}{P}$ sans extension en membrane calculés sont différents pour les deux modèles K-L et N-T. Cela signifie qu'autour de $2\chi \simeq 0.316$, les deux approches K-L et N-T sont différentes lors de l'accroissement du rapport par l'épaisseur de la coque.

Nous allons examiner maintenant l'écart entre les déplacements au point D entre les deux modèles K-L et N-T. En faisant varier l'épaisseur dans le rapport présenté par $2\chi = 0.01, 0.02, 0.3, 0.316$ et 0.4, les résultats représentés dans la table 3.5 ci-dessous montrent clairement que les écarts des déplacements sont établis pour ces valeurs spécifiques du ratio. Et cette déviation est d'avantage importante avec l'accroissement de l'épaisseur et avec le raffinement du maillage au point chargé A.

TABLE 3.5 – Comparaison de deux modèles de coques cylindriques épaisses par rapport au ratio $\frac{h}{R}$: Reissner-Mindlin et Nzengwa-Tagne

rapport h/R	THEORIE	MAILLAGE					
		5×5	7×7	9×9	11×11	13×13	15×15
0.01	$R - M$	122.06	189.13	203.77	212.03	206.36	202.14
	$N - T$	122.06	189.13	203.77	212.03	206.36	202.14
0.02	$R - M$	88.69	129.42	177.26	191.01	186.25	183.87
	$N - T$	88.69	129.42	177.26	191.01	186.25	183.87
0.3	$R - M$	0.055	3.621	23.65	39.51	33.08	31.54
	$N - T$	0.055	3.622	23.65	39.51	33.08	31.55
0.3167	$R - M$	0.013	3.011	21.29	34.11	31.02	30.36
	$N - T$	0.01	2.98	21.001	33.88	30.79	30.12
0.4	$R - M$	0.008	2.18	16.28	28.01	23.87	22.006
	$N - T$	2.16×10^{-4}	1.69	15.54	27.53	23.21	21.67

3.3 Impact des contraintes transversales

Le changement de la courbure de Gauss trouve tout son fondement dans les travaux de [32] qui établissent les équations différentielles permettant de déterminer au chapitre 2, toutes les contraintes transversales $\sigma^{i3}, i = 1, 2, 3$ pour la sphère (voir équations 1.85,1.86,1.87) que pour un cylindre (voir équations 1.88,1.89,1.90) . Et une discrétisation par éléments finis nous conduit à une bonne convergence en déplacement avec l'élément

SSFE pour la sphère et l'élément CSFE pour le cylindre. Tous ces outils facilitent l'implémentation du calcul de toutes les contraintes transversales.

En effet, ayant obtenu la convergence absolue de l'hémisphère pour l'élément SSFE de demi-cote $N = 15$ et une pression au point de chargement $P_A = 0.53Pa$, en faisant varier les coordonnées de l'épaisseur $z \in [-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2}]$, où $h = 1.2m$ en coque épaisseur (car l'analyse limite de coque mince en coque épaisse est opérée pour la valeur de l'épaisseur égale à 0.99), les résultats numériques des contraintes transversales sont calculés à travers l'épaisseur et présentés dans la table 3.6 ci dessous.

Une analyse approfondie des résultats numériques de cette table 3.6 nous suggère une légitime satisfaction et pour cause : ces valeurs numériques des contraintes transversales satisfont les conditions aux bords libres des deux hypersurfaces qui ont été prédites dans [32]. Rappelons que ces équations différentielles étaient assujeties à une condition initiale et une condition finale. Et ces résultats montrent l'habileté de l'élément SSFE basé sur le modèle N-T à mieux dimensionner les coques épaisses. Il apparaît alors que les contraintes de cisaillement varient à travers l'épaisseur comme énoncé pour les équations des coques épaisses en 3D. Nous déduisons donc qu'il n'est point possible de négliger les contraintes transversales en coques épaisses.

TABLE 3.6 – Analyse au point de convergence de l'hémisphère les contraintes transversales avec $\chi = 0.06$

z	-0.6	-0.466	-0.2	0.066	0.2	0.467	0.6
$\sigma^{13}(Pa)$	0	0.005	0.001	0.019	0.021	0.025	0.259
$\sigma^{23}(Pa)$	0	0.007	0.018	0.026	0.028	0.034	0.035
$\sigma^{33}(Pa)$	1.610^{-14}	-0.132	-0.309	-0.417	-0.455	-0.514	-0.533

3.3.1 Discussion

Nous avons dans cette partie construit un élément fini de classe C^0 : SSFE et CSFE de coques épaisses respectivement sphériques et cylindriques pouvant discrétiser le modèle N-T et utilisant la technique du PPR. Cette opération avait pour but de résoudre le problème de discontinuités du gradient à travers l'interpolation locale aux noeuds des éléments triangulaires adjacents.

La convergence de notre élément SSFE ou CSFE a été clairement établie et cet élément utilise 12 degrés de liberté par élément triangulaire. Cette méthode permet d'établir une suite d'approximation de plus en plus voisine de la solution recherchée : les coques épaisses linéairement élastiques. On constate par ailleurs que l'élément SSFE ou CSFE est très performant et utilise moins d'espace mémoire que les éléments DKT12, DKT18 et SFE qui sont basés sur des approches Kirchhoff-Love (K-L) pour les coques minces et Reissner-Mindlin (R-M) pour les coques épaisses. Ces éléments négligent tous la troisième forme fondamentale dans leurs cinématiques. On peut alors dire que le modèle N-T est une forme généralisée du modèle K-L à cause de la bonne utilisation de la base réelle de la coque dans les calculs de certains paramètres car, les conditions $\epsilon_{i3}(u) = 0 \quad i = 1, 2, 3$

modifient fondamentalement la loi constitutive contraintes-déformations qui contiennent la troisième forme fondamentale négligée par les approches K-L et R-M.

Ces paramètres (contraintes, déformations) importants dans le dimensionnement des coques épaisses sont fonction des ratios $\chi = h/2R$ et χ^2 qui influencent l'analyse des comportements de la coque en maintenant son rayon constant et cette technique nous a permis de comprendre le sens de cette influence dans l'analyse des deux modèles K-L et N-T. Bien plus, on peut noter que l'élément SSFE ou CSFE simule les coques minces et coques épaisses linéairement élastiques. Au delà des limites de certaines valeurs du ratio $2\chi = h/R \approx 0.099$ pour la sphère et 0.316 pour le cylindre, les deux modèles K-L et N-T ne sont plus les mêmes; il s'avère que le modèle N-T est mieux que les autres modèles (K-L et R-M) en terme d'optimisation d'énergie dans l'analyse des comportements des structures coques épaisses car il récupère une partie de l'énergie rejeté par ces derniers.

En effet, en analysant la répartition des énergies dans l'énergie totale de déformation due aux modèles K-L et R-M découlant des équations (1.77), elles contiennent l'énergie de déformation membranaire E_{ee} et l'énergie de déformation flexionnelle E_{kk} ; tel que $E^{R-M} = E_{ee} + E_{kk}$. De même, l'énergie totale de déformation due au modèle N-T décrite par les équations (1.78) contiennent en plus de E^{R-M} des termes additionnels d'énergies couplées membrane/ courbure de Gauss (E_{eQ}, E_{Qe}) et l'énergie gaussienne de déformation E_{QQ} . Donc $E^{N-T} = E^{R-M} + E_{QQ} + E_{eQ} + E_{Qe}$.

Où

$E_{ee} = E(h/R)\alpha_{ee}$, $E_{kk} = E(h/R)(h/R)^2\alpha_{kk}$, $E_{QQ} = 10^{-1}E(h/R)(h/R)^4\alpha_{QQ}$ et $E_{eQ} = E_{Qe} = 10^{-1}E(h/R)(h/R)^2\alpha_{eQ}$; représentant les portions de contribution d'énergies dans le modèle N-T et α_{ee} , α_{kk} et α_{QQ} sont des constantes indépendantes de h/R . Comme nous l'avons mentionné plus haut, lorsque 2χ est plus grand que 0.099 pour la sphère et 0.316 pour le cylindre, ces énergies additionnelles (E_{eQ}, E_{Qe}, E_{QQ}) influencent fondamentalement l'énergie globale de déformation et ceci montre la différence entre les modèles N-T et R-M appliqués aux coques épaisses sphériques et cylindriques.

Les investigations de la variation du ratio h/R pour certaines valeurs $0 < 2\chi < 0.099$ pour la sphère et $0 < 2\chi < 0.316$ pour le cylindre montrent que les modèles classiques de Kirchhoff-Love, Reissner-Mindlin et Nzenywa-Tagne Simo ont les mêmes contribution en terme d'énergie totale de déformation car les termes additionnels contenant le changement de la troisième forme fondamentale n'ont aucune influence. Ces énergies E_{eQ} E_{Qe} E_{QQ} disparaissent dans l'énergie globale de déformation quand $\chi^2 < 0.01$ pour la sphère et $\chi^2 < 0.1$ pour le cylindre parce qu'ils sont inversement proportionnels à 10^8 ; dans ce cas $E^{N-T} = E^{R-M}$. Mais quand les ratios sont $0.099 \leq h/R < 1$ pour la sphère et $0.316 \leq h/R < 1$ les résultats de déplacements recherchés pour les deux modèles diffèrent parce que les termes E_{eQ} et E_{QQ} ne disparaissent plus dans l'énergie globale de déformation. Le résultat de cette analyse démontre que cette énergie additionnelle dans l'énergie totale de déformation réhausse la rigidité de la coque. Bien plus l'élément SSFE ou CSFE nous permet de mieux simuler les coques épaisses et en plus même facilite le calcul des contraintes transversales.

Conclusion

Les éléments finis SSFE et CSFE utilisant la technique du PPR pour simuler respectivement les coques sphériques et cylindriques avec des éléments finis de classe C^0 triangulaires droits, nous a permis d'obtenir des résultats probants de convergence et sont habilités dans le dimensionnement des coques épaisses. Il est efficacement prouvé que ces éléments sont rapides en temps de calcul car utilisent moins d'espaces mémoire que ceux ayant les mêmes lois de comportement, utilisés dans différents benchmarks. Il est aussi clairement montré que le modèle N-T traite proprement les coques sphériques ou cylindriques minces ou épaisses : ce modèle établit de fait l'importance du changement du tenseur de la troisième forme fondamentale dans l'énergie totale de déformation, surtout lorsque le ratio $\chi = h/2R$ devient plus important.

Les contraintes transversales correctement établies par nos équations différentielles dans le modèle N-T sont numériquement calculées avec notre élément SSFE ou CSFE et vérifient les conditions aux limites prédites dans ce problème modèle. On est capable dorénavant en ingénierie de structure, de mieux dimensionner avec précision les structures coques sphériques et cylindriques linéairement élastiques. Lorsque les contraintes de cisaillement transverse deviennent importantes et/ou lorsque l'épaisseur de la coque varie. Les modèles existants ne traitent pas ce cas.

Deuxième partie

APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE MODÈLE STATIQUE DE COQUES ÉPAISSES LINÉAIREMENT ÉLASTIQUES AVEC ÉFFETS DE CISAILLEMENT TRANSVERSE

INTRODUCTION

Cette partie est consacrée à la validation du modèle statique de Nzenzwa de coques épaisses linéairement élastiques. Il prend en compte la variation des contraintes à travers l'épaisseur de la coque. Ce modèle est déduit directement du problème tridimensionnel. Nous nous proposons de développer un élément fini de coques épaisses linéairement élastique permettant de discrétiser par éléments finis de classe C^0 ce modèle de Nzenzwa.

Rappelons que le modèle Nzenzwa s'inspire du modèle N-T. Rappelons également que celui-ci prend en compte l'expression du tenseur de déformation qui contient le changement de la troisième forme fondamentale de la surface moyenne de la coque. La solution découlant de ce modèle est une fonction quadratique de l'épaisseur de la coque plus un terme additionnel, fonction de l'allongement de l'épaisseur de la coque. Ceci revient à dire que le déplacement dans ce problème modèle apparaît comme un champ de déplacement sous l'approche N-T plus un terme additionnel fonction de l'allongement à travers l'épaisseur de la coque.

Par ailleurs, nous avons rappelé dans la première partie qu'une discrétisation directe par la méthode de Galerkin des champs de contraintes éléments finis obtenus par l'approche déplacement, présente des sauts aux interfaces entre les éléments triangulaires adjacents. Cette discontinuité est due nécessairement à la présence des gradients des déplacements à l'intérieur de ces contraintes. Pour pallier cette difficulté, nous allons faire appel à la technique du PPR pour reconstruire ces gradients. Pour ce faire, nous nous inspirerons sur les travaux fait précédemment sous l'hypothèse de déformation plane. Ainsi, nous construirons un élément fini appliqué à ce modèle Nzenzwa en développant une discrétisation basée sur une combinaison de l'approche K-L et la fonction discrétisée de l'allongement de l'épaisseur de la coque proposé par différents chercheurs tels que [41, 39, 40], [50], [49], [17, 18] et [25, 26, 27].

Deux chapitres et une conclusion constitueront l'ossature de cette partie.

Le premier chapitre va présenter le modèle Nzenzwa et sa formulation variationnelle ; ensuite nous allons élaborer une discrétisation de ce modèle par la méthode des éléments finis en construisant l'espace des solutions numériques, le schéma numérique sur un maillage triangulaire régulier utilisant la technique du PPR et éventuellement sa matrice de rigidité élémentaire.

Le deuxième chapitre est consacré à la validation du modèle Nzenzwa au moyen des tests numériques utilisant l'élément fini construit sur un problème de coque sphérique isotrope sous charge concentrée. Celui-ci est un problème 3D d'équilibre isotherme linéarisé pour un matériau homogène isotrope de sphères concentriques sous pression.

Chapitre 4

DISCRÉTISATION DU MODÈLE STATIQUE DE COQUES ÉPAISSES AVEC VARIATION DES CONTRAINTES TRANSVERSALES

Plusieurs méthodes théoriques et même numériques ont pu être développées pour tenter de résorber le problème de solide en torsion. Et comme nous l'avons rappelé, il existe plusieurs modèles : “ First Order Shear Deformation Théory”, “ Higher Order Shear Deformation Théory” et autres basées sur l'hypothèse de la non linéarité de la variation des contraintes transversales sur l'épaisseur de la coque. Cependant, il faut trouver une distribution de contraintes à travers l'épaisseur rendant les contraintes de cisaillement transverse continues. Plusieurs chercheurs se sont penchés sur cette question en conjecturant différents types de fonctions interpolant l'allongement de la coque $w(z)$ surtout dans la direction de l'épaisseur, on peut citer :

- modèle de Reddy où $w(z) = z(1 - \frac{4z^2}{3h^2})$
- modèle de Touratier où : $w(z) = \frac{h}{\Pi} \sin(\frac{\Pi z}{h})$
- modèle d'Ambartsumian : $w(z) = \frac{z}{2}(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3})$
- modèle de Kaczkowski , Panc et Reissner où : $w(z) = \frac{5z}{4}(1 - \frac{4z^2}{3h^2})$
- modèle de Karama et al, Aydogdu où : $w(z) = ze^{-2(\frac{z}{h})^2}$
- et tout récemment Mantari et al où : $w(z) = \sin(\frac{\Pi z}{h})e^{\frac{1}{2}\cos(\frac{\Pi z}{h})} + \frac{\Pi}{2h}z$.

La théorie des coques épaisses linéairement élastiques sous le modèle N-T nous a conduit à la construction d'un élément fini que nous avons nommé SSFE pour des coques sphériques qui a présenté une bonne convergence sur les benchmarks de coques minces et épaisses et mieux encore a aidé à calculer toutes les contraintes transversales à travers l'épaisseur de la coque.

Les travaux de Robert Nzengwa [33] vient élargir le champ d'étude. En partant de la Loi de Comportement des solides 3D, il va ré-écrire les équations par la même technique

de “démultiplication” utilisée dans la théorie des coques N-T pour montrer que :

- Le déplacement transversal u_3 est la somme de deux déplacements :

$$u_3 = \eta_3 + q(x, z) \quad (4.1)$$

où η_3 est le déplacement transversal sous le modèle N-T et $q(x, z)$ est l’allongement de l’épaisseur de la coque au cours de la déformation

- Le tenseur de déformation ϵ_{ij} dans ce cas est une somme quadratique de l’épaisseur de la coque (suivant le modèle N-T) et un terme supplémentaire “stretching” fonction linéaire de l’allongement q :

$$\epsilon_{ij}(u) = \epsilon_{ij}(u(\eta)) + \epsilon_{ij}(u(q)) \quad (4.2)$$

- Les calculs des contraintes transversales s’expriment de façon directe sans passer par la résolution d’équations différentielles ordinaire comme dans le cas précédent de nos travaux [32]. On utilise à cet effet la loi constitutive contrainte-déformation 3D pour calculer toutes les contraintes.

il sera question pour nous :

De rappeler la théorie de coques de Nzenywa qui prend en compte la variation des contraintes transversales à travers l’épaisseur de la coque

De revoir la formulation variationnelle de notre problème modèle statique ie dans [33] on fixe le temps ; ce qui nous conduira à réajuster la formulation faite dans l’hypothèse cinématique de N-T et réadapter les outils nécessaires à sa discrétisation. Dans cette hypothèse cinématique de Nzenywa, le tenseur de déformation est fonction des déplacements (η_α, η_3, q) et de leurs dérivées partielles par rapport au système de coordonnées $x = (x^1, x^2)$.

De maintenir le schéma de discrétisation de notre problème modèle par rapport à ce que nous avons fait dans l’article annexé à cette thèse sous l’hypothèse N-T juste en augmentant d’un cran le degré de liberté de l’allongement de la fibre ; ie au lieu de 3 ddls (η_α, η_3) on aura 4 ddls (η_α, η_3, q) .

Les difficultés de discrétisation des gradients rencontrés sous l’hypothèse de N-T devront toujours se poser et pour cela nous pourrons utiliser la même méthode de reconstruction du gradient par la technique du PPR pour faciliter dans un élément E l’interpolation : $C^1(E)$ pour les déplacements η_α et l’élargissement q , $C^2(E)$ pour le déplacement η_3 .

4.1 THÉORIE DES COQUES DE NZENYWA ET SA FORMULATION VARIATIONNELLE

4.1.1 Théorie des coques de Nzenywa

C’est une théorie bidimensionnelle déduite de la théorie tridimensionnelle de solide coque qui introduit une forme particulière du déplacement admissible, semblable à la solution du problème de solide 3D chargé en torsion. Il déduit par analyse limite que

$r\vec{ot}(\phi) = 0$ où ϕ est le champ total de déformations transversales. La solution des équations différentielles ordinaires obtenues :

$$r\vec{ot}(\phi) = 0 \iff \phi = \vec{grad}(q(x, z)) \quad (4.3)$$

Or ϕ étant le champ total de vecteur de déformations transversales, nous avons :

$$\phi = \begin{bmatrix} 2 \in_{\alpha 3} \\ \in_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q(x^1, x^2, z)}{\partial x^\alpha} \\ \frac{\partial q(x^1, x^2, z)}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Considérant $\{a_1, a_2, a_3\}$ et $\{a^1, a^2, a^3\}$ les bases covariantes et contravariantes respectivement de la surface moyenne S et $\{g_1, g_2, g_3\}, \{g^1, g^2, g^3\}$ respectivement les bases covariantes et contravariantes de la coque Ω . Alors comme nous avons vu aux paragraphes précédents,

$$g_\alpha = (\delta_\alpha^\tau - z b_\alpha^\tau) a_\tau = (\mu_\alpha^\tau) a_\tau, \quad g_3 = a_3 \quad (4.5)$$

$$g^\alpha = (\mu_\tau^\alpha)^{-1} a^\tau, \quad g^3 = a^3$$

$$d\Omega = (1 - 2z b_\alpha^\alpha + z^2 \det(b_\beta^\alpha)) dz dS = \rho(x, z) dz dS \quad (4.6)$$

où $b_\alpha^\rho = a^{\rho\gamma} b_{\gamma\alpha}$ et $b_{\gamma\alpha}$ sont les composantes des tenseurs de courbure et $a^{\rho\gamma}$ est la composante contravariante de la métrique de la surface moyenne S . Le champ de vecteur peut être exprimé indifféremment par les composantes par morceaux de bases g^i ou a^i comme suit :

$$v = v_i(x, z) g^i = \bar{v}_\alpha(x, z) a^\alpha + v_3(x, z) a^3, \quad v_\alpha = (\mu_\alpha^\tau) \bar{v}_\tau \quad \text{and} \quad \bar{v}_\alpha = (\mu_\alpha^\tau)^{-1} v_\tau$$

Alors les tenseurs de déformation (confère [Nzengwa et Tagne Simo, 1999]) sont donnés par

$$\begin{cases} \epsilon_{\alpha\beta}(u) &= \frac{1}{2} (u_{\alpha/\beta} + u_{\beta/\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} ((\mu_\alpha^\tau) (\nabla_\beta \bar{u}_\tau - b_{\tau\beta} \bar{u}_3) + (\mu_\beta^\tau) (\nabla_\alpha \bar{u}_\tau - b_{\alpha\tau} \bar{u}_3)) \\ \epsilon_{3\alpha}(u) &= \frac{1}{2} (u_{\alpha/3} + u_{3/\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} ((\mu_\alpha^\tau) \bar{u}_{\tau,3} + \bar{u}_{3,\alpha} + b_\alpha^\tau \bar{u}_\tau) \\ \epsilon_{33}(u) &= u_{3,3} = \frac{dv_3}{dz} \end{cases} \quad (4.7)$$

Les équations (4.3) et (4.4) conduisent aux résultats suivants :

$$\begin{cases} \bar{u}_\alpha &= (\mu_\alpha^\tau) \xi_\tau - z \partial_\alpha \xi_3 \quad \bar{u}_3 = \xi_3 \quad \text{pour} \quad \xi_\alpha, \xi_3 \quad \text{fonction de} \quad x = (x_1, x_2) \\ &\text{et} \\ u_\alpha &= \xi_\alpha - z (\partial_\alpha \xi_3 + 2b_\alpha^\tau \xi_\tau) + z^2 (b_\nu^\tau b_\alpha^\nu \xi_\tau + b_\alpha^\tau \partial_\alpha \xi_3) \\ u_3 &= \xi_3 + q(x, z) \end{cases} \quad (4.8)$$

4.1.2 Formulation Variationnelle du problème modèle en déplacement de traction

En posant : $U_{ad}^w = \{(\eta_\alpha, \eta_3, \bar{q}), (\eta_\alpha, \bar{q}) \in (H_{\Gamma_0}^1(S))^3 \text{ et } \eta_3 \in H_{\Gamma_0}^2(S)\}$

La formulation variationnelle forte du problème d'équilibre tridimensionnel de coques d'épaisseur h isotrope et linéairement élastique occupant le domaine Ω et de surface moyenne S de la forme (1.55) est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u = (\eta, q) \in U_{ad}^w & \text{tel que} \\ E^w(u, v) = L^w(v) \quad \forall v = (\xi, \tau) \in U_{ad}^w \end{cases} \quad (4.13)$$

avec

$$\begin{cases} E^w(u, v) = \int_S \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) \psi(x, z) dz \right) dS \\ L^w(v) = \int_S \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f^i(x, z) v_i(x, z) \psi(x, z) dz \right) dS + \int_\Gamma P^i(x, z) \nu_i(x, z) d\Gamma \\ \quad + \int_S \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f^3 w \bar{\tau} dz \right) dS + \int_\Gamma P^3 w \bar{\tau} d\Gamma \\ = \int_S (F^i(x) \xi_i + F^4(x) \tau) dS + \int_{\gamma_1} (H^i(x) \xi_i + H^4(x) \tau) d\gamma_1 \\ \quad + \int_{\gamma_1} m^\alpha \theta_\alpha d\gamma_1 \end{cases} \quad (4.14)$$

où (F^i, F^4) , (H^i, H^4) , m^α et θ_α sont respectivement la résultante de forces de volume et de surface, de force de "stretching", la densité du moment et l'angle de rotation au cours de la déformation.

avec

$$\begin{cases} \sigma^{\alpha\beta} = \lambda (\epsilon_\rho^\rho(\eta) + \epsilon_l^l(q)) g^{\alpha\beta} + 2\mu (\epsilon^{\alpha\beta}(\eta) + \epsilon^{\alpha\beta}(q)) \\ \sigma^{\alpha 3} = 2\mu \epsilon^{\alpha 3}(q) \\ \sigma^{33} = \lambda (\epsilon_\rho^\rho(\eta) + \epsilon_l^l(q)) + (\lambda + 2\mu) \epsilon_\alpha^\alpha(q) \end{cases}$$

Nzengwa dans ses travaux [33] montre que ce problème 2D (4.13) admet une et une seule solution u définie par :

$$\begin{cases} u_\alpha = \eta_\alpha(x) - z (\partial_\alpha \eta_3(x) + 2b_\alpha^\tau \eta_\tau(x)) + z^2 (b_\nu^\tau b_\alpha^\nu \eta_\tau(x) + b_\alpha^\tau \partial_\alpha \eta_3(x)) \\ u_3 = \eta_3(x) + w(z) \bar{q}(x) \end{cases}$$

4.2 DISCRÉTISATION DU MODÈLE DE NZENGWA PAR ÉLÉMENTS FINIS DE CLASSE C^0

4.2.1 Espace d'interpolation

La continuité forte de notre problème variationnel (4.13) est définie dans l'espace U_{ad}^w . La triangulation de notre domaine 2D est fait de la même façon qu'au chapitre 2. Les éléments de triangle T_j de notre maillage de noeuds sommets $a_1 = (x^1, y^1)$, $a_2 =$

(x^2, y^2) et $a_3 = (x^3, y^3)$, les polynômes P_1 et P_2 d'ordre respectif un et deux avec pour bases respectives $\{1, x, y\}$ et $\{1, x, y, x^2, y^2, xy\}$; les bases de fonctions barycentriques respectives $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ et $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 4\lambda_1\lambda_2, 4\lambda_1\lambda_3, 4\lambda_2\lambda_3\}$ générant ces polynômes P_1 et P_2 sont définies dans ce triangle par :

$$\begin{cases} \lambda_1(x, y) = \frac{1}{2\Delta}[(y^3 - y^2)(x^2 - x) - (x^3 - x^2)(y^2 - y)] \\ \lambda_2(x, y) = \frac{1}{2\Delta}[(y^1 - y^3)(x^3 - x) - (x^1 - x^3)(y^3 - y)] \\ \lambda_3(x, y) = \frac{1}{2\Delta}[(y^2 - y^1)(x^1 - x) - (x^2 - x^1)(y^1 - y)] \end{cases} \quad (4.15)$$

$$2 \Delta = 2 \int_{T_j} dx dy = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{bmatrix} = (x^3 - x^2)(y^1 - y^2) - (x^1 - x^2)(y^3 - y^2) \quad (4.16)$$

Considérons T_h une triangulation de la surface moyenne de la coque et n_h le nombre de triangles et N_h le nombre de sommets. nous notons :

$$X_h^1 = \{u_h \in C^0(\bar{S}), u_h|_{T_j} \in P_1(T_j), \forall T_j, j = 1, \dots, n_h\}$$

le sous-espace vectoriel de $H_{\gamma_0}^1(S)$ de dimension N_h et

$$X_h^2 = \{u_h \in C^1(\bar{S}), u_h|_{T_j} \in P_2(T_j), \forall T_j, j = 1, \dots, n_h \text{ et } \nabla u_h = G_h u_h = \nabla P_2\},$$

le sous espace vectoriel de $H_{\gamma_0}^2(S)$ de dimension $2N_h$ qui est le nombre de noeuds unisolvants (noeuds-sommets et noeuds-milieux). Alors

$$\mathcal{U}_h^w = X_h^1 \times X_h^1 \times X_h^2 \times X_h^1$$

est un sous espace vectoriel de $U_{ad}^w = (H_{\Gamma_0}^1(S))^3 \times H_{\Gamma_0}^2(S)$ où les vecteurs sont les polynômes de la forme P_1 et P_2 et cet espace vectoriel \mathcal{U}_h^w est de dimension $N = 2N_h + N_h^3$.

4.2.2 Schéma de discrétisation

T_h étant une triangulation de la coque à travers sa surface moyenne S , $T_j \in T_h$ un élément triangulaire de sommets a_1, a_2, a_3 et de noeuds-milieux des côtés a_4, a_5, a_6 . Soit un élément quelconque $\eta^h \in \mathcal{U}_h$ défini ainsi qu'il suit :

$$\begin{cases} \eta_\alpha^h(x^1, x^2) |_{T_j} \in P_1, & \alpha = 1, 2; 1 \leq j \leq n_h \\ \bar{q}^h(x^1, x^2) |_{T_j} \in P_1, \\ \eta_3^h(x^1, x^2) |_{T_j} \in P_2, & 1 \leq j \leq n_h \end{cases} \quad (4.17)$$

En utilisant les polynômes barycentriques et en écrivant $\lambda_l = \lambda_l, 1 \leq l \leq 2; 1 \leq \alpha, \beta \leq 2$ et $1 \leq j \leq n_h$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\eta_\alpha^h(x^1, x^2) |_{T_j} = \sum_{k=1}^3 \eta_\alpha^h(a_k) \lambda_k(x^1, x^2) = \sum_{k=1}^3 \bar{\eta}_\alpha^k \lambda_k(x^1, x^2) \\
\bar{q}^h(x^1, x^2) |_{T_j} = \sum_{k=1}^3 \bar{q}^h(a_k) \lambda_k(x^1, x^2) = \sum_{k=1}^3 \bar{q}^k \lambda_k(x^1, x^2) \\
\eta_3^h(x^1, x^2) |_{T_j} = \sum_{k=1}^3 \eta_3^h(a_k) \lambda_k(x^1, x^2) + \sum_{k=4}^6 \eta_3^h(a_k) \lambda_{k-3}(x^1, x^2) \lambda(x^1, x^2) \\
= \sum_{k=1}^3 \bar{\eta}_3^k \lambda_k(x^1, x^2) + \sum_{k=4}^6 \bar{\eta}_3^k \lambda_{k-3}(x^1, x^2) \lambda_{k-2}(x^1, x^2) \\
\partial_\alpha \eta_3^h(x^1, x^2) |_{T_j} = \sum_{k=1}^3 \partial_\alpha \eta_3^h(a_k) \lambda_k(x^1, x^2), \quad \partial_\alpha \eta_i^h(a_k) = G_h(\eta_i^h)(a_k) \\
\partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(x^1, x^2) |_{T_j} = \sum_{k=1}^3 \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_k) \lambda_k(x, y), \quad \partial_{\alpha\beta}^2 \eta_3^h(a_k) = G_h(\partial_\alpha \eta_3^h)(a_k)
\end{array} \right. \quad (4.18)$$

4.2.3 convergence du schéma numérique ci-dessus

Théorème 4.2.1 (De convergence du schéma numérique 2) *Etant donné une triangulation de la coque à travers sa surface moyenne S , soit $T_j \in \mathcal{T}_h$ l'un des éléments triangulaires ; et $\eta^h = (\eta_\alpha^h, \eta_3^h, \eta_4^h = q^h)_{\alpha=1,2} \in \mathcal{U}_h^w$ la projection orthogonale de la solution (exacte) $\eta = (\eta_\alpha, \eta_3)_{\alpha=1,2}$ sur \mathcal{U}_h . Pour la norme $\|\bullet\|_{U_{ad}^w}$ où $U_{ad}^w = (IH^1(S))^3 \times H^2(S)$ définie par :*

$$\begin{aligned}
\|(\eta_\alpha, \eta_3, \eta_4)\|^2 &= \sum_{i=1}^4 \|\eta_i\|_{L^2(S)}^2 + \sum_{\alpha,\beta} \|\nabla_\alpha \eta_\beta\|_{L^2(S)}^2 \\
&+ \sum_\alpha \|\nabla_\alpha \eta_4\|_{L^2(S)}^2 + \sum_\alpha \|\nabla_\alpha \eta_3\|_{L^2(S)}^2 + \sum_{\alpha,\beta} \|\nabla_{\alpha\beta} \eta_3\|_{L^2(S)}^2
\end{aligned}$$

Le schéma numérique (4.17)-(4.18) converge.

Preuve(convergence) : La convergence du schéma numérique (4.17)-(4.18) est établie en trois étapes, en s'inspirant de celle démontrée au chapitre 2, paragraphe 2.3 ci-dessus. En effet, elle s'obtient par prolongement d'espace \mathcal{U}_h vers \mathcal{U}_h^w . soit $\eta^h = (\eta_\alpha^h, q, \eta_3^h)_{\alpha=1,2} \in \mathcal{U}_h^w$ la projection orthogonale de la solution (exacte) $\eta = (\eta_\alpha, q, \eta_3)_{\alpha=1,2}$ sur \mathcal{U}_h^w . Posons $q = \eta_4$ et rappelons que la norme $\|\bullet\|_{U_{ad}^w}$ où $U_{ad}^w = (IH^1(S))^3 \times H^2(S)$ est définie par :

$$\begin{aligned}
\|(\eta_\alpha, \eta_4, \eta_3)\|^2 &= \sum_{i=1}^4 \|\eta_i\|_{L^2(S)}^2 + \sum_{\alpha,\beta} \|\nabla_\alpha \eta_\beta\|_{L^2(S)}^2 + \sum_\alpha \left(\|\nabla_\alpha \eta_3\|_{L^2(S)}^2 + \|\nabla_\alpha \eta_4\|_{L^2(S)}^2 \right) \\
&+ \sum_{\alpha,\beta} \|\nabla_{\alpha\beta} \eta_3\|_{L^2(S)}^2
\end{aligned}$$

Ceci nous permet de déduire par les mêmes démarches qu'au paragraphe 2.3 la convergence de notre schéma numérique (4.17)-(4.18).

\mathcal{U}_h^w est le sous espace vectoriel de U_{ad}^w engendré par les vecteurs $(v_i)_{i=1}^{N_h}$ (v_i vecteur des polynômes de degré $k \in \{1, 2\}$). La formulation faible du problème (4.13) est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u^h = (\eta^h(x), w(z)\bar{q}^h) \in \mathcal{U}_h^w & \text{tel que} \\ E^w(u^h, v^h) = L^w(v^h) & \forall v^h \in \mathcal{U}_h^w \end{cases} \quad (4.19)$$

où

$$u^h = \bar{u}_\alpha^h a^\alpha + u_3^h a^3 \quad (4.20)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{u}_\alpha^h = \eta_\alpha^h - z [\partial_\alpha \eta_3^h + 2b_\alpha^\tau \eta_\tau^h] + z^2 [b_\nu^\tau b_\alpha^\nu \eta_\tau^h + b_\alpha^\tau \partial_\tau \eta_3^h] \\ u_3^h = \eta_3^h + \omega(z)\bar{q}^h(x) \end{cases} \quad (4.21)$$

Le problème variationnel (4.19) admet une et une seule solution dans \mathcal{U}_h^w car \mathcal{U}_h^w qui est un sous espace vectoriel fermé de U_{ad}^w , E^w est une forme bilinéaire continue et coercitive et L^w est une forme linéaire ; on applique le théorème de Lax-Milgram.

4.2.4 Formulation variationnelle numérique

Le vecteur des fonctions inconnues de notre problème modèle est sous la forme :

$$\begin{aligned} [E_u]^w = & (\eta_1; \partial_1 \eta_1; \partial_2 \eta_1; \eta_2; \partial_1 \eta_2; \partial_2 \eta_2; \eta_3; -2b_1^1 \eta_1 - 2b_1^2 \eta_2 - \partial_1 \eta_3; \\ & -2b_1^1 \partial_1 \eta_1 - 2b_1^2 \partial_1 \eta_2 - \partial_{11} \eta_3; -2b_1^1 \partial_2 \eta_1 - 2b_1^2 \partial_2 \eta_2 - \partial_{12} \eta_3; \\ & -2b_2^1 \eta_1 - 2b_2^2 \eta_2 - \partial_2 \eta_3; -2b_2^2 \partial_1 \eta_1 - 2b_2^2 \partial_1 \eta_2 - \partial_{21} \eta_3; \\ & -2b_2^1 \partial_2 \eta_1 - 2b_2^2 \partial_2 \eta_2 - \partial_{22} \eta_3; \bar{b}^1 \eta_1 + \bar{b}^1 \eta_2 + b_1^1 \partial_1 \eta_3 + b_1^2 \partial_2 \eta_3; \\ & \bar{b}^1 \partial_1 \eta_1 + \bar{b}^1 \partial_1 \eta_2 + b_1^1 \partial_{11} \eta_3 + b_1^2 \partial_{21} \eta_3; \bar{b}^1 \partial_2 \eta_1 + \bar{b}^1 \partial_2 \eta_2 + \\ & b_1^1 \partial_{12} \eta_3 + b_1^2 \partial_{22} \eta_3; \bar{b}^2 \eta_1 + \bar{b}^2 \eta_2 + b_2^1 \partial_1 \eta_3 + b_2^2 \partial_2 \eta_3; \\ & \bar{b}^2 \partial_1 \eta_1 + \bar{b}^2 \partial_1 \eta_2 + b_2^1 \partial_{11} \eta_3 + b_2^2 \partial_{21} \eta_3; \bar{b}^2 \partial_2 \eta_1 + \bar{b}^2 \partial_2 \eta_2 + \\ & b_2^1 \partial_{12} \eta_3 + b_2^2 \partial_{22} \eta_3; q; \partial_1 q; \partial_2 q) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Posons $u = (\eta, q)$ et $v = (\xi, \tau)$; la formulation variationnelle est de trouver $u \in \mathcal{U}_h^w$ tel que

$$\begin{aligned} E^w(u, v) &= \int_S \left(\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma^{ij}(u) : \epsilon_{ij}(v) \psi(x, z) dz \right) dS \\ &= \int_\Omega \{ \lambda(\epsilon_\alpha^\alpha(\eta) + \epsilon_l^l(q)) g^{\alpha\beta} + 2\mu(\epsilon^{\alpha\beta}(\eta) + \epsilon^{\alpha\beta}(q) + \epsilon^{\alpha 3}(q)) \\ &\quad + \epsilon^{\alpha 3}(q) + (\lambda + 2\mu) \epsilon^{33}(q) + \lambda(\epsilon_\alpha^\alpha(\eta) + \epsilon_l^l(q)) \} : [\epsilon_{\alpha\beta}(\xi) \\ &\quad + \epsilon_{\alpha\beta}(\tau) + \epsilon_{\alpha 3}(\tau) + \epsilon_{33}(\tau)] \rho(x, z) dS dz \\ &= + \int_S [\alpha_1(x)\bar{q} : [E_\xi] + \alpha_2(x)\partial_\alpha \bar{q} : [E_\xi] + \alpha_3(x)\bar{q} : [E_\xi] + \alpha_4(x)[E_\eta] : \bar{\tau} \\ &\quad + \alpha_5(x)[E_\eta] : \partial_\alpha \bar{\tau} + \alpha_6(x)\bar{q} : \bar{\tau} + \alpha_5(x)[E_\eta] : \partial_\alpha \bar{\tau} + \alpha_6(x)\bar{q} : \bar{\tau} + \alpha_7(x)\partial_\alpha \bar{q} : \bar{\tau} \\ &\quad + \alpha_8(x)\bar{q} : \partial_\alpha \bar{\tau} + \alpha_9(x)\partial_\alpha \bar{q} : \partial_\alpha \bar{\tau}] dS + A_1^*(\eta, \xi) + \int_S \alpha_0(x)[E_\eta] : [E_\xi] dS \\ &= L^w(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_h^w \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l}
\alpha_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda a_{\varphi\alpha} [D^t]_{\beta}^{\varphi} [D]_{\beta}^{\beta} \rho dz \quad \text{qui est une matrice d'ordre } 19 \times 19 \\
\alpha_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} w(z) \left((\lambda \Upsilon_l^l g^{\alpha\beta} + 2\mu \Upsilon^{\alpha\beta}) a_{\varphi\alpha} [D]_{\beta}^{\varphi} + 2(\lambda + \mu) \Upsilon_{\alpha}^{\alpha} a_{\varphi\alpha} [D]_{\beta}^{\varphi} \right) \rho dz \\
\alpha_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\mu w(z) [D]_{\beta}^l a_{l\alpha}) \rho dz \\
\alpha_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (2\mu \partial_z w(z) [D]_{\beta}^l a_{l\alpha}) \rho dz \\
\alpha_4 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [2(w(z) \Upsilon_{\alpha\beta} + \partial_z w(z)) \left(\lambda [D^t]_l^l g^{\alpha\beta} + 2\mu [D^t]_l^{\beta} a^{\alpha l} \right) \\
\qquad \qquad \qquad + \lambda [D^t]_{\alpha}^{\alpha} (w(z) \Upsilon_{\alpha\beta} + \partial_z w(z))] \rho dz \\
\alpha_5 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} w(z) \left(\lambda [D^t]_l^l g^{\alpha\beta} + 2\mu [D^t]_l^{\beta} a^{\alpha l} + \lambda [D^t]_{\alpha}^{\alpha} \right) \rho dz \\
\alpha_6 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (w(z) \lambda \Upsilon_l^l g^{\alpha\beta} + 2\mu (w(z) \Upsilon^{\alpha\beta} + \partial_z w(z))) (w(z) \Upsilon_{\alpha\beta} + \partial_z w(z)) \\
\qquad \qquad \qquad + 2w(z) (\lambda + \mu) \Upsilon_l^l (w(z) \Upsilon^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_z w(z)) \rho dz \\
\alpha_7 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2\mu (w(z) \Upsilon_{\alpha\beta} + \partial_z w(z)) \rho dz \\
\alpha_8 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{w(z)}{2} (w(z) \lambda \Upsilon_l^l g^{\alpha\beta} + 2\mu (w(z) \Upsilon^{\alpha\beta} + \partial_z w(z)) + 2w(z) (\lambda + \mu) \Upsilon_l^l) \rho dz \\
\alpha_9 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \frac{\omega^2(z)}{2} \rho dz \\
[D]_{\beta}^{\alpha} = [D_e]_{\beta}^{\alpha} - z [D_k]_{\beta}^{\alpha} + z^2 [D_Q]_{\beta}^{\alpha} \text{ qui est une matrice d'ordre } 1 \times 19 \\
\rho = 1 - \bar{H}z + \bar{K}z^2 \quad \bar{H} \text{ et } \bar{K} \text{ sont donnés par les équations 1.7 et 1.8}
\end{array} \right.$$

$A_1^*(\eta, \xi)$ est la fonction d'énergie inspiré du modèle N-T (1.78) tel que :

$$\begin{aligned}
A_1^*(\eta, \xi) = & \int_S \left(\frac{Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{E_{\xi}\}^t \left[(1-2\nu) ([D_e]_{\beta}^{\alpha})^t [D_e]_{\alpha}^{\beta} + \nu ([D_e]_{\alpha}^{\alpha})^t ([D_e]_{\beta}^{\beta}) \right] \{E_{\eta}\} \right. \\
& + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)} \{E_{\xi}\}^t \left[(1-2\nu) ([D_k]_{\beta}^{\alpha})^t [D_k]_{\alpha}^{\beta} + \nu ([D_k]_{\alpha}^{\alpha})^t ([D_k]_{\beta}^{\beta}) \right] \{E_{\eta}\} \\
& + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)} \{E_{\xi}\}^t \left[(1-2\nu) ([D_e]_{\beta}^{\alpha})^t [D_Q]_{\alpha}^{\beta} + \nu ([D_e]_{\alpha}^{\alpha})^t ([D_Q]_{\beta}^{\beta}) \right] \{E_{\eta}\} \\
& + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)} \{E_{\xi}\}^t \left[(1-2\nu) ([D_Q]_{\beta}^{\alpha})^t [D_e]_{\alpha}^{\beta} + \nu ([D_Q]_{\alpha}^{\alpha})^t ([D_e]_{\beta}^{\beta}) \right] \{E_{\eta}\} \\
& \left. + \frac{Eh^5}{80(1+\nu)(1-2\nu)} \{E_{\xi}\}^t \left[(1-2\nu) ([D_Q]_{\beta}^{\alpha})^t [D_Q]_{\alpha}^{\beta} + \nu ([D_Q]_{\alpha}^{\alpha})^t ([D_Q]_{\beta}^{\beta}) \right] \{E_{\eta}\} \right] dS
\end{aligned}$$

qui est engendrée par la base (1.34) de la théorie des coque N-T et E^{ad} est la fonction d'énergie engendrée par la base $[E_q]^{ad} = (q; \partial_1 q; \partial_2 q)$. Ainsi $[E_u]^w = [E_\eta]^{N-T} \oplus [E_q]^{ad}$ ie $[E_u]^w$ est somme directe de $[E_\eta]^{N-T}$ et de $[E_q]^{ad}$.

La matrice de comportement généralisé de la théorie des coques de Nzingwa peut se mettre sous la forme :

$$C_g^w = \begin{pmatrix} \alpha_0 + C_g^* & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_5 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_6 & \alpha_8 & \alpha_8 \\ \alpha_2 & \alpha_7 & \alpha_9 & \alpha_9 \\ \alpha_2 & \alpha_7 & \alpha_9 & \alpha_9 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

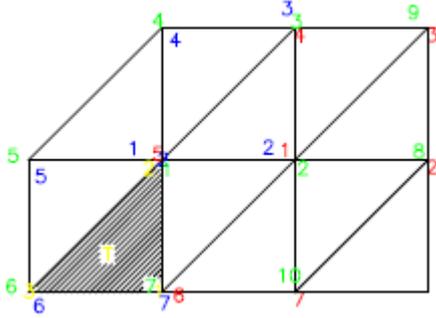
où C_g^* est la matrice de comportement généralisé inspirée de (2.28) de la théorie des coques de N-T d'ordre 19×19 définie par :

$$\begin{aligned} [C_g^*] = & \frac{Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left([D_e]_\beta^\alpha \right)^t \left([D_e]_\alpha^\beta \right) + \nu \left([D_e]_\alpha^\alpha \right)^t \left([D_e]_\lambda^\lambda \right) \right\} \\ & + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left([D_k]_\beta^\alpha \right)^t \left([D_k]_\alpha^\beta \right) + \nu \left([D_k]_\alpha^\alpha \right)^t \left([D_k]_\lambda^\lambda \right) \right\} \\ & + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left([D_Q]_\beta^\alpha \right)^t \left([D_e]_\alpha^\beta \right) + \nu \left([D_Q]_\alpha^\alpha \right)^t \left([D_k]_\lambda^\lambda \right) \right\} \\ & + \frac{Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left([D_e]_\beta^\alpha \right)^t \left([D_Q]_\alpha^\beta \right) + \nu \left([D_e]_\alpha^\alpha \right)^t \left([D_Q]_\lambda^\lambda \right) \right\} \\ & + \frac{Eh^5}{80(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left([D_Q]_\beta^\alpha \right)^t \left([D_Q]_\alpha^\beta \right) + \nu \left([D_Q]_\alpha^\alpha \right)^t \left([D_Q]_\lambda^\lambda \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.3 Expression de la matrice de rigidité

Il découle de ce qui précède que la recherche de la solution de notre problème modèle revient à déterminer en tout point de la coque, la valeur des déplacements nodaux. Or nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'en chaque point de notre domaine, en utilisant la méthode du reconstruction du gradient par la technique du PPR, nous pouvons déterminer de façon explicite tous les inconnues du problème ; ainsi en prenant un élément arbitraire dans notre triangulation T_h représenté par l'élément où son premier noeud, un noeud-milieu, le deuxième noeud, un noeud-coin et le troisième noeud-interne, alors on a :

FIGURE 4.1 – Élément où le premier noeud est noeud-milieu, le second un noeud-coin et le troisième noeud-interne



alors en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \lambda_i(x, y) \\ \rho_k = 4\lambda_{k-3}(x, y)\lambda_{k-2}(x, y), k = 4, 5, 6 \\ \beta_i^\alpha = [P_1 M_i^\alpha][C_1](:, i) + [P_1 C_i^\alpha][C_2](:, i) + [P_1 I_i^\alpha][C_3](:, i) \\ \gamma_i^\alpha = [P_2 M_3^\alpha][C_1](:, i) + [P_2 C_3^\alpha][C_2](:, i) + [P_2 I_3^\alpha][C_3](:, i) \\ \tau_i^{\alpha\beta} = [P_2 M_3^{\alpha\beta}][C_1](:, i) + [P_2 C_3^{\alpha\beta}][C_2](:, i) + [P_2 I_3^{\alpha\beta}][C_3](:, i) \end{array} \right. \quad (4.26)$$

la restriction du vecteur $[E_u]^w$ sur un élément T_j peut être transformée sous la forme :

$$[E_u^{T_j}]^w = [B^{T_j}]^w \left\{ d_u^{T_j} \right\}^w$$

avec :

et $\left\{d_v^{T_j}\right\}^w = [\bar{\eta}_1^{j1}, \bar{\eta}_1^{j2}, \bar{\eta}_1^{j3}, \bar{\eta}_2^{j1}, \bar{\eta}_2^{j2}, \bar{\eta}_2^{j3}, \bar{\eta}_3^{j1}, \bar{\eta}_3^{j2}, \bar{\eta}_3^{j3}, \bar{\eta}_3^{j4}, \bar{\eta}_3^{j5}, \bar{\eta}_3^{j6}, \bar{q}^{j1}, \bar{q}^{j2}, \bar{q}^{j3}]^t$.

Ce qui nous permet d'écrire la fonctionnelle d'énergie sous la forme :

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \sum_{j=1}^{N_h} \int_{T_j} ([E_v^{T_j}]^t C_g^w [E_u^{T_j}]) dx dy \\ &= \sum_{j=1}^{N_h} \int_{T_j} \left\{d_v^{T_j}\right\}^t \left(([B^{T_j}]^w)^t C_g^w [B^{T_j}]^w \left\{d_u^{T_j}\right\} \right) dx dy \\ &= \sum_{j=1}^{N_h} \left\{d_v^{T_j}\right\}^t \left([K^j]^w \left\{d_u^{T_j}\right\} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

où

$$[K^j]^w = \int_{T_j} \left(([B^{T_j}]^w)^t C_g^w [B^{T_j}]^w \right) dx dy; \quad 1 \leq j \leq N_h \quad (4.28)$$

$[K^j]^w$ $j \in N_h$ est la matrice de rigidité élémentaire sur l'élément T_j associée à notre problème modèle.

Par conséquent, pour déterminer la matrice de rigidité, il suffit de faire un assemblage à partir du maillage du domaine de la coque.

Pour déterminer la matrice de force généralisée, le second membre de la formulation variationnelle (4.13) nous conduit à :

$$\begin{aligned} L^w(v) &= \int_S (F^i(x)\xi_i + F^4(x)\tau) dS + \int_{\gamma_1} (H^i(x)\xi_i + H^4(x)\tau) d\gamma_1 \\ &\quad + \int_{\gamma_1} m^\alpha \theta_\alpha d\gamma_1 \quad i=1,2,3 \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{T_j} \left\{d_v^{T_j}\right\}^t \left([B^{T_j}]^w \right)^t [P] | J | dS + \oint_{\omega_1^*} \left\{d_v^{T_j}\right\}^t \left([B^{T_j}]^w \right)^t [G] | J_* | d\zeta \\ &= \sum_{j=1}^{N_h} \left\{d_v^{T_j}\right\} [f^j]^w \end{aligned} \quad (4.29)$$

Où

$$[f^j]^w = [F_1^{j1}, F_1^{j2}, F_1^{j3}, F_2^{j1}, F_2^{j2}, F_2^{j3}, F_3^{j1}, F_3^{j2}, F_3^{j3}, F_3^{j4}, F_3^{j5}, F_3^{j6}, F_4^{j1}, F_4^{j2}, F_4^{j3}]^T$$

Remarque : Ces formules prennent en compte des charges réparties sur toute la surface moyenne et des charges aux bords. D'autres cas de charges pourraient être considérés, à l'exemple des charges concentrées.

Chapitre 5

VALIDATION DU MODÈLE DES COQUES NZENGWA

Dans cette section, nous nous proposons d'examiner le problème 3D d'équilibre isotherme, linéarisé pour un matériau homogène, isotrope d'une sphère creuse sous pression. La comparaison des solutions analytiques ou de référence de ces coques aux solutions approximées par le modèle des coques Nzengwa sera au centre de notre analyse qui s'articulera autour des points focaux suivant :

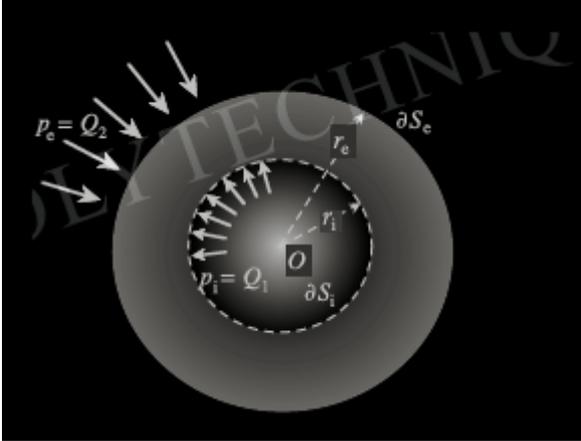
- Montrer la performance de notre nouvel élément fini de coques épaisses associé au modèle Nzengwa nommé 2D-Admissive Shell Finite Element (2D-ASFE) ;
- Montrer l'habileté de notre élément à mieux approximer en termes de consistance dans le calcul numérique de certains paramètres (déplacements, contraintes, déformations)

Nous allons tout juste examiner le cas de la sphère creuse sous pression et achever le chapitre par une discussion et une conclusion.

5.1 PROBLÈME DE SPHÈRE CREUSE SOUS PRESSION

On considère une enveloppe sphérique de centre O de rayons intérieur et extérieur respectivement r_0 et r_1 (voir figure 5.1 ci-dessous)

FIGURE 5.1 – Sphère creuse sous pression



En utilisant un système de coordonnées sphériques de centre O , les données sont de la forme :

- les forces de masses sont nulles
- les données au contour portent exclusivement sur les efforts surfaciques : pression normale uniforme égale à P_0 exercée à l'intérieur de la sphère

$$\vec{P}_{int} = P_0 \vec{e}_r \quad \text{pour } r = r_0$$

- pression normale uniforme égale à P_1 exercée à l'extérieur de la sphère :

$$\vec{P}_{ent} = -P_1 \vec{e}_r \quad \text{pour } r = r_1$$

5.1.1 Construction de la solution 3D

La résolution de ce problème d'équilibre de la sphère creuse sous pression se fera par la méthode des déplacements. Les symétries de la géométrie, des charges, du matériau homogène et isotrope nous amèneront à rechercher un champ de déplacement qui est radial : $\vec{u}_r = r f(r) \vec{e}_r$.

L'équation d'équilibre nous donne : $(\lambda + 2\mu)(4\frac{\partial f}{\partial r} + r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}) = 0$ ce qui revient à trouver a et b tel que $\vec{u}_r = (ar + \frac{b}{r^2}) \vec{e}_r$.

En posant $A = (3\lambda + 2\mu)a$ et $B = 2\mu b$, partant des expressions des contraintes et déformations associées par la loi de comportement élastique, linéaire, et isotrope dans la base locale orthonormée des coordonnées sphériques, et partant de la fonction géométrique de la sphère :

$$\vec{OM} = \begin{cases} X = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ Y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ Z = r \cos(\theta) \end{cases} ,$$

nous avons : $\delta r = u_r$, $\delta\theta = \frac{u_\theta}{r \sin(\varphi)}$, et $\delta\varphi = \frac{u_\varphi}{r}$. Dans le repère global, ces déplacements peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\begin{cases} u_\theta = \xi_\theta - z(\partial_\theta \xi_r + 2b_1^1 \xi_\theta) + z^2((b_1^1)^2 \xi_\theta + b_1^1 \partial_\theta \xi_r) \\ u_\varphi = \xi_\varphi - z(\partial_\varphi \xi_r + 2b_2^2 \xi_\varphi) + z^2((b_2^2)^2 \xi_\varphi + b_2^2 \partial_\varphi \xi_r) \\ u_r = \xi_r + w(z) \bar{q}(\theta, \varphi) \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'exprimer les déformations par :

$$\begin{cases} \epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) \\ \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin(\varphi)} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r + u_\varphi \cot g(\varphi) \right) \end{cases}$$

ce qui nous permet de déduire des équations précédentes que :

$$\begin{cases} \epsilon_{rr} = A - \frac{2B}{r^2} \\ \epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\varphi\varphi} = A + \frac{B}{r^3} \end{cases} \quad (5.1)$$

et

$$\begin{cases} \vec{\sigma} \bullet \vec{n} = \bar{P}_{int} & (r = r_0) \\ \vec{\sigma} \bullet \vec{n} = \bar{P}_{ext} & (r = r_1) \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda + 2\mu) \left(Ar - \frac{2B}{r_0^3} \right) + 2\lambda \left(Ar + \frac{B}{r_0^3} \right) = -P_0 \\ (\lambda + 2\mu) \left(Ar - \frac{2B}{r_1^3} \right) + 2\lambda \left(Ar + \frac{B}{r_1^3} \right) = P_1 \end{cases} \quad (5.2)$$

Le système ci-dessus nous conduit à évaluer les constantes A et B par :

$$\begin{cases} A = \frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} \\ B = \frac{\frac{1}{2}(P_0 - P_1) r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} \end{cases}; \quad \vec{u}_r = \left(\frac{A}{3\lambda + 2\mu} r + \frac{B}{2\mu r^2} \right) \vec{e}_r \quad (5.3)$$

L'épaisseur de la coque est $h = r_1 - r_0$ et le rayon moyen est $R = (r_1 + r_0)/2$; nous considérons que le rapport $2\chi = \frac{h}{R}$ est tels que $0 < \chi < 1$.

Pour la construction de notre solution 3D, nous resterons dans cette logique de coque épaisse. Nous prendrons en compte la conditionnalité qui permet d'effectuer le calcul de la solution de référence du déplacement en tout point M de la sphère (car les charges sont réparties uniformément sur toute sa surface intérieure). Ces calcul nous permettront d'obtenir une solution 3D. Les résultats ainsi obtenus seront implémenter avec notre nouveau élément 2D-ASFÉ qui est une solution 2D. Cette démarche nous aidera à mieux valider la convergence du présent élément.

Il est judicieux pour nous d'évaluer certains paramètres qui concourent à expliciter la matrice de comportement généralisé C_g^w ; on a :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11} &= (z - R) \sin^2(y), & \Upsilon_{22} &= z - R, & \Upsilon_{12} &= \Upsilon_{21} = 0; \\ \Upsilon^{11} &= 1/(z - R) \sin^2(y), & \Upsilon^{22} &= 1/(z - R), & \Upsilon^{12} &= \Upsilon^{21} = 0; \\ \Upsilon_1^1 &= a^{11} \Upsilon_{11}, & \text{et} & & \Upsilon_2^2 &= a^{22} \Upsilon_{22}; \\ g^{11} &= 1/(z - R)^2 \sin^2(y), & g^{22} &= 1/R(z - R)^2, & g^{12} &= g^{21} = 0 & g_{33} &= g^{33} = 1; \end{aligned}$$

$\rho = 1 - \frac{2}{R}z + \frac{1}{R^2}z^2$
 posons $\bar{\alpha}_1^1 = \frac{E}{R^2(1+\nu)(1-2\nu)}(\nu + (1-2\nu)R^2)$ et $\bar{\alpha}_1^2 = \frac{E}{R^2(1+\nu)(1-2\nu)}(\frac{\nu}{R} + (1-2\nu)R^3)$; de même posons

$$\begin{cases} \alpha_e^t = [D_e^t]_1^1 + R^2[D_e^t]_2^2 & \alpha_e = [D_e]_1^1 + [D_e]_2^2 \\ \alpha_k^t = [D_k^t]_1^1 + R^2[D_k^t]_2^2 & \alpha_k = [D_k]_1^1 + [D_k]_2^2 \\ \alpha_Q^t = [D_Q^t]_1^1 + R^2[D_Q^t]_2^2 & \alpha_Q = [D_Q]_1^1 + [D_Q]_2^2 \\ \alpha_Q^* = [D_Q^t]_2^2 + \sin^2(y)[D_Q^t]_1^1 \\ \alpha_k^* = [D_k^t]_2^2 + \sin^2(y)[D_k^t]_1^1 \\ \alpha_e^* = [D_e^t]_2^2 + \sin^2(y)[D_e^t]_1^1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a_0 = \alpha_e^t \alpha_e \\ a_1 = \alpha_e^t \alpha_k + \alpha_k^t \alpha_e \\ a_2 = \alpha_e^t \alpha_Q + \alpha_k^t \alpha_k + \alpha_Q^t \alpha_e \\ a_3 = \alpha_k^t \alpha_Q + \alpha_Q^t \alpha_k \\ a_4 = \alpha_Q^t \alpha_Q \end{cases}$$

alors

$$\alpha_0 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ a_0 h + \left(\frac{a_0}{R^2} + \frac{2a_1}{R} + a_2 \right) \frac{h^3}{12} + \left(\frac{a_2}{R^2} + \frac{2a_3}{R} + a_4 \right) \frac{h^5}{80} + \frac{a_4}{R^2} \frac{h^7}{448} \right\} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left[\bar{\alpha}_1^1 \left(([D_e]_1^1 + R[D_k]_1^1) \frac{h^3}{12} + [D_Q]_1^1 \frac{h^5}{80} \right) + \bar{\alpha}_1^2 \left(([D_e]_2^2 + R[D_k]_2^2) \frac{h^3}{12} + [D_Q]_2^2 \frac{h^5}{80} \right) \right] \\ &+ \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[(-R\alpha_e^* h + (-R\alpha_Q^* - 3\alpha_k^* - \frac{3}{R}\alpha_e^*)) \frac{h^3}{12} - \left(\frac{-3}{R^2}\alpha_Q^* - \frac{1}{R}\alpha_k^* \right) \frac{h^5}{80} \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\left(\frac{2}{R} ([D_e]_1^1 + [D_e]_2^2) + ([D_k]_1^1 + [D_k]_2^2) \right) \frac{h^3}{12} - \left(\frac{1}{R^2} ([D_k]_1^1 + [D_k]_2^2) + \frac{2}{R} ([D_k]_1^1 + [D_k]_2^2) \right) \frac{h^5}{80} \right] \\ &+ \frac{E}{2R^2(1+\nu)} \left[\left(\frac{2}{R} ([D_e]_1^2 + [D_e]_2^2) + ([D_k]_1^2 + [D_k]_2^2) \right) \frac{h^3}{12} - \left(\frac{1}{R^2} ([D_k]_1^2 + [D_k]_2^2) + \frac{2}{R} ([D_k]_1^2 + [D_k]_2^2) \right) \frac{h^5}{80} \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{E}{1+\nu} \left[([D_e]_1^1 + [D_e]_2^1) h + \left(\frac{1}{R^2} ([D_e]_1^1 + [D_e]_2^1) + \frac{2}{R} ([D_k]_1^1 + [D_k]_2^1) + ([D_Q]_1^1 + [D_Q]_2^1) \right) \frac{h^3}{12} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R^2} ([D_Q]_1^1 + [D_Q]_2^1) \frac{h^5}{80} + \frac{E}{R^2(1+\nu)} \left[([D_e]_1^2 + [D_e]_2^2) h + \left(\frac{1}{R^2} ([D_e]_1^2 + [D_e]_2^2) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{R} ([D_k]_1^2 + [D_k]_2^2) + ([D_Q]_1^2 + [D_Q]_2^2) \right) \frac{h^3}{12} + \frac{1}{R^2} ([D_Q]_1^2 + [D_Q]_2^2) \frac{h^5}{80} \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_4 = & \frac{E\nu}{R^2(1-\nu^2)} \{ [(D_e^t]_1^1 + [D_e^t]_2^2) + R ([D_k^t]_1^1 + [D_k^t]_2^2) \} \frac{h^3}{12} + \{ [(D_e^t]_1^1 + [D_e^t]_2^2) + R ([D_k^t]_1^1 + [D_k^t]_2^2) \} \frac{h^3}{12} \\
& - Rh \{ [(D_e^t]_1^1 + [D_e^t]_2^2) \} + \{ [(D_Q^t]_1^1 + [D_Q^t]_2^2) \} \frac{h^5}{80} + \frac{1}{\sin^2(y)} \left[[(D_e^t]_1^1 + [D_e^t]_2^2) h + ([D_k^t]_1^1 + [D_k^t]_2^2) \frac{h^3}{12} \right] \} \\
& + \frac{E}{R^4 \sin^2(y)(1+\nu)} \{ \sin^2(y) \left[(2R^2 [D_e^t]_1^1 - R^3 [D_k^t]_1^1) \frac{h^3}{12} + ([D_e^t]_1^1 - 2R [D_k^t]_1^1 + 3R^2 [D_Q^t]_1^1) \frac{h^5}{80} + [D_Q^t]_1^1 \frac{h^7}{448} \right] \right. \\
& + \left. \left[R^2 [D_e^t]_1^1 h + ([D_e^t]_1^1 h + 2R [D_k^t]_1^1 + R^2 [D_Q^t]_1^1) \frac{h^3}{12} + [D_Q^t]_1^1 \frac{h^5}{80} \right] \} + \frac{E\nu}{R^2(1-\nu^2)} \{ [(D_e^t]_1^1 + [D_e^t]_2^2) h \right. \\
& + R ([D_k^t]_1^1 + [D_k^t]_2^2) \frac{h^3}{12} + ([D_k^t]_1^1 + [D_k^t]_2^2) \left(\frac{h^3}{12} + \frac{h^5}{80} \right) \} + \frac{E}{R^7(1+\nu)} \{ (2R^2 [D_e^t]_2^2 - R^3 [D_k^t]_2^2) \frac{h^3}{12} + [D_Q^t]_2^2 \frac{h^7}{448} \right. \\
& + \left. \frac{h^5}{80} \} + ([D_e^t]_2^2 - 2R [D_k^t]_2^2 + 3R^2 [D_Q^t]_2^2) \frac{h^5}{80} + R^2 [D_e^t]_2^2 h + ([D_e^t]_2^2 h + 2R [D_k^t]_2^2 + R^2 [D_Q^t]_2^2) \frac{h^3}{12} \} \\
& \hspace{15em} (5.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_5 = & \frac{E\nu}{2R^2(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{\sin^2(y)} + \frac{1}{R^2} \right) \left[([D_e^t]_1^1 + [D_e^t]_2^2) h + ([D_k^t]_1^1 + [D_k^t]_2^2) \frac{h^3}{12} \right] \\
& + \frac{E\nu}{2R^2(1+\nu)} \{ [(D_e^t]_1^1 + [D_e^t]_2^2) a^{11} + ([D_e^t]_1^1 + [D_e^t]_2^2) a^{22} \left[R^2 h + \frac{h^3}{12} \right] + [(D_k^t]_1^1 + [D_k^t]_2^2) a^{11} \right. \\
& + \left. ([D_k^t]_1^1 + [D_k^t]_2^2) a^{22} \frac{Rh^3}{6} + [(D_Q^t]_1^1 + [D_Q^t]_2^2) a^{11} + ([D_Q^t]_1^1 + [D_Q^t]_2^2) a^{22} \left[\frac{R^2 h^3}{12} + \frac{h^5}{80} \right] \} \\
& \hspace{15em} (5.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_6 = & \frac{E(R+1)}{R^3(1-\nu^2)} \left\{ \left[1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{\sin^2(y)}{R} + \frac{1}{\sin^2(y)} \left(1 + \frac{1}{R^2} \right) \right] \frac{h^3}{12} + \left[\frac{1+\sin^2(y)}{R} \left(3 + \frac{1}{\sin^2(y)} \right) \right] \frac{h^5}{80} \right\} \\
& + \frac{E}{2R^2(1+\nu)} \left\{ R^2 h + \left(2 + \frac{R^2+1}{\sin^2(y)} + 4R^2 \sin^2(y) + 5R^2 \right) \frac{h^3}{12} + \left(2 + \frac{1}{\sin^2(y)} \right) \frac{h^5}{80} \right\} \\
& \hspace{15em} (5.10)
\end{aligned}$$

$$\alpha_7 = \frac{E}{R^2(1+\nu)} \left[(1 + \sin^2(y)) \left(\frac{3R^2 h^3}{12} + \frac{h^5}{80} \right) - 2R \frac{h^3}{12} \right] \hspace{10em} (5.11)$$

$$\alpha_8 = \frac{2E(R+1)}{R^5 \sin^2(y)(1-\nu^2)} \left(-R^2 h + \sin^2(y) \frac{h^3}{12} \right) + \frac{2E}{R^2 \sin^2(y)(1+\nu)} \left(R^2 h + (2 + \sin^2(y)) \frac{h^3}{12} \right) \hspace{2em} (5.12)$$

$$\alpha_9 = \frac{E}{4R^2(1+\nu)} \left(R^2 \frac{h^3}{12} + \frac{h^5}{80} \right) \hspace{10em} (5.13)$$

Les équations (5.4-5.13) et la matrice de comportement généralisé (4.25) inspirée du modèle N-T nous font conclure le calcul de la matrice de comportement généralisé C_g^w . Cette conclusion nous permet d'exprimer la matrice de rigidité élémentaire (4.28) dans le cas de la sphère.

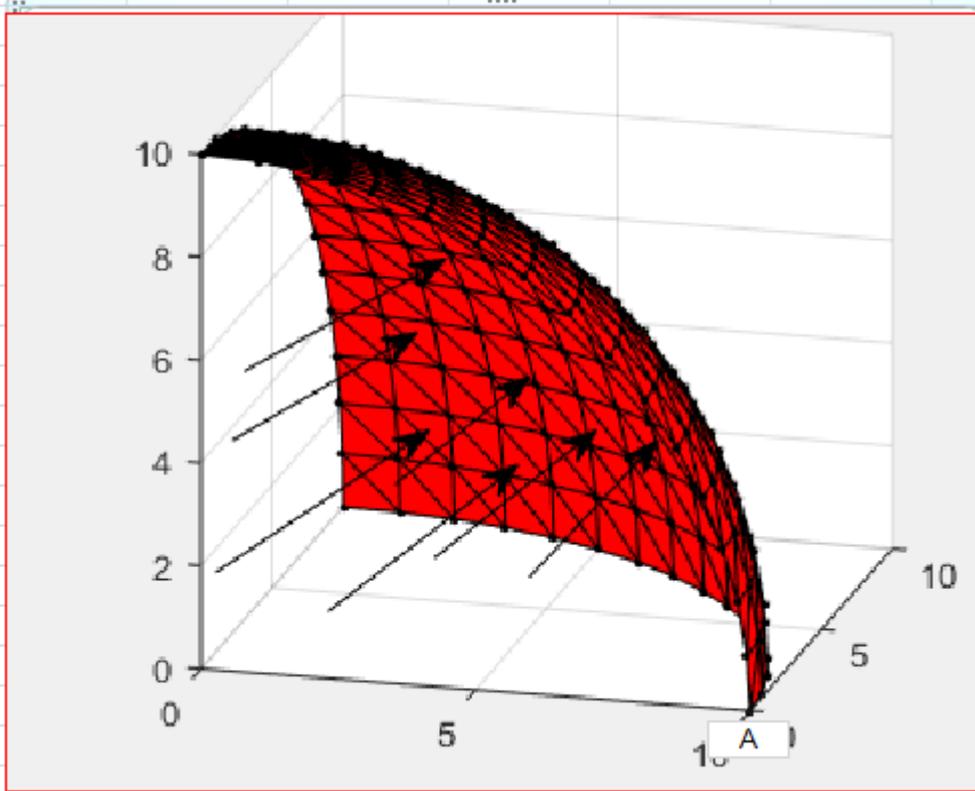
Le second membre de la formulation (4.13) avec $v = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$ et des intégrations exactes, nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned}
L^w(v) &= \int_{\Gamma_{int}} (P_0 \vec{e}_r \bullet v_r \vec{e}_r) dS + \int_{\Gamma_{ext}} (-P_1 \vec{e}_r \bullet v_r \vec{e}_r) dS \\
&= \int_{\Gamma_{int}} (t_{P_0} \cdot E_{v_r}) dS - \int_{\Gamma_{ext}} (t_{P_1} \cdot E_{v_r}) dS \\
&= \sum_{j=1}^{N_h} \left\{ d_{\vec{v}}^{T_j} \right\} [f^j]^w
\end{aligned} \right. \hspace{2em} (5.14)$$

avec

$$[f^j]^w = [P_0 - P_1, P_0 - P_1, P_0 - P_1, 0, P_0 - P_1, P_0 - P_1, P_0 - P_1, 0, P_0 - P_1, P_0 - P_1, P_0 - P_1, 0, 0, 0, 0]^T \quad (5.15)$$

FIGURE 5.2 – Maillage de la sphère creuse sous pression interne



Nous allons considérer que notre sphère creuse sous pression a les mêmes caractéristiques que l'hémisphère étudiée précédemment, mais avec une épaisseur plus grande. Cette dernière caractéristique fait ressortir la différence en terme de déplacement, entre le modèle Nzengwa et la solution 3D en coques épaisses en faisant varier le rapport $2\chi = h/R$ et la fonction stretching. Pour cela, les caractéristiques géométriques et mécaniques sont indiquées par : le rayon de la surface moyenne de la sphère $R = 10m$, le module d'Young est $E = 6.825e + 7Pa$, sa constante de Poisson est $\nu = 0.3$.

Ces données font en sorte que son rayon intérieur r_0 et extérieur r_1 puisse être donné en fonction du rayon R et du ratio χ . On suppose, en plus, qu'à chaque point de la surface intérieure de la sphère est exercée une force constante $F = 0.5N$, soit une pression $P_0 = \frac{2F}{\pi r_0^2} = 27.2354Pa$ sur le huitième de la sphère comme maillé à la figure 5.2 ci-dessus. Ce schéma tient compte des conditions de symétrie. Nous considérons qu'à l'extérieur, toutes les forces sont négligeables. Au vu de ce qui précède, l'exploitation donne la solution

analytique (de référence) de notre problème qui est :

$$\vec{u}_r = \left(\frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} r + \frac{\frac{1}{2} (P_0 - P_1) r_0^3 r_1^3}{2\mu r^2} \right) \vec{e}_r$$

avec $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ et $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$. Ce qui implique que le déplacement 3D (de référence) à la surface moyenne de la sphère est $\| \vec{u}_r \| = 0.6804m$. En exploitant les équations (5.1) on peut évaluer les contraintes en chaque point de la sphère par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} &= (3\lambda + 2\mu) \frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} - 4\mu \frac{\frac{1}{2} (P_0 - P_1) r_0^3 r_1^3}{r^3} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\theta\theta} = (3\lambda + 2\mu) \frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} + 2\mu \frac{\frac{1}{2} (P_0 - P_1) r_0^3 r_1^3}{r^3} \end{cases} \quad (5.16)$$

soit $\sigma_{rr} = -1.07 \times 10^{15} Pa$ et $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = 5.35 \times 10^{14} Pa$ au point A=(0,10,0).

Nous choisissons un noeud quelconque de l'élément $e \in T_h$ donné par la figure 5.2 ci-dessus où nous allons évaluer le déplacement moyen sur cet élément $e \in T_h$ lorsque le rayon varie avec le modèle Nzengwa. Ce déplacement sera noté : $U_N^e = \sqrt{(u_1^e)^2 + (u_2^e)^2 + (u_3^e)^2}$ où u_i^e , $i = 1, 2, 3$ est le déplacement de u_i aux noeuds de l'élément $e \in T_h$.

Dans toute la suite, Il sera calculé le déplacement au point A du maillage présenté à la figure 5.2 ci-dessus. Les simulations sont faites avec l'outil Matlab R2015a et les résultats suivants ont été obtenus :

TABLE 5.1 – Résultats des déplacements au point A où $z_A = 0$ alors $w(z) = 0$

rapport h/R	solution 3D $\ \vec{u}_r \ $	MAILLAGE						
		Solution Nzengwa	5×5	10×10	15×15	20×20	25×25	30×30
0.06	0.2756	U_N^A	0.2501	0.2532	0.2568	0.2609	0.2624	0.2642
		écart (%)	-9.27	-8.32	-6.83	-5.34	-4.78	-4.13
0.15	0.6804	U_N^A	0.6270	0.6301	0.6459	0.6512	0.6547	0.6592
		écart (%)	-7.85	-6.21	-5.07	-4.29	-3.77	-3.11
0.25	1.1037	U_N^A	1.0356	1.0497	1.0676	1.1676	1.0716	1.0786
		écart (%)	-6.17	-4.89	-3.73	-3.27	-2.91	-2.27
0.35	1.4830	U_N^A	1.4077	1.4391	1.4465	1.4525	1.4568	1.4654
		écart (%)	-5.08	-2.96	-2.46	-2.06	-1.77	-1.19
0.45	1.8029	U_N^A	1.7461	1.7706	1.7834	1.7881	1.7901	1.7915
		écart (%)	-3.15	-1.79	-1.08	-0.82	-0.71	-0.63
0.55	2.0507	U_N^A	1.9918	2.0167	2.0333	2.0376	2.0400	2.0407
		écart (%)	-2.87	-1.66	-0.85	-0.64	-0.52	-0.49
0.65	2.2166	U_N^A	2.1905	2.1971	2.2004	2.2068	2.2096	2.2102
		écart (%)	-1.04	-0.88	-0.73	-0.44	-0.36	-0.29
0.75	2.2945	U_N^A	2.2922	2.2922	2.2922	2.2924	2.2927	2.2927
		écart (%)	-0.1	-0.1	-0.1	-0.09	-0.08	-0.08

TABLE 5.2 – Résultats des déplacements au point A où $z_A = \frac{-h}{4}$ alors $w(z) = -\frac{h}{4}$

rapport h/R	solution 3D $\ \vec{u}_r\ $	MAILLAGE						
		Solution Nzenywa	5×5	10×10	15×15	20×20	25×25	30×30
0.06	0.2841	U_N^A	0.2556	0.2586	0.2632	0.2643	0.2686	0.2702
		écart (%)	-10.04	-8.98	-7.36	-6.96	-5.44	-4.89
0.15	0.7344	U_N^A	0.6746	0.6832	0.6914	0.6975	0.7075	0.7123
		écart (%)	-8.14	-6.97	-5.85	-5.03	-3.66	-3.01
0.25	1.2558	U_N^A	1.1739	1.1907	1.2014	1.2062	1.2154	1.2204
		écart (%)	-6.52	-5.18	-4.33	-3.95	-3.22	-2.82
0.35	1.7810	U_N^A	1.6802	1.7224	1.7288	1.7370	1.7452	1.7532
		écart (%)	-5.66	-3.29	-2.93	-2.47	-2.01	-1.56
0.45	2.2889	U_N^A	2.2063	2.2303	2.2562	2.2621	2.2667	2.2701
		écart (%)	-3.61	-2.56	-1.43	-1.17	-0.97	-0.82
0.55	2.7566	U_N^A	2.6728	2.7086	2.7296	2.7354	2.7376	2.7401
		écart (%)	-3.04	-1.74	-0.98	-0.77	-0.69	-0.60
0.65	3.1602	U_N^A	3.1172	3.1232	3.1362	3.1378	3.1438	3.1447
		écart (%)	-1.36	-1.17	-0.76	-0.71	-0.52	-0.49
0.75	3.4757	U_N^A	3.4705	3.4715	3.4719	3.4726	3.4726	3.4726
		écart (%)	-0.15	-0.12	-0.11	-0.09	-0.09	-0.09

FIGURE 5.3 – Courbes de convergence de la sphère creuse au point $z_A = 0$ pour $\frac{h}{R} = 0.06$; soit $w(z) = 0$

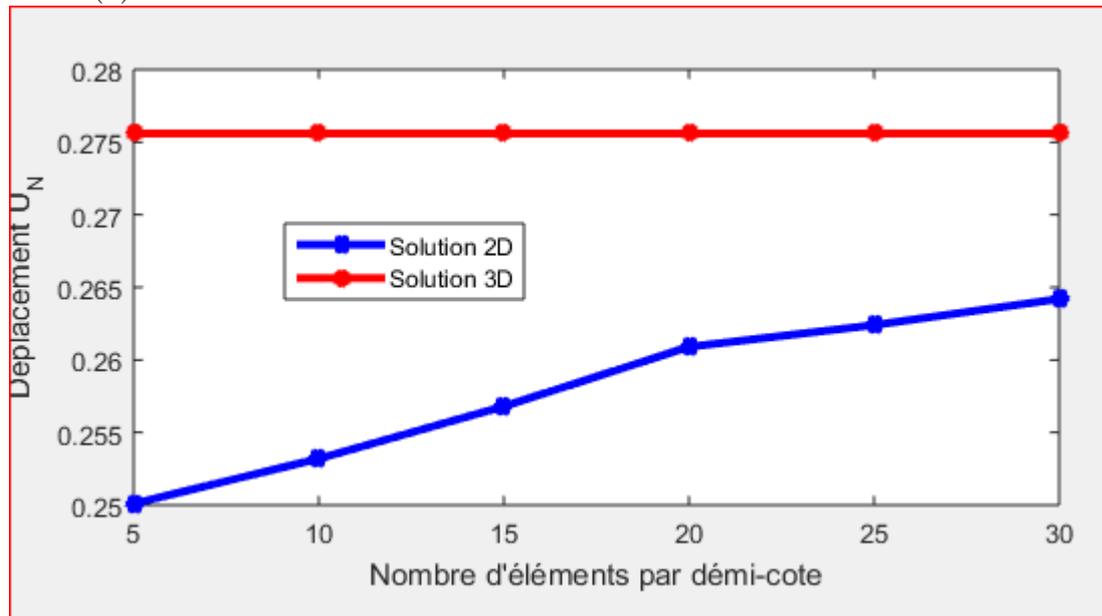


FIGURE 5.4 – Courbes de convergence de la sphère creuse au point $z_A = 0$ pour $\frac{h}{R} = 0.45$, soit $w(z) = 0$

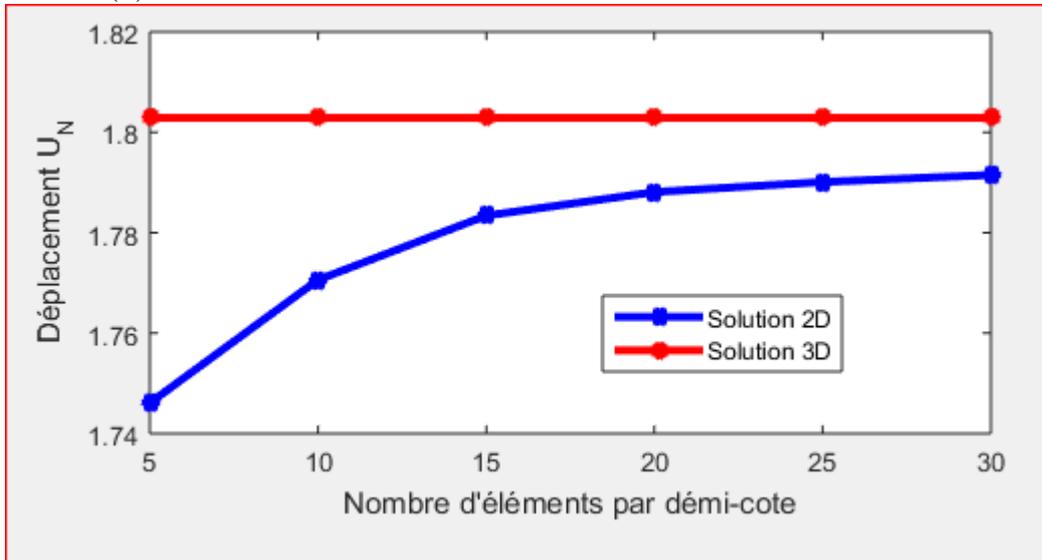


FIGURE 5.5 – Courbes de convergence de la sphère creuse au point $z_A = -\frac{h}{4}$ pour $\frac{h}{R} = 0.75$, soit $w(z) = -\frac{h}{4}$

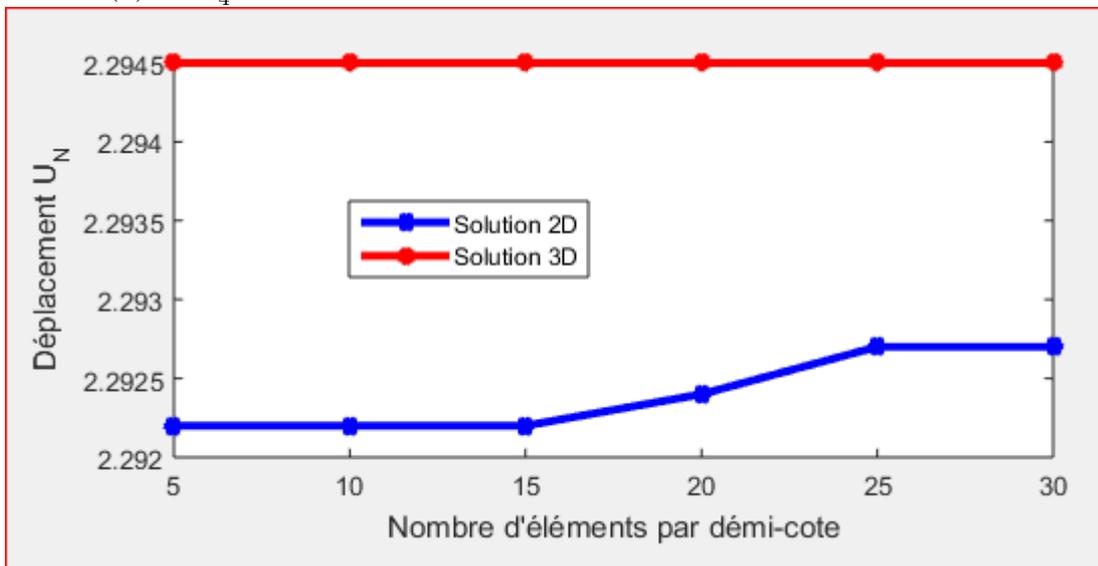
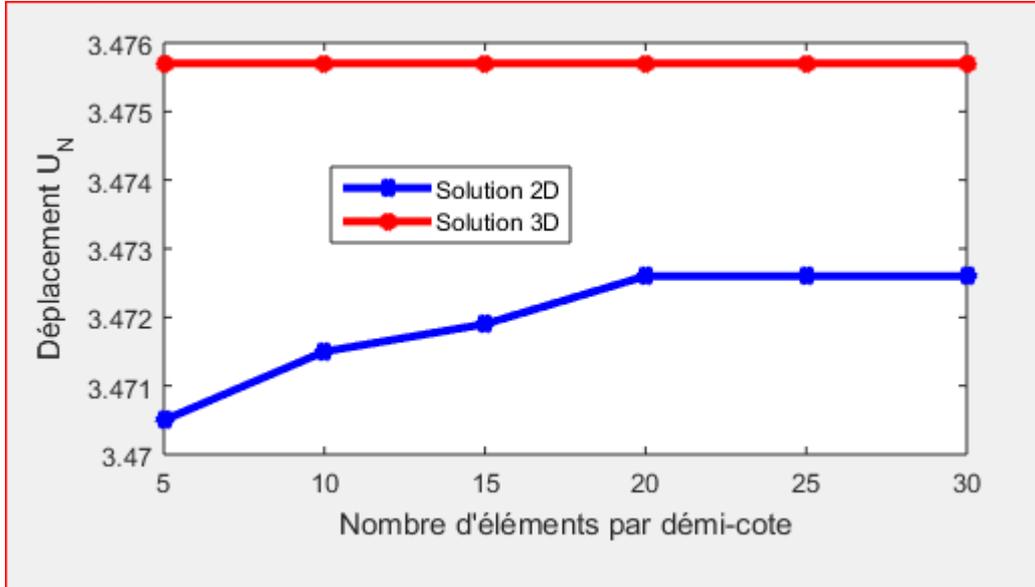


FIGURE 5.6 – Courbes de convergence de la sphère creuse point $z_A = 0$ pour $\frac{h}{R} = 0.75$, soit $w(z) = 0$



5.1.2 Convergence numérique

Le modèle Nzengwa de coques épaisses linéairement élastique prenant en compte la variation des contraintes transversales est implémenté sur une sphère creuse sous pression interne avec notre élément fini 2D-ASFE en un point quelconque A de cette sphère ci-dessus. Les résultats consignés dans les tables 5.1 et 5.2 sont représentés par les figures 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 ci-dessus. Dans ces tables, les résultats solutions numériques 2D sont comparés aux solutions exactes 3D. L'approche utilisée est suivant les valeurs du ratio $2\chi = \frac{h}{R}$ et la stretching fonction $w(z)$, de raffiner le maillage et observer l'évolution de la solution 2D par rapport à la solution 3D. L'Analyse de ces tables et de ces figures montre que les propriétés de convergence de la solution 2D vers la solution 3D sont clairement établies. Il se dégage de cette étude une bonne performance de notre élément 2D-ASFE à mieux simuler les coques épaisses.

5.1.3 Discussion

Nous avons, dans ce cas test, élaboré une stratégie visant à montrer la convergence numérique de notre élément fini 2D-ASFE ainsi que sa performance à mieux simuler les coques minces et épaisses. La démarche a consisté à faire raffiner le maillage suivant les valeurs du rapport $2\chi = \frac{h}{R}$ et la fonction stretching $w(z)$. Puis a suivi l'analyser des valeurs du déplacement $\|\vec{u}_N^A\|$ solution 2D en un point quelconque A de la sphère ainsi que le pourcentage d'erreur avec la solution 3D. Les tables 5.1 et 5.2 ressortent les valeurs du ratio 2χ rangées suivant 0.06, 0.15, 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65 et 0.75 ainsi que le

nombre d'éléments N par demi-cote rangé suivant 5, 10, 15, 20, 25 et 30. La stratégie consiste à maintenir le rayon de la sphère constant et de faire varier son épaisseur. Le but est d'examiner le comportement de notre élément fini 2D-ASFÉ appliqué au modèle Nzengwa pour mieux simuler les coques minces ou épaisses.

Les résultats obtenus dans les différentes tables pour les valeurs du ratio $h/R = 0.06$ (coques minces) montrent clairement que la convergence est établie pour un nombre d'éléments $N \geq 50$ où le pourcentage d'erreurs sera moins de 1% (on peut conjecturer sur l'évolution de la graduation des déplacements). En outre, nous constatons que le choix de la position dans l'épaisseur influence le résultat de convergence. Plus on s'éloigne de la surface moyenne, plus on accumule des erreurs comme renseignent ces deux tables 5.1 et 5.2 pour $z = 0$ et $z = -\frac{h}{4}$ respectivement. Ce constat de l'accumulation d'erreur en fonction de l'épaississement croissant de la coque est en contradiction avec certains chercheurs [41, 39, 40], [50], [49], [17, 18] et [25, 26, 27] qui ont conjecturé différentes formes d'interpolation de la fonction stretching $w(z)$ pour assurer la convergence de leurs modèles.

Pour les valeurs du ratio h/R égales à 0.15, 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65 et 0.75 (coques épaisses), l'analyse du comportement montre en toile de fond que pour un maillage raffiné, les écarts sont pratiquement les mêmes à 10^{-4} . Il apparaît donc que les différentes fonctions $w(z)$ proposées par certains chercheurs ne sont que des conjectures. Le choix de $w(z) = z$ qui découle du développement limité de la fonction $q(x, z)$ en $z = 0$ (surface moyenne) est judicieux et une meilleure approximation serait plutôt de la forme :

$$q(x, z) = q(x, 0) + z\partial_z q(x, 0) + \frac{z^2}{2}\partial_z^2 q(x, 0) + O(\xi)$$

Donc cette fonction peut se mettre sous la forme $q(x, z) = z\bar{q}(x) + \frac{z^2}{2}\bar{\varphi}(x)$.

Autrement dit, la cinématique doit être sous forme : $u_3 = \eta_3(x) + z\bar{q}(x) + \frac{z^2}{2}\bar{\varphi}(x)$.

5.1.4 Conclusion

L'élément fini de classe C^0 2D-ASFÉ appliqué au modèle Nzengwa pour simuler les coques épaisses avec les éléments triangulaires droits, nous a conduit à de bons résultats de convergence sur les coques sphériques. Ce nouvel élément 2D-ASFÉ rend bien compte des contraintes transversales. L'expérimentateur est capable de simuler efficacement avec cet élément un champ de contraintes transversales qui converge vers le champ de contraintes exactes 3D.

L'analyse faite précédemment montre que l'élément 2D-ASFÉ s'adapte mieux aux coques sphériques minces (avec assez d'éléments) qu'aux coques sphériques épaisses (avec peu d'éléments). Et sa performance peut s'améliorer en augmentant l'ordre d'approximation de $q(x, z)$. Cependant les résultats probants obtenus à la première approximation montre l'efficacité du modèle Nzengwa à simuler les coques épaisses.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Notre étude en vue de l'approximation par éléments finis de classe C^0 de coques épaisses linéairement élastiques nous aura permis de dégager le constat suivant : les deux grands modèles abondamment utilisés dans la littérature sont ceux de Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin. Celui de Kirchhoff-Love a été rigoureusement établi par Koiter et les techniques de "multiple scaling" et ont donnés de bons résultats pour les coques minces, mais ont rencontré des difficultés à simuler les coques épaisses. Le modèle de Reissner-Mindlin quant à lui, bien qu'ayant apporté une certaine amélioration pour les plaques épaisses, a montré quelque limite. C'est la raison pour laquelle ces théoriciens de référence ont fait recourt à une multiplicité de modèles basés sur des conjectures pour pouvoir calculer les contraintes de cisaillement transverse. Des différents calcul des contraintes transversales, il s'est avéré que les modèles N-T et Nzenywa ont des cinématiques rigoureusement établies. Nous sommes d'autant mieux fondé à approuver la validité des modèles sus-analysés, qu'ils font l'objet d'une grande attention dans des études scientifiques d'envergure et de recherches poussées de nos jours. Le cheminement qui nous a conduit aux résultats de notre modeste travail s'est jalonné par les étapes ci-après :

La première étape a consisté à implémenter les deux premiers modèles (Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin) par des méthodes numériques claires énoncées abondamment dans les revues de la littérature tels que DKT12, DKT18, SFE et autres. Mais les modèles N-T et Nzenywa n'avaient pas jusqu'à lors reçu les mêmes développement. Pourtant, ces théories correctement établies avaient besoin d'une analyse numérique en vue de sa vulgarisation compte tenu de son importance avérée en ingénierie. C'est dire que les modèles N-T et Nzenywa avaient besoin d'une validation par analyse avec des méthodes numériques appropriées.

Telles sont les convictions qui ont justifiées la mise sur pied une méthodologie permettant de discrétiser par éléments finis ces deux modèles. Aucun benchmark de coques épaisses élastiques n'étant disponible, il fallait tout d'abord mettre sur pied une stratégie de benchmark des modèles N-T et Nzenywa en vue de leur validation. Le choix de la méthode des éléments finis était une nécessité car, l'un des domaines d'application de ces théories est le problème de coques solides homogène pour lequel cette méthode est la plus indiquée.

Aussi est-il besoin de rappeler que la question centrale de notre travail était de construire un élément fini de classe C^0 pouvant approximer par éléments finis ces deux modèles de coques épaisses. Une approximation des modèles N-T et Nzenywa de coques

épaisses s’offrait à nous comme la démarche scientifique la plus susceptible de donner des résultats probants. Une discrétisation directe par la méthode de Galerkin nous a conduit au problème de discontinuité des gradients contenus dans le champ de contraintes, surtout aux interfaces entre deux éléments adjacents. Face à cette difficulté, nous avons fait recours aux plus récentes méthodes de reconstruction du gradient : “ Polynomial Preserving Recovery” PPR approximé sur des éléments triangulaires droits à trois noeuds par élément. Il y a lieu de noter que pour un élément triangulaire à trois noeuds, il faut moins de 5 degrés de liberté (ddl) par noeud pour éviter le phénomène de blocage en cisaillement. Pour notre modèle N-T, en tenant compte de l’angle de Gauss dû au changement de la troisième forme fondamentale de la surface moyenne de la coque, cela exige 7 ddl par noeud ; ce qui signifie qu’une méthode classique de discrétisation par éléments finis n’était pas indiquée.

Ce travail s’est donc articulé autour de deux parties.

La première partie a fait une approximation par éléments finis de classe C^0 du modèle N-T utilisant la méthode PPR pour résorber le problème de saut rencontré à la frontière de deux éléments adjacents. Nous avons pu développer deux éléments finis de classe C^0 appelés “ Spherical Shell Finite Element” SSFE et “ Cylindrical Shell Finite Element” CSFE pour les coques respectives sphériques et cylindriques. Pour cela, il nous a fallu trois degrés de liberté de déplacements par noeuds-sommets et un degré de liberté de déplacement par noeuds- milieux ; soit douze degrés de liberté sur un élément triangulaire droit de coque.

La stratégie a consisté à prendre des cas tests de coques sphériques et cylindriques minces que nous avons testé avec notre élément SSFE et CSFE respectivement. ce qui nous a donné des résultats probants. Nous l’avons comparé à d’autres éléments tels que “ Discrete Kirchhoff Triangle” DKT 12 et 18 ainsi que “Semi Finite Element” SFE. Nous avons conclu que le modèle N-T se présente comme une amélioration des modèles usuels de coques minces. Les résultats obtenus ont confirmé la justesse des codes ainsi que la convergence des éléments SSFE et CSFE appliqués au modèle N-T.

Nous avons obtenu les coques épaisses en maintenant le rayon de la coque R constant et en faisant varier l’épaisseur h . Cette technique nous a permis de mieux cerner l’analyse limite entre le modèle N-T et les autres modèles existants tels que Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin. Cette approche nous a également permis de relever l’importance du changement de la troisième forme fondamentale de la surface moyenne de la coque au cours de la déformation. Ce tenseur de gauss a une importance dans l’énergie totale de la déformation lorsque la valeur du ratio $h/2R$ devient plus grande. La variation du ratio χ via l’épaisseur de la coque nous permet aussi de comprendre que les contraintes transversales correctement établies dans le modèle N-T peuvent être numériquement calculées avec notre élément SSFE ou CSFE. Des résultats intéressants sont obtenus avec ces éléments finis de classe C^0 en ce qui concerne leur rapidité en temps de calcul. En fait, ils utilisent moins d’espace mémoire que d’autres éléments ayant les mêmes lois de comportement.

La deuxième partie de ce travail fait une approximation par éléments finis de classe C^0 du modèle statique Nzenywa qui prend en compte la variation des contraintes transver-

sales. Cette cinématique intègre celle du modèle N-T. Ainsi, toutes les stratégies inscrites dans le modèle N-T seront appliquées dans celui de Nzengwa, y compris l'utilisation de la méthode PPR dans la discrétisation et le maillage du domaine coque par des éléments triangulaires droits à six noeuds. Il en résulte quatre degrés de liberté de déplacements pour les noeuds-sommets et un degré de liberté de déplacement pour chaque noeud-milieu ; soit quinze (12+3) degrés de liberté sur un élément triangulaire de coque.

Nous avons développé un élément fini de classe C^0 2D-ASFÉ sur une coque sphérique creuse sous pression interne. Par la même technique qui consiste à maintenir le rayon de la coque R constant et de faire varier son épaisseur h , nous avons obtenu de bons résultats de convergence avec cet élément 2D-ASFÉ et son efficacité établie suivant la valeur du ratio $2\chi = h/R$ et aussi suivant la position du point dans l'épaisseur. Bien plus, nous avons fait ressortir l'impact du choix de la fonction stretching qui permet d'obtenir un résultat presque identique à la solution analytique pour les ratios variant jusqu'à 0.75 au-delà duquel les écarts dépassent 1%. Les résultats ainsi obtenus par approximations par éléments finis garantissent un gain énorme sur le coût de calcul surtout lorsqu'un résultat analytique ne peut exister. Il y a lieu de préciser que dans cas de notre sphère creuse sous pression interne, une solution analytique n'existe que si cette pression est uniforme à la surface interne, alors que le modèle Nzengwa permet de le simuler même quand la pression n'est pas uniforme. Pour améliorer la convergence, il ne faut pas conjecturer une fonction stretching, mais simplement augmenter l'ordre d'approximation de cette fonction stretching.

Évaluation du travail effectué

Le cadre général de cette étude à consister à apporter des éléments de réponses à l'analyse numérique des phénomènes de coques épaisses linéairement élastiques basés sur deux grands modèles N-T et Nzengwa. Les résultats obtenus sont susceptible de permettre la mise en oeuvre pratique de ces modèles dans l'implantation des codes éléments finis, dans des prototypes pouvant permettre d'étudier en détail leur efficacité, afin qu'une analyse marque le début de leur vulgarisation.

La non prise en compte du changement de la troisième forme fondamentale de la surface moyenne de la coque n'est-elle pas un handicap majeur dans le dimensionnement des structures coques ?

Bien plus, qu'est ce qu'on gagne dans la résolution du problème de solide 3D en déformation lorsqu'on prend en compte la variation de contraintes transversales au cours du temps ?

Le modèle N-T vient répondre à la première préoccupation et les résultats obtenus avec les éléments finis de classe C^0 : SSFE et CSFE viennent combler nos attentes dans l'analyse numériques des coques minces et épaisses ; aussi, l'implantation de leurs codes pourrait-il servir comme pionnier dans le dimensionnement de ces structures coques.

L'élément fini de classe C^0 2D-ASFÉ appliqué au modèle mathématique Nzengwa pour les problèmes statiques de solides en torsion avec variation d'épaisseur est une contribution

importante pour commencer à répondre à la deuxième préoccupation qui est le problème de solide 3D avec variation de contraintes transversales, compte bien tenu des résultats probants obtenus.

Les difficultés rencontrées

La principale difficulté à laquelle nous nous sommes confrontée est la complexité des éléments mathématiques, mécaniques et numériques inhérents à la théorie de coques. Il faut noter que peu de modèles de coques épaisses existent dans la littérature et aucun benchmark n'est disponible.

En outre, l'écriture des codes numériques pour la validation de ces modèles furent très laborieuse. Elle a nécessité toute une année d'apprentissage de simulation numérique dans des laboratoires à l'étranger.

Une autre grande difficulté fut la publication d'articles à laquelle se confronte tout jeune chercheur.

Perspectives et suggestions

Dans notre étude fait sur le modèle N-T et les résultats numériques y afférents, nous avons dû faire des simplifications d'hypothèses, entre autres :

- Les résultats mathématiques du modèle N-T ont été résolus en première approximation ; car pour une approximation d'ordre supérieur, les calculs deviennent très complexes ; toutefois le modèle intègre cet aspect d'approximation d'ordre supérieur.
- Les simplifications dans la formulation variationnelle ont été opérées dans le cadre de cette étude, ceci en raison de ce que notre coque était d'épaisseur symétrique à sa surface moyenne. Nous n'avons pas étudié le cas des coques raidies ni celui des coques à épaisseur non symétrique à sa surface moyenne.
- La discrétisation du modèle N-T s'est faite avec un maillage régulier triangulaire. Il est souhaitable que des études ultérieures se fassent avec des maillages non conforme.
- Nous n'avons pas étendu les tests sur certains types de structures coques tels que : les barrages, les paraboloides hyperboliques, les tours rafraichissantes, les voûtes en berceaux etc...

Pour le modèle d'évolution de Nzenzwa qui prend en compte le modèle N-T, nous avons tout simplement résolu le cas statique en fixant le temps. Donc pour comprendre toute la richesse de ce modèle dynamique de Nzenzwa, il faudra aussi faire une discrétisation temporelle sur un maillage quelconque (conforme ou non conforme) et sur des solides coques avec variation d'épaisseur au cours de la déformation.

La volonté de dimensionner les structures bien rigides et à moindres coûts doit conduire à des études approfondies sur les perspectives d'optimisation de coûts afin d'inciter les ingénieurs à l'utilisation des outils appropriés (de bons logiciels qui intègrent tous les éléments mentionnés).

Nous ne pouvons pas prétendre avoir épuisé la question d'analyse numérique de coques épaisses linéairement élastiques basée sur ces deux grands modèles. Nous ne pouvons pas prétendre avoir proposé des solutions exhaustives par nos résultats, somme toutes modestes. Nous n'y sommes parvenus qu'en simplifiant beaucoup d'hypothèses, notamment l'homogénéité du matériau, l'isotropie etc... Ainsi, les éléments finis de classe C^0 proposés sont des contributions à une analyse numérique.

Nous espérons que ce travail modeste aide les ingénieurs à d'avancer dans le domaine d'analyse en théorie de coques épaisses.

Nous souhaitons que, ce travail constitue une base de connaissance scientifique et un outils d'aide aux ingénieurs lors des dimensionnements des structures coques.

Bibliographie

- [1] Ahmad.S and al "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 2, 419-451,(1970).
- [2] Ayad R, Dhatt G, Batoz J.L, "A new hybrid-mixed variational approach for Reissner–Mindlin plates : The MiSP model". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 42,1149–1179, (1998).
- [3] Batoz J.L. et Dhatt G. (1990). Modélisation des structures par éléments finis. Edition Hermès, Paris. vol.2 - Poutres et plaques, vol.3 - Coques
- [4] Belytschko T., Stolarsky H., et Carpenter N. (1984). A C^0 triangular plate element with one-point quadrature. International Journal for Numerical Methods in Engineering, volume 20, pages 787-802.
- [5] M.Bernadou, P.G.Ciarlet, and Maria, " Existence theorems for two-dimensional linear shell theories", Journal of Elasticity, vol 34, no 2 pp 111-138,1994.
- [6] M.Bernadou, P.M.Eiroa, P.Trounev, " On the approximation of general linear thin shell problems by DKT methods" Computation and Applied Mathematics, Vol 10 article 103,1991.
- [7] C. W. BERT, Dynamics of composite and sandwich panels-Parts I and IX (corrected title). Shock Vib. Dig. 8, No. IO, 37-48 (1976) ; 8, No. f 1, 15-24 (1976).
- [8] C. W. BERT, Analysis of shells. Analysis and Performance of Composites, l.. J. Broutman (ed.), pp. 207- 258. Wiley, New York (1980).
- [9] E. Carrera,S.Brischetto,M.Cinefra and M.Soave : Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells, Composites part B ; Engineering vol 42,no,2,pp 123-133,2011.
- [10] Ciarlet, P.G., Miara, B. Justification of the two dimensional equations of a linearly elastic shallow shell, Comm. Pure and Appl. Maths, Vol XLV (1992) P.327 – 360, John Wiley and Sons Inc.
- [11] S. T. GULATI and F. ESSENBERG, Effects of anisotropy in axisymmetric cylindrical shells. Journal of Applied Mechanics 34, 650-666 (1967).

- [12] Hervé Laurent, Etude en grande transformation d'une nouvelle famille d'éléments finis coque triangulaire à trois degrés de liberté par noeud. Application à la simulation numérique de l'emboutissage, Thèse présentée à l'Université de Maine, 1996.
- [13] F. B. HILDEBRAND, E. REISSNER and G. B. THOMAS, Note on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells. National Advisory Comm. Aeron. Tech. Notes, No. 1833 (1949).
- [14] E. Hinton, Least Squares Analysis Using Finite Elements, M.Sc. Thesis, Civ. Engng Dept., University College of Swansea, 1968.
- [15] Hughes T.J.R. et Hinton E. (1986). Finite element methods for plate and shell structures, volume 1 : Element technology, volume 2 : Formulations and algorithms. Pineridge Press, Swansea.
- [16] B.M. Irons, Least squares surface fitting by finite elements, and an application to stress smoothing, Aero. Stree Memo ASM 1524, Rolls-Royce, 1967.
- [17] Karama M, Afaq KS, Mistou S. Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multilayered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. Int J Solid Struct 2003 ;40(6) : 1525-46.
- [18] Karama M, Afaq, KS, Mistou S. A new theory for laminated composite plates. In : Proc. IMechE 2009, vol. 223 [Part L : J Mater : Des Appl].
- [19] Kirchhoff.G, *über das* Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe J. Reine Angew. Math. 40,51-58 (1850).
- [20] Koiter, W.T, "On the foundations of the linear theory of thin elastic shells", Proc. Kon.Ned Ak.wet., B73 169-195 (1970).
- [21] Lindberg G.M., Olson M.D., et Cowper G.R. (1969). New developments in the finite element analysis of shell. Q. Bulletin Division of Mechanical Engineering and National Aeronautical Establishment- National Research Council of Canada, volume 4.
- [22] Love, A.E.H, A treatise on the Mathematical theory of Elasticity, 4th ed Cambridge University Press, Cambridge (1934).
- [23] A. I. LURE, Statics of Thin Elastic She &. Gostekhizdat, Moscow (1947) (in Russian).
- [24] R.H MacNeal and R.L Harter, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy Journal of Finite Element in analysis and Design 1,3-20,1985.
- [25] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. Composites : Part B 2011. [http ://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.07.017](http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.07.017).

- [26] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higherorder shear deformation theory. *Compos Struct* 2011 ;94 :37–49.
- [27] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *International Journal of Solids Structures* 2012 ;49 :43–53.
- [28] Mindlin,R.D., Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates *Journal of Applied Mechanics* Vol18, 31-38 (1951).
- [29] A.Naga and Z.Zhang, A posteriori error estimates based on polynomial preserving recovery, *SIAM.Journal of Numerical. Analysis*, Vol9,1780-1800 (2004).
- [30] A.Naga and Z.Zhang, The polynomial preserving recovery for higher order finite element methods in 2D and 3D, *Discrete and continuous dynamical systems series B*, 5(2005),769-708.
- [31] P.RM.NAGHDI, A survey of recent progress in the theory of elastic shells. *Appl. Mech. Revzews* 9, No. 9, 365-368 (1956).
- [32] R.Nzengwa and H.B.Tagne Simo,A two-dimensional model for linear elastic thick shells. *International Journal for Solids and Structures* Vol 36,5141-5176 (1999).
- [33] R.Nzengwa, A 2D model for dynamics of linear elastic thick shells with transversal strains variation. *Int.J.Awrejcewicz (Ed). Proc 8th conference on Dynamical systems Theory and Applications*, Lodz, Poland, 12-15 december,2005 P 769-776.
- [34] J.T. Oden and H.J. Brauchli, On the calculation of consistent stress distributions in finite element applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,Vol 3, 317-325 (1971).
- [35] Onate E and Castro J. Derivation of plate based on assumed shear strain fields. In *New Advances in Computational Structural Mechanics*. Ladevèze&ZienkiewiczEds, 237–288, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [36] Papadopoulos P, Taylor R.L. A triangular element based on Reissner–Mindlin plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30 :1029–1049, 1990.
- [37] Parisch H. A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20 :323–350, 1979.
- [38] Pinsky P.M, Jasti R.V. A mixed finite element formulation for Reissner–Mindlin plates based on the use of bubble functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28 :1677–1702, 1989.

- [39] Reddy JN, Liu CF. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 23,319–30 (1985).
- [40] Reddy JN. A refined shear deformation theory for the analysis of laminated plates. NASA report 3955; 1986.
- [41] Reddy.J.N, Exact solutions of moderately thick laminated shells. *J. Epl-gng. Mech. ASCE*, 110, (5), 794 (1983).
- [42] Reissner.E, The effet of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J Appl Mech*,12(1945),A-69-77.
- [43] Reissner.E, Stress-strain relations in the theory of thin elastic shells. *J. Muth. Phys.* 31, 109-1 19 (1952).
- [44] Reissner.E, On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *Int.J Solid Struct*,11(1975),569-73.
- [45] Reissner.E, Reflections on theory of elastic plates. *Appl Mech. Rev.* 38 1453-1464 (1985).
- [46] Saleeb A.F, Chang T.Y, Yingyeunyong S. A mixed formulation of C^0 - linear triangular plate–shell element – the role of edge shear constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26 :1101–1128, 1988.
- [47] Simo J.C, Armero F, Taylor R.L. Improved versions of assumed enhanced strain tri- linear elements for 3D finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110 :359–386, 1993.
- [48] Simo J.C, Rifai M.S. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 :1595–1638, 1990.
- [49] Soldatos K.P. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mech* 1992 ;94 :195–220.
- [50] Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci* 1991 ;29(8) : 901–16.
- [51] M.J. Turner, H.C.Martin, and B.C.Weikel, Further developments and applications of the stiffness method, *Matrix Meth. Strust. Analysis*, AGARD 72 (1964), 203-266.
- [52] N.E Wiberg and F. Abdulwahab, Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium, *internat, J Numer, methods Engrg* 36(1993) pp 2703-2774.
- [53] N.E Wiberg and F. Abdulwahab, and S.Zrukaz, Enhanced superconvergence patch recovery incoorparating equilibrium and boundary condition, *internat, J Numer Methods Engrg*, 37(1994) pp 3417-3440.

- [54] J. M. Whitney and C.T. SUN, A higher order theory for extensional motion of laminated anisotropic shells and plates. +J. Sound and Vibration 30, 85 (1973).
- [55] J. M. Whitney and C. T. SUN, A refined theory for laminated anisotropic cylindrical shells. Journal of Applied Mechanics 41,47 (1974).
- [56] E.L.Wilson, Finite Element Analysis of Two-dimensional Structures, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, 1963.
- [57] Z. Zhang and Ahmed Naga, A new Finite element gradient recovering Method : Superconvergence property SIAM J Sci computer 26(2005) pp 1192-1213.
- [58] Z.Zhang and J.Z.Zhu, Analysis of the superconvergent patch recovery technique and a posteriori error estimator in the finite element method (1), *comput.Methods Appl.Mech.Engrg*, 123(1995), 173-187.
- [59] Z.Zhang, polynomial preserving recovery for anisotropic and irregular grids,*J. Comp. Math*, 22-2 (2004), 331-340.
- [60] Z.Zhang, polynomial preserving gradient recovery and a posteriori estimate for bilinear element on irregular quadrilaterals, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 1 (2004), 1-24.
- [61] Z.Zhang ,”Recovery techniques in finite element methods,”in *Adaptive computations : Theory and Algorithms*,, T.Tang and J.Xu, Eds,PP 297-365, Science Press, Beijing,China,2007.
- [62] Zienkiewicz O.C and J.Z.Zhu. The superconvergence patch recovery and a posteriori error estimates part 2 : error estimates and adaptivity, *internat. J. Numer. Methods Engrg*, 33(1992), 1365-1382.
- [63] Zienkiewicz O.C, Lefebvre D. A robust triangular plate bending element of the Reissner–Mindlin type. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26 :1169–1184, 1988.
- [64] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., et Too J.M. (1971). Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, volume 3, pages 275-290.