

Ecole Polytechnique d'Abomey-Calavi
(EPAC)



Faculté des Sciences et Techniques
(F.A.S.T)

Formation Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur

THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR de l'Université d'Abomey-Calavi

Spécialité : Energétique et Environnement

Présentée par :

Christian Djijoho AKOWANOU

**INFLUENCE DE L'ANISOTROPIE HYDRODYNAMIQUE
SUR LES PHÉNOMENES THERMOCONVECTIFS DANS
LES CHAMPS DE SITES POREUX SATURÉS PAR DES
FLUIDES À RHÉOLOGIE VARIÉE**

Soutenue publiquement le 11 novembre 2008 devant le jury composé de:

M. Norbert Cossi AWANOU	Professeur, Université d'Abomey-Calavi (Bénin)	<i>Président</i>
M. Jean KOULIDIATI	Professeur, Université de Ouagadougou (Burkina-Faso)	<i>Rapporteur</i>
M. M. Kossi NAPO	Professeur, Université de Lomé (Togo)	<i>Rapporteur</i>
M. Antoine VIANOU	Professeur, Université d'Abomey-Calavi (Bénin)	<i>Membre</i>
M. Gérard DEGAN	Professeur, Université d'Abomey-Calavi (Bénin)	<i>Directeur</i>

DEDICACES

Je dédie ce travail particulièrement A :

Mon père Jean AKOWANOU,

A ma mère Véronique AMOUSSOU TCHEKOUNOU épouse AKOWANOU,

en hommage très reconnaissant pour tous les sacrifices consentis

pour faire de moi un Homme.

A mon épouse Léonie ZANMENOUE,

A mes enfants Michèle, Lionel et Fabrice,

A tous mes neveux et nièces,

A tous mes frères et sœurs,

en hommage très reconnaissant pour leur soutien moral et matériel.

A tous mes amis,

en reconnaissance de leur soutien et encouragements permanents,

afin que se resserrent davantage nos liens

A Sidonie.

REMERCIEMENTS

Le présent travail est le fruit de plusieurs années de recherche au Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Appliquées (LEMA) de l'Ecole Polytechnique d'Abomey-Calavi (EPAC). Ce travail de recherche a été engagé à l'issue de notre stage intervenu dans le cadre de l'obtention du Diplôme d'Etudes Approfondies (DEA) "Sciences pour l'Ingénieur", conjointement organisé par l'Ecole Polytechnique d'Abomey-Calavi (EPAC) et la Faculté des Sciences et Techniques (FAST) de l'Université d'Abomey-Calavi.

En premier lieu, nous remercions chaleureusement notre Directeur de thèse, Professeur Gérard DEGAN, directeur du Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Appliquées, qui a accepté diriger cette oeuvre non moins fastidieuse. Il a proposé le sujet, suivi et dirigé les recherches jusqu'à leur aboutissement, en complément aux diverses investigations qu'il a personnellement menées sur les écoulements thermoconvectifs en milieu poreux anisotrope. Nous le remercions très sincèrement pour sa sollicitude et ses multiples concours pour avoir bénéficié de son expérience en sa qualité d'auteur de plusieurs articles scientifiques de renommée internationale, afin de mener à bien cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de notre reconnaissance et nos sincères remerciements.

Nous adressons également nos vifs remerciements au Professeur Norbert Cossi AWANOU, recteur de l'université d'Abomey-Calavi pour avoir accepté de présider le jury d'examen de cette thèse d'une part, pour ses précieux conseils et pour sa grande ouverture d'esprit d'autre part.

Nous tenons à exprimer nos vifs et sincères remerciements au Professeur Jean KOULIDIATI recteur de l'université de Ouagadougou au Burkina-Faso pour avoir accepté d'être membre du jury de cette thèse

malgré ses multiples occupations et pour le grand intérêt qu'il a porté à nos travaux de recherche.

Nos vifs remerciements vont également à l'endroit du professeur Kossi NAPO de l'Université de Lomé au Togo, qui a accepté d'être membre du jury de cette thèse malgré ses multiples occupations.

Nous remercions très sincèrement le Professeur Aboubacar Chedikh BEYE de l'Université Cheikh Anta-Diop de Dakar pour l'intérêt qu'il a porté à nos travaux de recherche, pour toute la peine qu'il s'est donné pour venir assister à notre soutenance de thèse afin d'y apporter sa contribution.

Nos vifs remerciements vont également à l'endroit du Professeur Antoine VIANOU pour avoir bien voulu participer à ce jury.

Nos sincères remerciements vont également en général à tout le corps enseignant de la Formation Doctorale " Sciences Pour l'Ingénieur ", et à ses dirigeants Professeur Côme GOUDJO et Professeur Antoine VIANOU en particulier.

Nous adressons également nos sincères remerciements à Monsieur Brice GBAGUIDI, ingénieur informaticien pour la grande disponibilité dont il a fait preuve suite à nos sollicitations pour venir à bout de quelques difficultés relevant de son domaine de travail.

Nous tenons aussi à exprimer nos remerciements au Professeur Mohamed SOUMANOU, chef du département de Génie et Technologie Alimentaire à l'EPAC pour tout son soutien.

A tous ceux qui nous ont apporté leur soutien au cours de ce travail, nous les prions de trouver ici le couronnement de leurs multiples efforts.

TABLE DES MATIERES

Dédicaces.....	iii
Remerciements.....	IV
Table des matières.....	VI
Liste des Figures.....	XI
Liste des Tables.....	XIV
Nomenclature.....	XV
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I : Etude bibliographique.....	4
1.1 Définition de la terminologie utile à la compréhension du sujet.....	5
1.1.1 Quelques propriétés des fluides.....	5
1.1.2 Généralités sur les milieux poreux.....	7
1.2 Revue de bibliographie.....	9
1.2.1 Travaux en écoulement confiné (fluide newtonien, milieu poreux anisotrope).....	10
1.2.2 Travaux en écoulement externe (fluide newtonien, milieu poreux isotrope ou anisotrope).....	12
1.2.3 Travaux en écoulement externe et confiné (fluide non newtonien, milieu poreux isotrope).....	15
1.2.4 Conclusion.....	26
CHAPITRE II : Problème physique étudié et lois de comportement du phénomène.....	28
2.1 Introduction.....	29
2.2 Bien-fondé et définition du problème physique.....	29

2.3	Eléments de rhéologie.....	38
2.3.1	Comportement non-newtonien.....	38
2.3.2	Relations constitutives.....	39
2.3.2.1	Fluides au comportement indépendant du temps.....	42
2.3.2.2	Fluides visqueux au comportement dépendant du temps.....	46
2.4	Lois physiques	48
2.4.1	Loi de l'écoulement en milieu poreux.....	48
2.4.1.1	Loi de Darcy.....	48
2.4.1.2	Loi de Darcy généralisée.....	49
2.5	Modèle mathématique.....	51
2.5.1	Hypothèses simplificatrices.....	51
2.5.2	Equations gouvernantes.....	52
2.5.2.1	Formulation conservative.....	52
2.5.2.2	Formulation en variables primitives.....	55
2.5.3	Cas étudiés.....	58
2.5.4	Conditions aux limites.....	58
2.6	Transfert de chaleur.....	59
2.7	Conclusion.....	60

CHAPITRE III : Etude en régime transitoire de la convection naturelle au voisinage d'une plaque verticale adjacente à un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non-newtonien...

3.1	Introduction.....	62
3.2	Présentation du système physique et du modèle mathématique.....	62
3.2.1	Présentation du système physique.....	62

3.2.2	Modèle mathématique.....	63
3.2.2.1	Existence de la couche limite.....	63
3.2.2.2	Condition initiale.....	65
3.2.2.3	Conditions aux limites.....	65
3.3	Analyse d'échelle.....	66
3.3.1	Cas de la surface chauffée isothermiquement.....	67
3.3.2	Cas de la surface chauffée par un flux de chaleur	69
3.4	Résolution du problème physique.....	71
3.4.1	Adimensionnalisation des équations.....	71
3.4.2	Solutions affines.....	76
3.4.2.1	Méthode des caractéristiques.....	76
3.4.2.2	Solutions affines :Cas d'une surface chauffée isothermiquement.....	78
3.4.2.3	Cas d'une surface chauffée par un flux de chaleur.....	85
3.5	Discussion des résultats.....	90
3.6	Conclusion.....	99
 CHAPITRE IV : Etude en régime de couche limite de la convection naturelle au voisinage d'une surface verticale bordant un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien .		101
4.1	Introduction.....	102
4.2	Modèle physique et formulation mathématique.....	102
4.2.1	Modèle physique.....	102
4.2.2	Formulation mathématique.....	103
4.3	Résolution.....	104
4.3.1	Epaisseur de la couche limite.....	105
4.3.2	Transfert de chaleur.....	109
4.4	Discussion des résultats.....	113

4.5	Conclusion.....	120
-----	-----------------	-----

CHAPITRE V : Solution affine au problème de pénétration des courants convectifs dans un puits cylindrique vertical débouchant dans un large réservoir.....

		122
5.1	Introduction.....	123
5.2	Modèle physique et Formulation mathématique.....	123
	5.2.1 Modèle physique.....	123
	5.2.2 Formulation mathématique.....	125
5.3	Conditions aux limites.....	126
5.4	Résolution.....	127
	5.4.1 Analyse d'échelle et adimensionnalisation des équations.....	127
	5.4.2 Solution affine.....	131
5.5	Résultats et Discussion.....	137
5.6	Conclusion.....	144

CHAPITRE VI : Etude en régime de couche limite de la convection pénétrante à l'intérieur d'un puits cylindrique vertical débouchant dans un large réservoir.....

		146
6.1	Introduction.....	147
6.2	Formulation du problème.....	147
6.3	Solution analytique : méthode intégrale.....	148
	6.3.1 Analyse d'échelle.....	148
	6.3.2 Adimensionnalisation des équations.....	151
	6.3.3 Résolution.....	151
6.4	Solution analytique par la méthode d'Oseen	154
6.4.1	Formulation mathématique.....	156

6.4.2	Analyse d'échelle.....	155
6.4.3	Adimensionnalisation des équations.....	156
6.4.4	Résolution.....	157
6.5	Résultats et Discussion.....	160
6.6	Conclusion.....	169
	Conclusion générale et perspectives.....	171
7.1	Conclusion générale.....	172
7.2	Perspectives.....	175
	Références.....	177
	Annexes.....	186

Liste des figures

1.1	Répartition de vitesse en écoulement laminaire.....	6
2.2	a) Préparation de gâteau “ablo-yoki”.....	30
2.2	b) Préparation artisanale du pain.....	31
2.2	c) Schéma d’un silo à céréales conditionnés montrant le modèle physique étudié.....	32
2.3	Modèle physique, lieu de mouvements thermoconvectifs au voisinage de la surface verticale	37
2.4	Configuration géométrique du puits cylindrique et système d’axes de coordonnées.....	38
2.5	Configuration générale de l’écoulement en cisaillement simple.....	40
2.6	Rhéogrammes de fluides: 1) fluide newtonien; 2) fluide rhéofluidifiant ; 3) fluide rhéoépaississant.....	41
2.7	Rhéogrammes de fluides à contraintes critiques: 1) fluides plastiques ; 2) fluide plastique de Bingham.....	43
2.8	a) Rhéogramme de fluide rhéopexe.....	47
2.8	b) Boucles d’hystérésis de différents types de fluides	47
2.9	Système d’axes de coordonnées.....	56
3.1	Modèle physique et système d’axes de coordonnées.....	63
3.2	Effet de l’indice d’écoulement n sur le temps critique τ_s lorsque $\theta = 45^\circ$, $K^* = 0.1$ dans le cas d’une plaque chauffée de façon isotherme.....	93
3.3	Effet du rapport d’anisotropie K^* sur la variation du temps critique τ_s lorsque $\theta = 30^\circ$, $n = 1,2$ dans le cas d’une plaque chauffée de façon isotherme.....	95

3.4	Effet de l'angle d'orientation θ des axes principaux de perméabilité sur le temps critique τ_s lorsque $n=0.8$, $K^*=10$ et dans le cas d'une plaque chauffée de façon isotherme.....	96
3.5	Influence du temps τ ($\tau < \tau_s$) sur l'épaisseur A de la couche limite pour $n=0.5$ et pour différentes valeurs de Ra_H lorsque la surface est chauffée isothermiquement.....	97
3.6	Influence du temps τ ($\tau < \tau_s$) sur l'épaisseur de la couche limite pour $Ra_H=30$ et pour différentes valeurs de l'indice n lorsque la plaque est chauffée de façon isotherme.....	98
4.1	Variation du nombre de Nusselt en fonction du rapport d'anisotropie K^* pour différentes valeurs de l'angle d'orientation θ des axes principaux et de l'indice n d'écoulement du fluide	115
4.2	Effet de l'angle d'orientation θ des axes principaux sur le nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie K^*	117
4.3	Variation du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu}_{0-H} en fonction du nombre de Rayleigh modifié R_H pour différentes valeurs de l'indice d'écoulement n	119
5.1	Configuration géométrique du puits cylindrique et système d'axes de coordonnées.....	124
5.2	Isothermes ($\psi/(-0,7215) = constante$) en régime affine.....	138
5.3	Isothermes ($T/(-0,7215) = constante$) en régime affine pour : a) $K^*=1; \theta=45^\circ$; b) $K^*=0,25; \theta=45^\circ$; c) $K^*=2,5; \theta=45^\circ$	139
5.4	Effet de l'angle d'orientation des axes principaux et de paramètre $Ra_L(R/L)^2$ sur le transfert de chaleur en régime affine.....	141
5.5	Effet du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et du paramètre $Ra_L(R/L)^2$ sur la profondeur de pénétration de l'écoulement convectif dans le puits.....	143

6.1	Modèle physique et système d'axes de coordonnées (méthode d'Oseen).....	154
6.2	Effet du rapport d'anisotropie K^* sur le nombre de Nusselt Nu pour une d'orientation $\theta = 45^\circ$ des axes principaux.....	162
6.3	Effet de l'angle d'orientation θ des axes principaux sur le nombre de Nusselt Nu lorsque $Ra_L = 1000$, $(R/L) = 0,2$ et pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie K^*	164
6.4	Effet du nombre de Darcy-Rayleigh Ra_L sur le nombre de Nusselt Nu (solution intégrale) pour différentes valeurs de l'angle d'orientation θ des axes principaux lorsque $K^* = 0,1$ et $K^* = 10$	165
6.5	Effets du rapport d'anisotropie K^* et du nombre de Darcy-Rayleigh modifié R_L sur le nombre de Nusselt Nu pour un angle d'orientation $\theta = 45^\circ$ des axes principaux.....	167
6.6	Effets du rapport d'anisotropie K^* et de l'angle d'orientation θ des axes principaux sur le nombre de Nusselt Nu	168

Liste des Tables

3.1	Evaluation des constantes ζ (équation (3.48)) et $I_{1/n}$ (équation (3.69)).....	91
3.2	Comparaison des valeurs du paramètre $Nu_x/(Ra_x)^{1/2}$ pour différentes méthodes de résolution dans le cas $n=1$ pour une surface chauffée de façon isotherme ($\lambda=0$).....	92
4.1	Comparaison des valeurs du paramètre $Nu_x/(Ra_x)^{1/2}$ pour différentes méthodes de résolution dans le cas $n=1$ pour une plaque chauffée par un flux de chaleur uniforme ($\lambda=0$).....	113
4.2	Comparaison des valeurs du paramètre $Nu_x/(Ra_x)^{1/2}$ pour différentes méthodes dans le cas $n=1$ pour une plaque chauffée par un flux de chaleur uniforme ($\lambda=1/3$).....	114
6.1	Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt Nu obtenus pour différentes méthodes de résolution dans le cas où l'angle d'orientation des axes principaux $\theta=45^\circ$	161

Nomenclature

- a, b, c : constantes, équation (2.26)
 A : rapport de forme de la couche limite, δ/H
 B : constante positive équation (3.79)
 C : constante positive équation (3.82)
 D : constante positive équation (3.91)
 c_p : chaleur spécifique à pression constante, $J/(kg.K)$
 \vec{g} : accélération gravitationnelle, m/s^2
 h : coefficient de transfert local de chaleur
 \dot{h} : consistance du fluide d'Ostwald, $Pa.s^n$
 \bar{h}_{0-H} : coefficient moyen de transfert de chaleur par convection
 k : conductivité thermique, $J/(s.m.K)$
 $\overline{\overline{K}}$: tenseur de la perméabilité, équation (2.17)
 K_1, K_2 : perméabilités suivant les axes principaux
 K^* : rapport d'anisotropie en perméabilité, K_1/K_2
 ℓ_s : profondeur de pénétration des courants de convection dans le puits en régime affine, équation (5.49)
 H : hauteur de la surface, m
 I : expression, équation (4.17)
 J : expression, équation (4.13)
 p : pression, N/m^2
 Q^* : flux de chaleur évacuée sur toute la surface, équation (4.29)
 Q : flux de chaleur transférée dans le puits cylindrique, équation (5.32)
 n : indice d'écoulement du fluide non-Newtonien
 Nu : nombre de Nusselt
 Nu_x : nombre de Nusselt local
 Nu_H : nombre de Nusselt basé sur la hauteur de la surface
 \overline{Nu}_{0-H} : nombre de Nusselt moyen

Ra_x	: nombre de Darcy-Rayleigh, $Ra_x = K_1 g \beta D x^{n+\lambda} / \varepsilon \alpha^n$
Ra_H	: nombre de Darcy-Raleigh, $Ra_H = K_1 \rho_\infty g \beta \Delta T H^n / \varepsilon \alpha^n$
R_H	: nombre de Darcy-Rayleigh, $R_H = K_1 \rho_\infty g \beta (\overline{T_w - T_\infty}) H^n / \alpha^n \varepsilon$
Ra_L	: nombre de Darcy-Rayleigh, $Ra_L = K_1 g L \beta (T_1 - T_2) / \alpha \nu$
R_L	: nombre de Darcy-Rayleigh, $R_L = Ra_L / \sqrt{K_1 K_2}$
t	: temps, s
T	: température dimensionnelle, K
$\overline{T_w}$: température moyenne sur la surface, K
\vec{v}	: vitesse de filtration du fluide, m/s
u, v	: composantes de la vitesse dans les directions Ox et Oy
U, V	: composantes adimensionnelles de la vitesse
x, y	: coordonnées cartésiennes
x', r'	: coordonnées cylindriques
x, r	: coordonnées cylindriques adimensionnelles
X, Y	: coordonnées adimensionnelles

Lettres grecques

α	: diffusivité thermique, $\alpha = k / (\rho c_p)_f$ en m^2/s
β	: coefficient d'expansion thermique du fluide, $1/K$
δ	: épaisseur de la couche limite
ΔT	: échelle caractéristique de la température, K
ε	: constante, équation (2.12)
η	: variable affine, équation (3.53)
η_δ	: valeur de la variable affine à la lisière de la couche limite
γ	: porosité du milieu poreux, %
λ	: exposant dans la loi de variation de la température de la surface
λ_{xy}	: contrainte de cisaillement, Pa

λ_c	: contrainte critique lorsque la vitesse de cisaillement tend vers 0
\dot{g}	: vitesse de cisaillement, s^{-1}
μ	: viscosité dynamique du fluide, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
μ_a	: viscosité apparente du fluide, $m^2.s^{-1}$
τ	: temps adimensionnel
τ_s	: temps de changement de mode d'écoulement équation (3.63)
ψ	: fonction de courant dimensionnelle, équation (3.20)
Ψ	: fonction de courant adimensionnelle, ψ / α
θ	: angle d'orientation des directions principales du tenseur de perméabilité
χ	: profil de température
Θ	: température adimensionnelle, $(T - T_\infty) / \Delta T$
ρ	: densité du fluide, kg/m^3
$(\rho c_p)_f$: capacité calorifique du fluide, $J / (m^3.K)$
$(\rho c_p)_m$: capacité thermique du milieu poreux, $J / (m^3.K)$
	: rapport des capacités calorifiques, $\sigma = (\rho c_p)_m / (\rho c_p)_f$
ζ	: rayon de courbure de la couche poreuse isotherme, située dans la région centrale et centrée sur l'axe du puits cylindrique

Exposants

'	: dérivée partielle par rapport à η
—	: relatif aux variables physiques (méthode d'Oseen)
~	: relatif aux variables adimensionnelles, (méthode d'Oseen)

Indices

∞	: relatif au courant libre, loin de la surface verticale
w	: relatif à la surface verticale
c	: relatif à la région centrale du puits

Introduction

La convection naturelle, induite par la poussée d'Archimède et engendrée par des gradients de température en milieu poreux saturé, a fait l'objet de diverses investigations à cause de son importante implication en géophysique et dans différentes applications industrielles. Parmi les plus importantes applications figurent l'extraction du pétrole, les écoulements géothermiques, la diffusion souterraine des contaminants, les procédés de transformation dans l'industrie agro-alimentaire, l'isolation thermique, etc. Dans la plupart de ces applications interviennent des fluides non-newtoniens. Ces fluides de structure complexe, présentent en écoulement des comportements mécaniques liés à leur structure microscopique. Ces comportements mécaniques sont décrits par des modèles rhéologiques caractéristiques. En général, les milieux saturés par ces fluides sont poreux et hydrodynamiquement anisotropes. Ils présentent de ce fait une transmissibilité directionnelle du fluide en écoulement.

Dans cette thèse, le transfert de chaleur par convection naturelle en milieux poreux anisotropes saturés est étudié analytiquement. La première partie de l'investigation du problème considéré est relative à l'écoulement convectif le long d'une surface verticale imperméable, bordant un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non-newtonien. La surface verticale est chauffée soit isothermiquement, soit par un flux de chaleur constant.

La seconde partie est consacrée à l'étude de la convection thermique pénétrante dans un puits de forme cylindrique confinant un milieu poreux. La structure poreuse de la matrice solide est considérée anisotrope en perméabilité et saturée par un fluide newtonien. Les directions principales du tenseur d'anisotropie en perméabilité sont orientées arbitrairement par rapport au champ gravitationnel.

Les points suivants constituant le contenu de la thèse sont :

- Etude bibliographique;
- Le phénomène physique étudié et les lois de comportement;

- Etude en régime transitoire de la convection naturelle au voisinage d'une surface verticale chauffée bordant un milieu poreux anisotrope en perméabilité et saturé par un fluide non-newtonien ;
- Etude en régime de couche limite de la convection naturelle au voisinage d'une surface verticale chauffée, adjacente à un milieu poreux anisotrope en perméabilité et saturé par un fluide non-newtonien ;
- Solution affine au problème de la convection naturelle pénétrante dans un puits cylindrique confinant un milieu poreux saturé par un fluide newtonien.
- Etude en régime de couche limite de la convection naturelle pénétrante dans un puits cylindrique confinant une couche poreuse saturée par un fluide newtonien.

Pour les différents aspects du problème abordé dans cette thèse, des solutions analytiques sont développées dans de larges gammes de valeurs prises par les paramètres de contrôle. En ce qui concerne le régime de couche limite, une analyse d'échelle des grandeurs d'intérêt caractérisant ce type de problème est conduite pour prédire la solution analytique.

Chapitre 1

Etude bibliographique

Avant tout développement, il nous paraît important de rapporter sommairement un certain nombre de définitions utiles pour la compréhension du problème physique.

1.1 Définition de la terminologie utile à la compréhension du sujet

1.1.1 Quelques propriétés des fluides

Un fluide est un milieu continu sans rigidité et dont l'une des principales propriétés est de subir de grandes déformations non élastiques sous l'action de forces extérieures faibles. L'écoulement d'un fluide est caractérisé par un champ de vitesse, par une pression et par certaines propriétés de ce fluide telles que la densité et la viscosité. Cette dernière propriété, d'une importance particulière dans l'étude des écoulements, mesure la résistance du fluide à l'écoulement. Une telle catégorie de fluides est qualifiée de fluides réels. Dans un fluide réel en écoulement, il existe des forces tangentielles de frottement interne appelées forces de viscosité. Ces forces sont dues au frottement entre les particules fluides en mouvement. Un fluide dont le mouvement n'est accompagné d'aucune force de frottement est dit non visqueux ou parfait. La viscosité a pour effet de provoquer au sein du fluide une dissipation d'énergie cinétique qui est transformée en chaleur. L'écoulement d'un fluide réel est dit laminaire s'il se déplace en formant des lames ou couches parallèles. Dans le cas où l'écoulement se fait de façon désordonnée, il est qualifié de turbulent. Dans ce dernier cas il y a brassage intensif entre les particules fluides.

Considérons le long d'une plaque horizontale fixe un fluide réel en écoulement laminaire à la vitesse moyenne \bar{u}_e . Considérons à l'ordonnée y le long de cette plaque deux couches fluides en contact, parallèles à la plaque conformément aux annotations de la figure 1.1. (voir page 6) Leurs vitesses sont u et $u + du$. En raison de l'écart des vitesses, il se produit un frottement

entre les deux couches. Un élément dS de la surface de contact est donc soumis à une force de frottement tangentiel dF représentée à la figure 1.1.

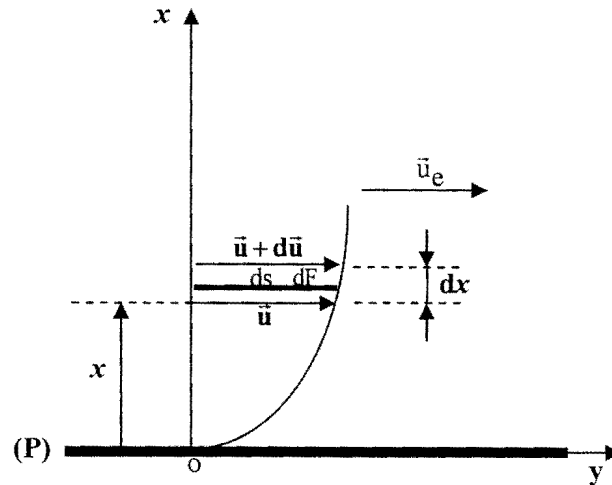


Figure 1.1: Répartition de vitesse en écoulement laminaire

En première approximation, la force de frottement dF est proportionnelle à la différence de vitesse entre les deux couches fluides c'est-à-dire proportionnelle au gradient transversal de vitesse, soit:

$$dF = \mu dS \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.1)$$

Selon la loi de la viscosité de Newton, la tension de frottement $\lambda_{xy} = dF/dS$ qui agit dans le sens opposé à l'écoulement est proportionnelle au gradient de vitesse de l'écoulement. Ainsi on a:

$$\lambda_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide. Les fluides qui obéissent à la loi de *Newton*, équation (1.2) sont des fluides newtoniens. On peut citer comme exemple l'eau, l'air... Ce modèle de fluide newtonien décrit la grande

majorité des fluides constitués de molécules simples. Cette définition du fluide newtonien implique que:

- dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement ;
- la viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement ;
- la viscosité est indépendante du temps et les contraintes s'annulent aussitôt que l'écoulement est arrêté.

Toute déviation de ces règles est le signe d'un comportement non-newtonien. La grande majorité des fluides dont certains d'usage très courant ont un comportement plus complexe en écoulement.

1.1.2 Généralités sur les milieux poreux

Dans un sens général, un milieu poreux est un milieu solide parsemé de nombreux petits trous ou d'espaces vides distribués plus ou moins régulièrement dans toute la masse du milieu et de façon désordonnée (*Degan (1997)*). Il existe une très grande variété de matériaux naturels et artificiels qui sont poreux. Un morceau de pierre, une pincée de sable, les agrégats fibreux, une touffe de coton sont des exemples de milieu poreux. On distingue deux catégories de milieux poreux :

- Les milieux poreux alvéolaires ou cellulaires considérés comme des espaces solides pleins de trous : ce sont des milieux poreux à grande porosité ;
- Les milieux poreux granulaires ou pulvérulents considérés comme des espaces vides remplis de grains solides: ce sont des milieux à faibles porosités.

Les espaces vides interconnectés ou non sont appelés *pores*. Un fluide peut s'écouler à travers un milieu poreux à condition que la plupart des nombreux espaces vides dont ce dernier est composé soient interconnectés. Dans ces

conditions le milieu est dit *saturé*. Le volume moyen du milieu poreux non occupé par les pores contient les grains solides dont l'ensemble est connu sous le nom de *matrice solide*. Beaucoup de propriétés macroscopiques du milieu poreux sont liées à la distribution de la taille des pores. Répertoire de telles propriétés permet de caractériser les milieux poreux. Le but visé dans ce paragraphe n'est pas de constituer une liste exhaustive de ces propriétés, mais de donner un aperçu sur les propriétés exploitables dans les développements ultérieurs de notre étude.

La *porosité* d'un milieu poreux est la fraction du volume moyen du milieu poreux occupé par les espaces vides. C'est le rapport du volume moyen des pores au volume du milieu poreux. La porosité dépend en général de la forme et de la taille des grains.

La *perméabilité* est la propriété du milieu poreux qui caractérise la facilité avec laquelle un fluide est mis en écoulement à travers ce milieu par l'application d'un gradient de pression. La valeur de la perméabilité est déterminée non seulement par les caractéristiques structurales (forme des grains, géométrie des pores et de la matrice solide), mais également par la nature des matériaux constitutifs et de leurs interactions physico-chimiques. Ainsi, la distribution des grains solides dans le milieu poreux introduit des irrégularités géométriques (*Cheng et coll. (1999)*), et la transmissibilité du fluide saturant n'est pas la même dans toutes les directions. Ces matériaux poreux sont dits *anisotropes*. Il est démontré que la perméabilité est, en première approximation, proportionnelle au carré du diamètre moyen des pores.

Un milieu est *homogène* relativement à une certaine propriété, si cette dernière est indépendante de la position dans ce milieu ; dans le cas contraire le milieu est dit *hétérogène*. De même, un milieu est dit *isotrope* relativement à une certaine propriété physique si cette dernière est indépendante de la direction dans le milieu. Par conséquent, si en un point quelconque du milieu,

une propriété varie avec la direction, le milieu est dit *anisotrope* au point considéré relativement à cette propriété. Dans le monde environnant, nous rencontrons *l'anisotropie en perméabilité* dans les sols et dans les formations géologiques servant de réservoirs ou nappes aquifères. En effet, les fonds des rivières constituent des systèmes géologiques de structure anisotrope constituée de sédiments et de roches. Tel que expliqué par *Bear (1972)*, les sédiments se disposent généralement de sorte que la perméabilité dans la direction horizontale dans la couche poreuse résultante est plus élevée que celle dans les autres directions. Ces sols, constituant les lits des rivières, peuvent être assimilés à des milieux poreux submergés par un milieu fluide dont la surface libre perméable, en contact avec l'atmosphère est chauffée par le rayonnement solaire. Selon *Neale (1977)* les milieux poreux rencontrés, particulièrement ceux résultant de la sédimentation géologique ont une structure anisotrope. On peut citer en plus des lits de rivières, les formations géologiques des sous-sols, les boues de forage, les lits de filtrage. La perméabilité détermine pour ces milieux, les propriétés macroscopiques de transport telles que la diffusivité, la conductivité qui sont toutes directionnelles. L'anisotropie est généralement une conséquence de l'orientation préférentielle et de la disposition asymétrique des particules constituant ces milieux.

1.2 Revue de bibliographie

Cette revue de bibliographie est relative à l'investigation menée dans cette thèse sur les écoulements thermoconvectifs stationnaires ou non en milieu poreux saturé par un fluide à rhéologie variée. Trois cas d'étude du phénomène convectif siégeant dans deux configurations principales, l'une relative aux enceintes confinées (écoulements confinés) et l'autre relative aux écoulements avec transfert de chaleur se produisant près des surfaces ou des

parois (écoulements externes) sont envisagés avec circonspection. Dans tous les cas, le fluide saturant la matrice poreuse est newtonien ou non et le milieu poreux est supposé isotrope ou non en perméabilité ayant ses directions principales coïncidant ou non par rapport au champ gravitationnel terrestre.

1.2.1 Travaux en écoulement confiné (fluide newtonien, milieu poreux anisotrope)

Les travaux disponibles dans la littérature, relatifs à la convection naturelle dans un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide newtonien portent en majorité sur l'étude des couches poreuses chauffées soit sur l'une de ses faces, soit par le bas. Ainsi, *Castinel et Combarous (1974)* furent les premiers auteurs à mener une étude tant expérimentale que théorique sur la convection naturelle en milieu poreux anisotrope chauffé par et confiné par des surfaces isothermes et imperméables. L'effet des paramètres d'anisotropie sur le phénomène de convection a été étudié. Un critère pour l'apparition de la convection (le nombre de Rayleigh critique) a été développé par ses auteurs. Leurs études ont été poursuivies par *Epherre (1975)* pour prendre en compte l'effet de l'anisotropie en conductivité thermique sur l'apparition des mouvements thermoconvectifs. Ces travaux ont été étendus par *Kvernold et Tyvand (1979)* et *Kibbin (1984)*. Ces auteurs ont établi que, pour un écoulement bidimensionnel dans une couche poreuse horizontale illimitée, le nombre de Nusselt dépend du quotient des rapports d'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique. L'application de ces résultats en isolation thermique permet de minimiser les pertes d'énergie.

Il existe aussi plusieurs travaux relatifs au transfert de chaleur en milieu poreux confiné par un cylindre vertical. *Minkowycz et Cheng (1976)* ont analysé l'écoulement convectif naturel le long d'un cylindre vertical baignant dans un milieu poreux saturé par un fluide newtonien. Le cylindre

vertical est soumis à une distribution de température variant en loi de puissance. Des solutions exactes et approchées basées sur des modèles des modèles affines locales ou non ont été obtenues par ces auteurs en utilisant les approximations caractérisant le régime de couche limite.

Bejan (1980,1984) a étudié analytiquement la convection naturelle dans un cylindre vertical à paroi imperméable confinant un milieu poreux et communiquant à un large réservoir à son extrémité supérieure. Cet auteur était le premier à montrer qu'un important modèle d'écoulement en régime affine révèle que la profondeur à laquelle la convection libre pénètre dans le puits est proportionnelle à la différence de température caractérisant l'écoulement.

Vasantha et Nath (1987) ont étudié numériquement, en utilisant la méthode des différences finies et la méthode de perturbations la couche limite thermique le long d'un cylindre isotherme imbibée dans un milieu poreux isotrope. De l'investigation menée, il résulte que l'épaisseur de la couche limite thermique croît lorsque le paramètre relatif au rayon de courbure du cylindre augmente.

L'étude de la convection naturelle dans un cylindre vertical confinant une matrice poreuse anisotrope a été réalisée par *Chang et Hsiao (1993)*. Ces auteurs ont considéré l'anisotropie en perméabilité du milieu poreux et l'anisotropie en conductivité thermique dont les axes principaux sont coïncidants par rapport aux axes de coordonnées radial et vertical. L'influence des paramètres de contrôle, en l'occurrence du rapport de forme, du nombre de Rayleigh, du rapport des perméabilités et du rapport des conductivités thermiques a été mise en évidence dans cette étude.

Une investigation portant sur la convection naturelle dans un espace annulaire où la rotation et l'anisotropie sont prises en considération a été faite par *Aboubi et coll. (1995)*. Seule, l'anisotropie en perméabilité a été considérée, la conductivité thermique étant supposée isotrope. Des solutions analytiques et numériques pour les cas d'un milieu fluide et celui d'un milieu

poreux ont été établies. Le nombre de Rayleigh critique caractérisant le seuil de la convection a été prédit analytiquement par la théorie de la stabilité linéaire. Les champs de vitesse et de température ainsi que le nombre de Nusselt ont été obtenus analytiquement et numériquement en utilisant la convection à amplitude finie.

L'écoulement convectif et le transfert de chaleur dans une cavité verticale confinant un milieu poreux hydrodynamiquement et thermiquement anisotrope et saturée par un fluide newtonien, a été étudié numériquement par *Ni et Beckerman (1991)*. Ces auteurs ont considéré des directions principales d'anisotropie en perméabilité alignées sur celles des axes de coordonnées. Le même problème a été étudié analytiquement par *Kumari et coll. (1993)*. Il a été trouvé que les effets des rapports d'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique sur le transfert thermique sont significatifs. *Zhang (1993)*, *Degan et coll. (1995)*, *Degan et Vasseur (1996, 1997, 1998)* ont analysé le même problème en considérant l'orientation arbitraire des directions principales de l'anisotropie en perméabilité par rapport aux axes de coordonnées. Il a été observé par ses derniers auteurs que l'angle d'orientation des axes principaux de perméabilité influence grandement l'écoulement et le transfert de chaleur.

1.2.2 Travaux en écoulement externe (fluide newtonien, milieu poreux isotrope ou anisotrope)

Dans le même ordre d'idées, l'écoulement convectif le long d'une surface verticale bordant un milieu poreux isotrope et saturé par un fluide newtonien a fait l'objet d'une grande attention de la part des chercheurs. A cet effet, *Cheng (1978)*, dans un traité de revue bibliographique a discuté plusieurs travaux relatifs à cet phénomène et dont les applications relèvent du domaine de la géothermie. *Raptis (1983)* a été étudié analytiquement

l'écoulement naturel à travers un milieu poreux bidimensionnel, limité par une surface verticale à extension infinie. Cet auteur a envisagé sur la surface une distribution de température fonction sinusoïdale du temps et dont la valeur moyenne est non nulle. Les effets de la fréquence d'oscillation sur le champ de vitesse ont été étudiés. Une autre investigation du même problème a été menée par *Raptis et Perdikis (1985)* dans le cas où la température et la vitesse à l'intérieur du courant libre sont supposées constantes. Ces auteurs ont observé que l'augmentation de la perméabilité du milieu ou du nombre de Grashof fait croître la vitesse de l'écoulement alors qu'une augmentation de la fréquence de la température imposée sur la surface produit l'effet contraire. *Singh et coll. (1986)* ont étendu ces analyses en résolvant le problème par un développement en série de puissances entières de la fréquence de la fonction de température, pour enfin discuter des effets des paramètres physiques sur les champs de vitesse et de température.

Cheng et Pop (1984) ont utilisé la méthode des relations intégrales pour étudier la convection naturelle en régime transitoire le long d'une plaque verticale baignant dans un milieu poreux. Ces auteurs ont démontré que suite à une croissance de la température de la plaque, l'épaisseur de la couche limite croît. *Nakayama et Koyama (1987)* ont utilisé la méthode des relations intégrales pour analyser le phénomène de convection sur une plaque verticale chauffée et plongée dans un milieu poreux thermiquement stratifié. Les effets de la stratification thermique sur les taux de transfert de chaleur locaux ont été discutés. *Hong et coll. (1985)* ont étudié analytiquement la convection naturelle dans un milieu poreux à grandes porosités pour rechercher les effets des forces de volume et des forces inertielles qui sont non prises en compte par le modèle de Darcy. *Ingham et Brown (1986)* furent les premiers auteurs à présenter les solutions détaillées au problème de convection naturelle le long d'une plaque verticale plongée dans un milieu lorsque la plaque est soumise à

une croissance soudaine de la température. Cette analyse a été développée par la suite par *Merkin et Zhang (1992)*. Ces derniers auteurs ont présenté les solutions numériques du problème de l'écoulement thermique en milieu poreux en régime de couche limite à partir d'une plaque chauffée. Cette dernière est chauffée par un flux de chaleur, fonction de puissance de la distance comptée sur la plaque à partir du bord d'attaque de la plaque. *Kaviany et Mittal (1987)* ont examiné tant expérimentalement qu'analytiquement le taux de transfert de chaleur sur une surface verticale chauffée isothermiquement et adjacente à un milieu poreux de grandes porosités. Il ressort de toutes ces investigations que, en raison de l'existence des forces de volume et des forces inertielles, l'écoulement convectif est retardé et le transfert de chaleur est considérablement réduit. Pour tenir compte de la résistance à la friction induite par la matrice solide du milieu poreux, non prise en compte dans le modèle de Darcy, *Plumb et Huenefeld (1981)*, *Bejan et Poulikakos (1984)* ont adopté le modèle de *Forchheimer* pour étudier la convection naturelle dans un milieu poreux de grandes porosités. De même, *Hsu et Cheng (1985)* ont adopté le modèle mathématique de *Brinkman* pour rechercher les effets du frottement visqueux sur une paroi verticale le long de laquelle a lieu un écoulement convectif. Il résulte de toutes ces investigations que la résistance à la paroi et la friction induite par la matrice solide ralentissent l'écoulement convectif et par conséquent réduit le taux de transfert de chaleur lorsque le nombre de Darcy croît.

Ene (1991) a étudié les effets de l'anisotropie en perméabilité sur la convection naturelle en régime de couche limite le long d'une surface imperméable. Pour la résolution des équations de couche limite, cet auteur a utilisé la méthode des relations intégrales. Les axes principaux de perméabilité ont été orientés dans les mêmes directions que les axes de coordonnées. *Vasseur et Degan (1998)* ont étudié le même problème en

considérant les axes principaux de perméabilité orientés arbitrairement par rapport au champ gravitationnel. Il ressort de leur investigation que, lorsque la perméabilité dans la direction perpendiculaire à la surface est supérieure à celle dont l'axe est parallèle à la surface, il résulte un accroissement du champ de température.

1.2.3 Travaux en écoulement externe et confiné (fluide non-newtonien, milieu poreux isotrope)

Abordant la convection en milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien, nous citerons les travaux les plus importants. *Pascal (1983, 1986)* a étudié tant analytiquement que numériquement le comportement rhéologique d'un fluide non-newtonien en écoulement en régime transitoire d'une part et permanent d'autre part à travers un milieu poreux isotrope. Il ressort de ses analyses que l'indice de comportement du fluide non-newtonien influence grandement l'écoulement et le transfert de chaleur à travers le milieu poreux. Un modèle mathématique prenant en compte la classe rhéologique du fluide non-newtonien a été élaboré par cet auteur.

La convection en régime de couche limite le long d'une plaque verticale semi-infinie, a été étudiée par *Cheng et Minkowycz (1977)*. En considérant un profil de température pariétale en loi de puissance, sur la base du modèle de Darcy ces auteurs ont recherché la solution affine au problème. Dans une investigation plus générale, une analyse systématique des possibilités de solutions affines pour différents profils de température sur la plaque a été entreprise par *Jonhson et Cheng (1978)*. Le même problème a été étudié numériquement par *Chen et Chen (1988)* qui ont considéré la plaque chauffée isothermiquement. *Seetharamu et Dutta (1990)* ont examiné le même problème en adoptant un profil de température fonction de puissance de la distance comptée sur la plaque à partir du bord d'attaque. *Rastogi et*

Poulikakos (1995) ont étudié le phénomène de double diffusion le long d'une surface verticale baignant dans un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien. Il ressort de leur investigation que les variations de température et de concentration dans le milieu engendrent le long de la surface un flux de chaleur uniforme dont le transfert est grandement influencé par l'indice d'écoulement du fluide non-newtonien.

Bian et coll. (1994) ont étudié analytiquement et numériquement la convection naturelle en régime de couche limite dans une cavité rectangulaire chauffée par le côté, inclinée d'un angle ϕ par rapport à la direction horizontale et confinant un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien. Ce dernier est considéré avoir un comportement rhéologique en loi de puissance. Les résultats de leurs investigations montrent que les champs d'écoulement et de température, de même que le taux de transfert de chaleur dépendent des paramètres tels que le nombre de Rayleigh, l'indice d'écoulement du fluide non-newtonien n et le rapport de forme de la cavité. Ainsi, pour une position verticale de la cavité ($\phi = 90^\circ$) et pour un nombre de Rayleigh fixé, une croissance (décroissance) du taux de transfert de chaleur est observée lorsque l'indice d'écoulement du fluide non-newtonien décroît (croît). Lorsque le nombre de Rayleigh augmente ou lorsque l'indice n décroît l'épaisseur de la couche limite le long des parois verticales devient de plus en plus faible et le phénomène de convection devient de plus en plus important.

Hossain et coll. (1995) ont étudié la convection naturelle le long d'un cylindre vertical baignant dans un milieu poreux isotrope saturé par un fluide non-newtonien. Le cylindre, chauffé sur sa section droite supérieure est immergé dans le milieu poreux. Par conduction thermique, la chaleur est transférée de la surface latérale du cylindre au milieu poreux. Sur la base du modèle de Darcy, les équations de couche limite ont été résolues

numériquement. Il a été envisagé pour la perméabilité du milieu poreux le modèle en loi de puissance proposé par *Dharmadhikari et Kale (1985)*. Il ressort de cette étude que le coefficient local de transfert de chaleur et le flux de chaleur augmentent en fonction du rapport de forme du cylindre lorsque l'indice d'écoulement du fluide et le paramètre de couplage conduction-convection augmentent. Une croissance du champ de température est également observée lorsque le rapport de forme croît, pour des rayons de courbures de plus en plus grands lorsque l'indice d'écoulement du fluide et le paramètre de couplage conduction-convection diminuent.

Mansour et coll. (1997) ont étudié la convection mixte le long d'un cylindre vertical chauffé de façon isotherme et baignant dans un milieu poreux isotrope. Ce dernier est saturé par un fluide non-newtonien à caractéristique rhéologique en loi de puissance de type *Ostwald-de-Waele*. Ces auteurs ont montré que suivant leur prédominance respective, le régime d'écoulement est une succession de régimes de convection forcée, de convection mixte et de convection naturelle. Il résulte de cette analyse que les faibles rayons de courbure du cylindre favorisent la croissance des gradients de température, occasionnant ainsi un écoulement convectif pariétal dont l'intensité croît pour un indice d'écoulement du fluide de plus en plus faible. Aussi, pour de faibles rayons de courbure, le taux de transfert de chaleur croît-il avec l'indice d'écoulement tant en régime de convection forcée pure qu'en régime de convection naturelle pure. Lorsque prédomine le régime de convection mixte, une augmentation du rayon de courbure du cylindre fait croître le taux de transfert de chaleur lorsque le milieu poreux est saturé par un fluide pseudo-plastique ($n < 1$).

Gorla et Kumari (2003) ont étudié la convection naturelle en régime de couche limite le long d'une plaque horizontale chauffée par le bas. La plaque est chauffée avec une distribution de température variable ou un flux

de chaleur variable, qui sont tous deux fonctions puissance de la distance comptée sur la plaque à partir du bord d'attaque. Cette plaque limite un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien de caractéristique rhéologique en loi de puissance de type *Ostwald-de-Waele*. Il résulte de cette investigation que, indépendamment de la succion ou de l'injection du fluide sur la paroi, et du type de chauffage appliqué sur cette dernière, une croissance de l'exposant dans la loi de puissance fait croître le taux de transfert de chaleur pour un indice d'écoulement n donné. Aussi, pour un exposant de loi de puissance fixé, le transfert de chaleur est-il favorisé par un fluide pseudo-plastique ($n < 1$) tandis qu'avec les fluides dilatants ($n > 1$) le transfert de chaleur est faible.

Le problème de la convection naturelle dans une cavité verticale chauffée horizontalement par un flux de chaleur et confinant un fluide non-newtonien de type *Ostwald-de-Waele* a été examiné par *Lamsaadi et coll. (2005)*. Dans une approche basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle, une analyse d'échelle a été développée pour prédire l'intensité du transfert de chaleur en fonction des paramètres tels que le nombre de Rayleigh, l'indice d'écoulement n du fluide non-newtonien et le rapport de forme de la cavité. Les résultats qui découlent de l'analyse de la couche limite montrent que l'effet de l'indice de comportement du fluide non-newtonien est tel que la convection thermique est favorisée par le caractère pseudo-plastique du fluide non-newtonien ($0 < n < 1$) et défavorisée par le caractère dilatant ($n > 1$)

Chen et Chen (1988) ont étudié numériquement le problème de la convection naturelle en régime de couche limite le long d'une surface verticale chauffée isothermiquement et bordant un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien à caractéristique rhéologique en loi de puissance. *Poulikakos et Spatz (1988)* ont analysé l'effet de la convection naturelle sur le

phénomène de fusion par contact dans la matrice solide d'un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien. Les résultats de leurs investigations renseignent sur la dépendance entre le flux local de chaleur transféré au point de fusion et la classe de fluides non-newtoniens caractérisée par l'indice d'écoulement n favorisant le transfert thermique.

Wang et Zhang (1990) ont étudié la couche limite en convection mixte le long d'une plaque verticale chauffée de façon isotherme à la température T_w et limitant un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien à la température T_∞ . Sur la base du modèle de Darcy généralisé, les équations de la couche limite ont été résolues par les méthodes de similitude et des relations intégrales. On retient de cette investigation que lors d'un réchauffement du milieu poreux ($T_w > T_\infty$), le taux de transfert de chaleur augmente sensiblement pour un fluide à faible indice d'écoulement ($n \leq 1$) en régime de convection naturelle prédominant. Ainsi, la convection mixte en milieu poreux saturé est favorisée par le caractère pseudo-plastique du fluide non-newtonien. Dans le cas d'un refroidissement ($T_w < T_\infty$), le transfert de chaleur baisse considérablement lorsque l'indice d'écoulement diminue, dans un régime d'écoulement dominé par la convection forcée.

Le phénomène de convection thermique en milieu poreux isotrope saturé par un fluide non-newtonien à caractéristique rhéologique en loi de puissance a été étudié par *Shenoy (1993)*. A travers le modèle mathématique de Forchheimer-Darcy, cet auteur a étudié l'impact de la prise en compte des forces d'inertie sur la convection naturelle, la convection mixte et la convection forcée. Par la méthode des relations intégrales, il a été montré que le phénomène étudié dépend des paramètres que sont l'indice d'écoulement n du fluide et le nombre de Grashof Gr_k basé sur la perméabilité du fluide. Aussi, a-t-il été montré que la solution affine au problème considéré n'existe

que dans le cas d'une plaque verticale chauffée de façon isotherme et imbibée dans le milieu poreux. Il ressort de l'investigation que, en convection naturelle pure le transfert de chaleur s'intensifie avec une croissance des valeurs de l'indice n et du nombre de Grashof Gr_K . En convection forcée pure, le transfert de chaleur est indépendant de l'indice n du fluide et dépend uniquement du nombre de Péclet défini relativement à la vitesse de l'écoulement externe. Le résultat obtenu demeure le même aussi bien pour les fluides newtoniens que pour les fluides non-newtoniens. Enfin, en convection mixte, lorsque les régimes de convection naturelle et forcée co-dominent, le transfert de chaleur est favorisé par le caractère pseudo-plastique du fluide. L'extension du régime naturel au détriment du régime forcé engendre une croissance du transfert de chaleur indépendamment de la variation de l'indice n . En régime forcé dominant, le taux de transfert de chaleur est constant, tandis que lorsque prédomine la convection naturelle, pour $Gr_K < 100$, le taux de transfert de chaleur croît avec l'indice n .

La convection mixte le long d'une plaque verticale chauffée, adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien a été étudié par *Gorla et Kumari (1996)*. Il a été envisagé une distribution de température pariétale en loi puissance de la distance comptée sur la plaque à partir du bord d'attaque. Le fluide saturant le milieu poreux est à caractéristique rhéologique en loi de puissance de type *Ostwald-de-Waele*. Ces auteurs ont montré que le régime d'écoulement mixte peut être réparti successivement en un régime de convection naturelle pure précédant un régime de convection forcée pure. On retient de ces analyses que les fluides pseudo-plastiques ($n < 1$) favorisent le transfert de chaleur contrairement aux fluides dilatants ($n > 1$). Le transfert de chaleur est plus intense sur une surface à distribution non-uniforme de température au détriment d'une surface isotherme et, le taux de transfert de chaleur en convection forcée pure reste supérieur à celui obtenu en régime de

convection naturelle pure. Il a été observé que, lorsque le régime mixte prédomine, le taux de transfert de chaleur décroît en passant par un minimum obtenu avec un fluide dilatant ($n=2$), pour enfin croître et atteindre son maximum à un moment où l'écoulement est dominé par un régime de convection forcée pure.

Kumari et Gorla (1996) ont étudié la convection mixte le long d'une plaque verticale chauffée, adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien. La plaque est chauffée par un flux de chaleur non-uniforme, qui est une distribution en loi puissance de la distance comptée sur la plaque à partir du bord d'attaque. Le fluide saturant le milieu poreux est à caractéristique rhéologique en loi de puissance de type *Ostwald-de-Waele*. On retient de cette analyse que dans le cas d'un flux uniforme de chaleur, en régime de convection naturelle pure, le taux de transfert local de chaleur croît avec l'indice d'écoulement du fluide. Pour un flux de chaleur d'intensité croissante, le transfert de chaleur croît lorsque le régime de convection forcée pure devient prédominant et est favorisé par le caractère pseudo-plastique du fluide non-newtonien.

Yue-Tzu et Wang (1996) ont étudié la convection naturelle bidimensionnelle le long d'un solide à symétrie axiale, de forme géométrique variable et ayant une température uniforme à la surface. Ce corps solide est placé dans un milieu poreux saturé par un non-newtonien à caractéristique rhéologique en loi de puissance à seuil d'écoulement. Sur la base des approximations en régime de couche limite, les solutions affines au problème, pour des valeurs élevées du nombre de *Darcy-Rayleigh* modifié ont été obtenues par la méthode de Runge-Kutta. Il ressort de l'investigation que les champs d'écoulement et de température et le transfert de chaleur sont grandement influencés par l'indice d'écoulement et la contrainte seuil d'écoulement. Ainsi pour les fluides de caractéristique rhéologique à seuil

d'écoulement nul, l'épaisseur de la couche limite thermique (dynamique) devient de plus en plus importante lorsque l'indice d'écoulement décroît (croît). Le taux de transfert local de chaleur croît avec l'indice d'écoulement du fluide. Ce taux décroît en fonction de l'augmentation de la distance comptée sur la surface à partir du bord d'attaque du solide. Dans le cas d'un fluide de caractéristique rhéologique à seuil d'écoulement de plus en plus élevé, l'épaisseur de la couche limite thermique devient de plus en plus importante pour un fluide dont l'indice d'écoulement est de plus en plus faible. Pour la couche limite dynamique, la situation inverse est observée lorsque l'indice d'écoulement du fluide non-newtonien est supérieur à l'unité. Dans le cas d'un solide de forme conique, une nette croissance du flux de chaleur sur la surface est observée lorsque l'indice d'écoulement du fluide croît et pour une mesure d'angle au sommet du cône de plus en plus élevée.

Hady et coll. (1997) ont étudié l'effet de la résistance à la friction induite par la matrice solide d'un milieu poreux sur le transfert de chaleur en convection forcée le long d'une plaque horizontale. Cette dernière chauffée par le bas est adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien en écoulement forcé sur sa surface. Sur la base du modèle de Darcy, par un développement limité du terme de force de volume en fonction de la porosité du milieu poreux, l'influence sur l'écoulement convectif des termes de premier et de second ordre a été examinée. Il ressort de cette analyse qu'une augmentation du paramètre de résistance à la friction de premier ordre, occasionne une intensification du transfert thermique lorsque le fluide saturant le milieu poreux est pseudo-plastique ($n < 1$). Ainsi, pour $n = 0.5$, on observe une extension des champs d'écoulement et de température lorsque le paramètre de résistance de premier ordre croît. La friction locale due à la résistance opposée par la matrice solide croît avec la porosité du milieu poreux lorsque cet dernier est saturé par des fluides dilatants ($n > 1$).

Gorla et coll. (1998) ont étudié la couche limite en convection mixte le long d'une plaque horizontale chauffée par le bas et bordant un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien. Ce dernier est à caractéristique rhéologique en loi de puissance de type *Ostwald-de-Waele* et la distribution de température pariétale est une fonction en loi puissance de la distance comptée à partir du bord d'attaque de la plaque. Il a été montré que le régime d'écoulement mixte peut être réparti en un régime de convection naturelle pure succédant à un régime d'une convection forcée pure. Il résulte de leur investigation qu'avec un fluide pseudo-plastique ($n < 1$), les couches limites thermique et dynamique deviennent plus épaisses lorsque la convection naturelle pure devient prédominante. Lorsqu'on augmente la température de la paroi, l'écoulement le long de cette plaque s'intensifie à la faveur d'un fluide dilatant ($n > 1$) lorsque prédomine un régime de convection naturelle pure.

Gorla et Kumari (1999) ont étudié la couche limite en convection mixte le long d'une plaque verticale chauffée par un flux de chaleur, fonction puissance de la distance comptée sur la plaque à partir du bord d'attaque. Cette plaque est adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien de caractéristique rhéologique en loi de puissance de type *Ostwald-de-Waele*. Ces auteurs ont montré que le régime d'écoulement mixte est une succession d'un régime de convection forcée pure et d'un régime de convection libre pure. Il est observé une croissance de la couche limite lorsque le régime de convection libre pure devient prédominant. L'écoulement à l'interface plaque-milieu devient faible lorsque l'indice d'écoulement du fluide croît. Une augmentation du flux de chauffage de la plaque en régime de convection libre prédominant occasionne une augmentation du taux de transfert de chaleur pour un indice d'écoulement

fixé. Par conséquent, une croissance de l'indice d'écoulement fait baisser le transfert de chaleur.

El.Hakim (2001) a étudié l'influence de la dispersion thermique sur la couche limite en convection mixte le long d'une plaque verticale imperméable chauffée par un flux non-uniforme de chaleur. Cette plaque est adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien à caractéristique rhéologique en loi de puissance de type *Ostwald-de-Waele*. Sur la base du modèle de Darcy, et en tenant compte de la dispersion thermique, cet auteur a montré que pour une dispersion thermique de plus en plus grande, les champs d'écoulement et de température subissent une importante croissance pour un indice d'écoulement n donné. Il est à noter que, lorsque l'indice d'écoulement n décroît ($n < 1$), le taux de transfert de chaleur croît. Par conséquent, le caractère pseudo-plastique ($n < 1$) du fluide saturant le milieu poreux favorise le transfert thermique.

El.Hakim (2001) a étudié la couche limite en convection mixte le long d'une plaque verticale perméable, bordant un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien. La surface de la plaque est soumise à des flux non-uniformes de chaleur et de masse, et elle est perméable afin de tenir compte de l'aspiration ou de l'injection du fluide sur la paroi. En observant que le régime d'écoulement mixte peut être réparti successivement en un régime de convection naturelle pure précédant un régime de convection forcée pure, l'auteur a démontré que sur une plaque imperméable, chauffée par un flux uniforme de chaleur, le transfert de chaleur en régime de convection naturelle pure est accentué par le caractère pseudo-plastique ($n < 1$) du fluide. Suite à une forte succion du fluide sur la plaque, l'écoulement le long de cette dernière est ralenti pour des valeurs fixées de l'indice d'écoulement du fluide et de l'exposant dans la loi de puissance du flux. Par conséquent, comparativement au cas du flux uniforme de chaleur, le transfert de chaleur

est plus important lorsque la plaque est chauffée avec un flux de chaleur non-uniforme.

Shi-Chieh et coll. (2002), ont étudié la convection naturelle bidimensionnelle le long d'un corps solide à symétrie axiale, de forme géométrique simple. Le corps solide soumis à une température ou à un flux de chaleur non-uniforme sur la surface, est exposé à un flux de masse, et est perméable afin de favoriser la succion ou l'injection du fluide. Ce solide est placé dans un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien à caractéristique rhéologique en loi de puissance et à seuil d'écoulement. Les effets des paramètres tels que l'indice d'écoulement du fluide, l'injection et la succion du fluide sur la surface solide et l'influence du seuil d'écoulement du fluide sur les grandeurs d'intérêt ont été étudiés. Il ressort de cette analyse que le caractère pseudo-plastique ($n < 1$) du fluide favorise une croissance de l'épaisseur de la couche limite thermique sur une surface à forte succion et pour un fluide à seuil d'écoulement. La situation inverse favorisée par le caractère dilatant du fluide ($n > 1$), est observée dans le cas de la couche limite dynamique. Dans le cas d'un fluide à seuil d'écoulement nul, en écoulement sur une surface imperméable, l'épaisseur de la couche limite thermique (dynamique) devient de plus en plus faible (croît) lorsque l'indice d'écoulement croît sur une surface imperméable. L'augmentation de l'indice d'écoulement du fluide et une réduction simultanée de la succion sur la surface fait croître le taux de transfert de chaleur.

Le transfert de chaleur sur une plaque verticale imbibée dans un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien a été étudié par *Ibrahim et coll. (2005)*. Ces auteurs ont étudié l'effet sur le phénomène de convection, de la dispersion thermique, du rayonnement thermique, du phénomène de succion ou de l'injection du fluide sur la plaque. Il a été envisagé pour la perméabilité du milieu poreux le modèle en loi de puissance proposé par

Dharmadhikari et Kale (1985). Par une transformation affine, les équations de couche limite écrites sur la base du modèle de Darcy modifié (modèle de *Chenoy*) ont été résolues. Il a été montré qu'en l'absence de la dispersion thermique et du rayonnement thermique sur une plaque verticale imperméable, le transfert de chaleur croît avec l'indice d'écoulement du fluide non-newtonien. Pour une succion du fluide par la plaque, le transfert de chaleur baisse (augmente) sous l'effet du rayonnement thermique (avec la dispersion thermique). Par contre, dans le cas d'une injection du fluide sur la paroi, le transfert de chaleur augmente (diminue) avec l'accroissement de l'indice d'écoulement et du rayonnement thermique.

Ching-Yang (2006) a étudié le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle sur une plaque verticale bordant un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien. Cette dernière, perméable est soumise à des flux de chaleur et de masse variables. Cette plaque est adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien à caractéristique rhéologique en loi de puissance à seuil d'écoulement. Les résultats obtenus à l'issue de cette investigation indiquent que pour un seuil d'écoulement de plus en plus élevé, on observe une diminution des taux de transfert de chaleur et de masse. Par contre, la situation inverse est observée lorsque le fluide saturant le milieu poreux a un indice d'écoulement de plus en plus élevé.

1.2.4 Conclusion

De cette étude bibliographique, nous retenons que dans la plupart des travaux cités, la matrice solide du milieu poreux est considérée isotrope alors qu'en réalité elle est fortement anisotrope. Aussi, le fluide saturant le milieu poreux est-il en réalité non-newtonien et présente-t-il en écoulement des caractéristiques rhéologiques évoluant sous l'action des contraintes de cisaillement. La prise en compte de plus de réalisme physique de la matrice

solide du milieu poreux et du caractère plus complexe du fluide en écoulement dans cette matrice est aussi déterminante pour la modélisation.

Ces travaux effectués sur la convection naturelle en milieu poreux confiné ou non se rapportent à l'étude des mouvements thermoconvectifs en régime permanent. Ceci n'est qu'une hypothèse simplificatrice introduite pour approcher la réalité. En fait, la prise en compte des phénomènes d'instabilités liés au régime transitoire nous paraît aussi déterminante pour la modélisation du phénomène convectif.

Nous avons également dénombré très peu de travaux consacrés au phénomène de convection pénétrante en milieu poreux isotrope et confiné.

C'est pour les raisons venant d'être évoquées qu'il nous a été donné d'étudier, en guise d'applications variées du thème choisi,

- la convection naturelle en régime transitoire sur une plaque verticale bordant un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non-newtonien;
- la convection naturelle en régime de couche de limite le long d'une surface verticale adjacente à un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non-newtonien;
- la convection en régime affine de la convection pénétrante dans une enceinte cylindrique confinant un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide newtonien ;
- la convection en régime de couche limite de la convection pénétrante dans une enceinte cylindrique confinant un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide newtonien.

Chapitre 2

Problème physique étudié et lois de comportement du phénomène

2.1 Introduction

La résolution des problèmes énergétiques rencontrés couramment dans l'industrie et dans la vie impose une connaissance approfondie des lois de conservations relatives au transport des fluides. La recherche de l'optimisation énergétique a conduit à mieux comprendre les phénomènes thermoconvectifs dont le comportement fait appel à un ensemble de notions relatives à la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie des fluides en mouvement. Ces notions permettent en définitive de mesurer le taux de transfert de chaleur ou de l'énergie produite par l'écoulement des fluides.

Dans ce chapitre, nous avons montré le bien-fondé de l'étude et avons procédé à la description du phénomène physique. A partir des lois de conservation classique, le transfert de chaleur engendré par l'écoulement convectif d'un fluide à rhéologie simple ou complexe saturant la matrice solide d'un milieu poreux anisotrope est présenté. Dans cette optique il s'agit de :

- présenter les lois de comportement des fluides à rhéologie complexe,
- formuler mathématiquement les équations gouvernantes et leurs formes réduites sur la base des hypothèses simplificatrices.

2.2 Bien-fondé et définition du problème physique

La grande majorité des matériaux qui nous utilisons passe par un état fluide ou pâteux : matériaux du bâtiment, plâtre, matières plastiques, produits de l'agro-alimentaire, pâtes, suspensions, etc... Divers procédés sont utilisés dans le traitement industriel de ces matériaux. A l'étape actuelle des avancées scientifiques, les connaissances existantes sur lesquelles reposent la plupart des procédés de fabrication demeurent parcellaires. Cette absence de lois plus générales est sans doute liée à la diversité des particularités qui caractérisent

chaque domaine d'application. Cependant, ces différents procédés de traitement industriel des matériaux mettent en jeu des fluides complexes qui sont non-newtoniens. Ces fluides interviennent aussi dans la fabrication des produits de consommation dans l'industrie agro-alimentaire.

A titre d'exemple, nous présentons ici le procédé de la fabrication de gâteaux de consommation locale dénommé " ablo-yoki ". Cette denrée de consommation, constitue un exemple de produit obtenu par transfert de chaleur dans un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien. En effet, le manioc frais est épluché, lavé et râpé. La pâte obtenue est pressée légèrement afin d'être vidée partiellement de son lait d'amidon, puis passée à la cuisson. La pâte constituée de grains et de fibres de granulométrie variable constitue un exemple type de milieu poreux saturé par le lait d'amidon qui est un fluide non-newtonien. Au cours de la cuisson, il se produit une gélatinisation partielle de l'amidon et la déshydratation des grains. Le procédé de cuisson illustré par le four de cuisson dans lequel sont entreposés les morceaux de cette pâte protégée par des feuilles propres, est présenté à la figure 2.2 a).

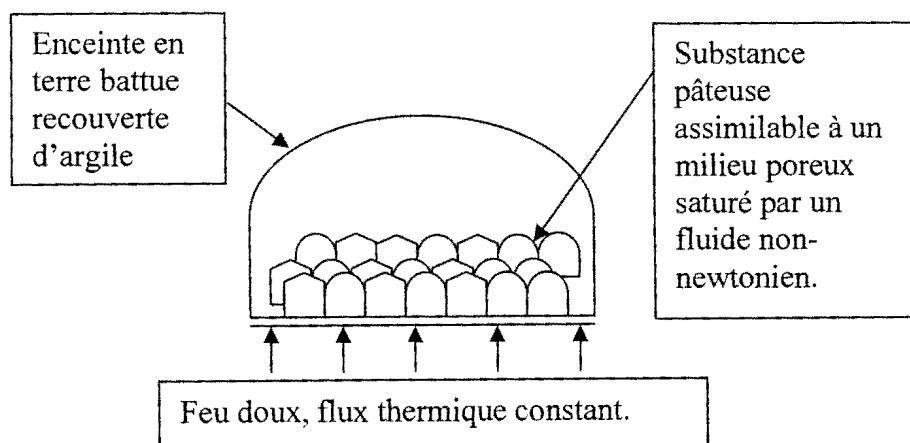


Figure 2.2a) Préparation artisanale de gâteau dénommée " ablo-yoki ".

C'est aussi le lieu de présenter brièvement le principe de la cuisson artisanale du pain. La farine de blé battue et pétrie avec des ingrédients au

besoin, est passée au four après fermentation. Cette pâte de farine de blé pétrie constitue également un milieu poreux saturé à travers lequel les courants convectifs vont assurer le transfert de chaleur. Le four de cuisson peut présenter divers aspects. Un exemple de four à chauffage par le côté est illustré à la figure 2.2 b).

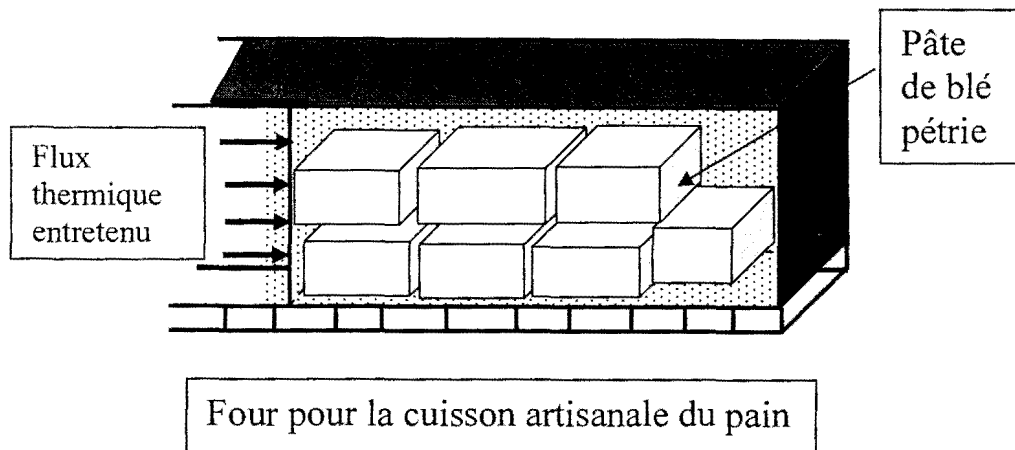


Figure 2.2 b) : Préparation artisanale du pain.

La fabrication des matériaux en céramique et en plastique, les produits cosmétiques dans l'industrie chimique, la fabrication des produits pharmaceutiques, l'utilisation des boues de forage (suspensions concentrées de particules solides) dans l'exploitation pétrolière, sont autant d'applications dans lesquelles interviennent des fluides non-newtoniens caractérisés par un comportement rhéologique complexe. Cette catégorie de fluides, commune à toutes ces applications, devrait susciter l'élaboration de modèles d'écoulement ou de lois plus générales sur l'écoulement. Malheureusement, il n'existe aucune étude qui intègre à la fois le comportement complexe de ces fluides en écoulement et l'anisotropie du milieu poreux et ce, en situation réelle de régime transitoire d'écoulement. En vue de modéliser l'écoulement de cette catégorie de fluides, il nous paraît important de mettre en évidence les caractéristiques propres aux différentes classes qui la constituent.

D'autres opérations telles que, le stockage des produits céréaliers dans les greniers en période post-récolte ou ordinairement dans les silos constituent aussi des situations d'intérêt qui mettent en jeu le transfert de chaleur en milieu poreux. Une illustration schématique présente à la figure 2.2c) un exemple de configuration de silo à céréales.

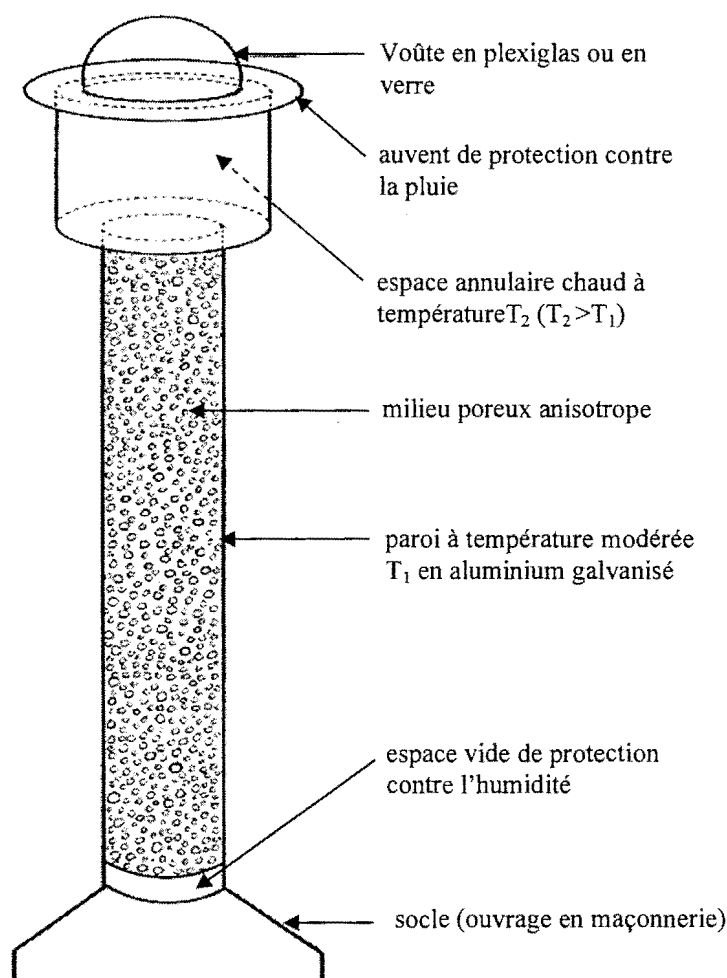


Figure 2.2c) : Schéma d'un silo à céréales conditionnés montrant le modèle physique étudié.

L'écoulement d'un fluide à travers de tels milieux assure leur conservation et permet de lutter contre la moisissure. C'est ainsi que, l'étude du phénomène de convection en milieu poreux confiné saturé a reçu de la part des chercheurs une grande attention ces dernières décennies.

La convection naturelle induite par la poussée d'Archimède et engendrée par des gradients de température en milieu poreux saturé, intervient de façon considérable, voire permanente dans plusieurs applications en ingénierie parmi lesquelles celles ci-dessus citées. Par exemple un fort gradient de température sur un produit pharmaceutique peut provoquer au niveau de ce dernier une dégradation, voire la perte de ses propriétés thérapeutiques. Il paraît donc important, de pouvoir mieux cerner les caractéristiques du phénomène de convection omniprésent dans les applications quotidiennes en ingénierie.

Généralement, le transfert de chaleur par convection se fait grâce au mouvement d'un fluide circulant au voisinage d'un corps solide dont la température est différente de celle du fluide. Il résulte que l'écoulement convectif est engendré par des différences de densité causées par des gradients thermiques au sein de celui-ci. Les différents modes de convection se distinguent par l'importance relative des forces qui mettent le fluide en mouvement. D'un point de vue phénoménologique, nous distinguons deux types de mouvements convectifs : la convection naturelle ou libre et la convection forcée. La convection naturelle est celle qui prend naissance lorsque le mouvement du fluide est dû uniquement à l'action du champ de pesanteur sur un fluide dont la température, et par suite la masse volumique sont variables d'un point à un autre. Dans le cas contraire, la convection est dite forcée pour caractériser l'effet d'une force extérieure causant la circulation du fluide. Une superposition de l'action de la poussée et de cette force extérieure donne naissance à la convection dite mixte.

La convection joue un rôle important dans de nombreux problèmes en physique. A cause de son importance en milieu poreux saturé par un fluide, beaucoup d'investigations théoriques et expérimentales lui ont été consacrées ces dernières décennies.

D'un point de vue physique, les mouvements convectifs dans une couche poreuse ont deux effets principaux. Premièrement, ils tendent à homogénéiser tout le volume du fluide dans lequel ils prennent naissance. Deuxièmement ils produisent une distribution de température in-situ non uniforme caractérisée par des zones chaudes et des zones froides. A cet effet, en milieu aquifère les mouvements convectifs contribuent par des effets homogénéisants à la diffusion des contaminants. En effet, à partir d'une source locale de pollution dans le milieu aquifère, les effets de la dispersion dus à la vitesse moyenne de l'écoulement et la convection due au gradient thermique tendent à disperser l'agent polluant à travers toute la couche poreuse et peuvent ainsi affecter les programmes d'adduction d'eau potable.

La convection naturelle est l'une des principales causes de sources d'eau chaude souterraine des régions géothermiques à hautes températures. Dans ce cas, il existe des cavités poreuses à extension verticale à travers lesquelles circulent l'eau et la vapeur.

Dans la plupart des situations physiques précédemment citées et dans lesquelles le phénomène de convection est omniprésent, le milieu poreux quoique homogène par hypothèse est fortement anisotrope. Aussi, le fluide saturant le milieu poreux est-il en réalité non-newtonien et présente-t-il en écoulement des caractéristiques rhéologiques évoluant sous l'action des contraintes de cisaillement. Cependant, dans la littérature, la plupart des travaux effectués sur la convection naturelle en milieu poreux confiné ou non se rapportent d'une part aux milieux poreux homogènes, isotropes saturés par un fluide newtonien. D'autre part, ces travaux dans leur grande majorité sont consacrés à l'étude des mouvements convectifs en régime permanent. Ce ne sont là que des hypothèses simplificatrices introduites pour approcher la réalité. En fait, la prise en compte de plus de réalisme physique de la matrice solide du milieu poreux et du caractère plus complexe du fluide en écoulement dans cette matrice est déterminante pour la modélisation du

phénomène convectif. Ce réalisme physique apparaît par exemple avec l'anisotropie qui est généralement la conséquence d'une orientation préférentielle des directions principales du milieu poreux ou de la géométrie asymétrique des grains et des fibres. Aussi la prise en compte des caractéristiques rhéologiques du fluide non-newtonien est-il nécessaire pour une bonne modélisation de l'écoulement. De plus, dans ce champ peu étendu des travaux relatifs à la convection naturelle en milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien, ceux qui ont été consacrés à l'étude des phénomènes d'instabilités liés au régime transitoire sont en nombre réduit. Pour les raisons venant d'être évoquées et faisant état de l'existence du phénomène de convection en milieu poreux saturé, le sujet suivant nous a été confié :

“Influence de l'anisotropie hydrodynamique sur les phénomènes thermoconvectifs dans les champs de sites poreux saturés par des fluides à rhéologie variée.”

L'objectif de la présente étude est d'apporter une contribution à travers un modèle mathématique élaboré, qui permettra de mieux appréhender les transferts convectifs dans les milieux poreux saturés. La présente étude aborde dans un premier temps l'écoulement convectif externe dans un milieu poreux saturé, en considérant le cas d'un fluide non-newtonien.

Dans un deuxième temps, le phénomène de convection pénétrante dans un puits de sable ou de strates rocheuses ou dans un silo à céréales de forme cylindrique confinant ainsi un milieu poreux saturé par un fluide newtonien sera examiné. A titre d'exemple, nous avons décrit le fonctionnement d'un silo à céréales en nous basant sur l'illustration schématique présentée à la figure 2.2c).

En effet, la configuration du silo à céréales illustrée à la figure 2.2c) montre quatre parties essentielles. La voûte en plexiglas est prolongée sur sa

périphérie par un auvent qui protège toute la partie inférieure du silo des effets de la pluie. Cette voûte capte en partie l'énergie rayonnante diurne qu'elle reçoit et la transmet dans l'espace annulaire dont elle constitue le toit. L'air emprisonné dans cet espace est ainsi réchauffé. Cet air chaud s'infiltré à travers les espaces vides situés entre les grains de céréales conditionnés confinés par l'enceinte cylindrique. La paroi de cette enceinte est à une température relativement plus basse que celle de l'air chauffé dans l'espace annulaire. L'écoulement d'air chaud à travers ce milieu poreux assure le transfert de chaleur et permet ainsi de lutter contre la moisissure. Un espace vide situé entre le socle servant de support à l'édifice et l'enceinte cylindrique permet d'isoler cette enceinte de toute humidité.

Dans les développements ultérieurs de ce sujet de recherche, il sera envisagé dans cette thèse deux essais scientifiques principaux relatifs aux mouvements thermoconvectifs bidimensionnels dans les milieux poreux saturés d'abord par un fluide non-newtonien et ensuite par un fluide newtonien.

- Le premier essai scientifique regroupe deux investigations menées en écoulement externe :

- 1) la première investigation conduite en régime transitoire, porte sur la caractérisation de phénomène convectif qui a lieu dans un milieu poreux hydrodynamiquement anisotrope saturé par un fluide non-newtonien et adjacent à une surface verticale soumise à des conditions thermiques variées.

- 2) La deuxième investigation porte sur le problème convectif en régime de couche limite au voisinage d'une surface verticale soumise aux mêmes conditions thermiques que celles envisagées dans la première investigation et bordant un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non-newtonien.

- Le deuxième essai réparti en deux études menées en écoulement confiné, présente :

1) les solutions affines au phénomène de convection pénétrant dans un puits vertical de forme cylindrique rempli de matériaux poreux hydrodynamiquement anisotropes.

2) les caractéristiques en régime de couche limite du même phénomène convectif siégeant dans les corps cylindriques verticaux de grande extension confinant un milieu poreux anisotrope et communiquant à leur extrémité supérieure à un grand réservoir.

Deux configurations géométriques servent dans cette thèse à la définition du problème physique relatif à l'étude des phénomènes convectifs naturels.

La première illustration montrée par la figure 2.3, présente une couche poreuse adjacente à une surface verticale chauffée. La deuxième illustration

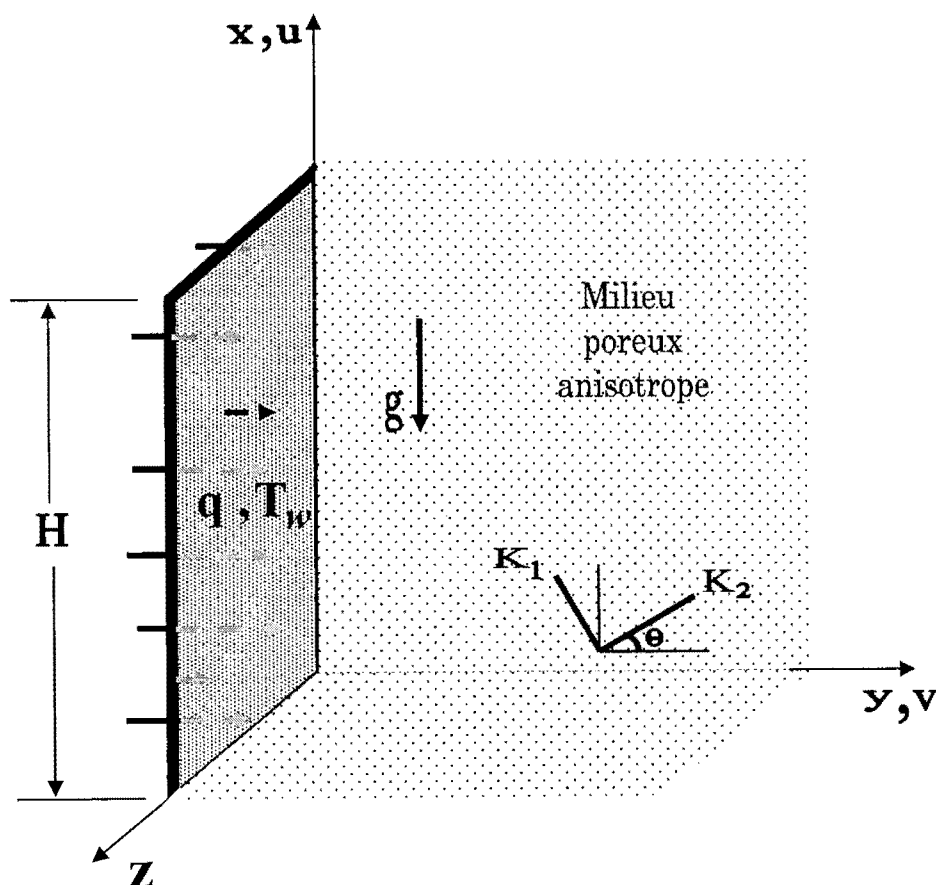


Figure 2.3 : Modèle physique et système d'axes de coordonnées

présentée à la figure 2.4 montre une cavité cylindrique verticale confinant un milieu poreux saturé et communiquant avec un grand réservoir.

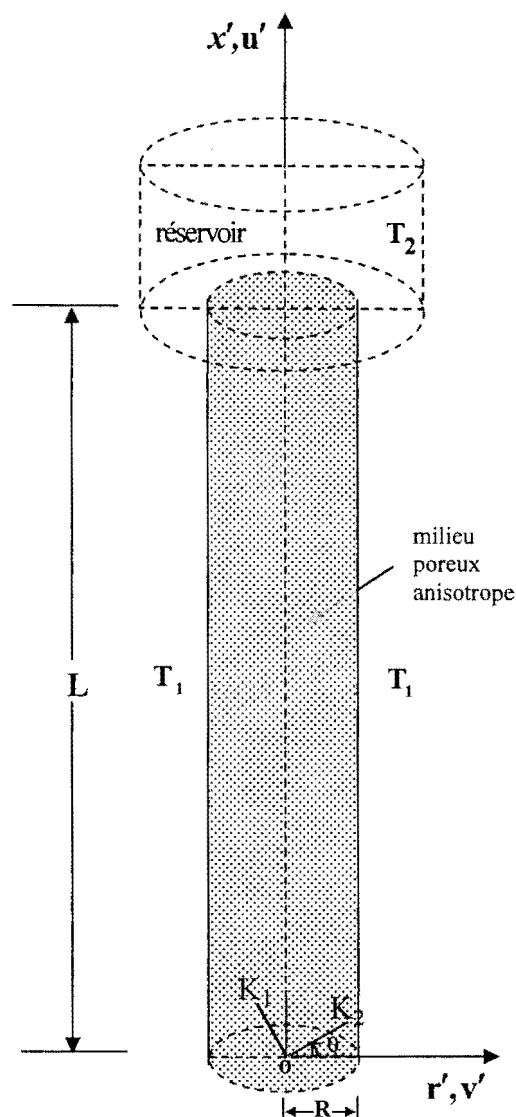


Figure 2.4 : Configuration géométrique du puits cylindrique et système d'axes de coordonnées.

2.3 Éléments de rhéologie

2.3.1 Comportement non-newtonien

Les fluides non-newtoniens font partie de la catégorie des fluides dits complexes. Les mousses, les émulsions, les suspensions diluées ou

concentrées de particules solides, certaines graisses, les polymères fondus, certaines peintures sont des exemples de fluides complexes que nous rencontrons quotidiennement. Les fluides non-newtoniens sont caractérisés par l'existence d'une taille mésoscopique entre la taille des molécules constitutives et la taille de l'échantillon. Cette échelle de taille est par exemple la taille des gouttes dans une émulsion ou la taille des bulles dans une mousse. L'existence de cette taille caractéristique entraîne un couplage entre la structure du fluide et l'écoulement. Ainsi, l'écoulement peut modifier la structure d'une émulsion ou d'une solution de polymère. La contrainte de cisaillement peut déformer les particules de polymère et allonger les chaînes de polymères dans le sens du champ de vitesse. Ce couplage entre la structure du fluide et l'écoulement est à l'origine d'effets non-linéaires. Ceci constitue l'un des comportements non-newtoniens essentiels. L'autre comportement non-newtonien non moins important est la viscoélasticité linéaire. Ce comportement est très fréquent dans les solutions de polymères et dans les polymères fondus. La réponse du fluide à une déformation présente à la fois un aspect visqueux (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation) et un aspect élastique (contrainte proportionnelle à la déformation). Dans les développements ultérieurs, nous allons considérer une situation générale d'écoulement de cisaillement simple. Ceci nous permettra de rapporter quelques lois de comportement rhéologique (*Midoux (1993)*) entrant dans la classification des fluides non-newtoniens au-delà de leur comportement viscoélastique.

2.3.2 Relations constitutives

La description du comportement des fluides en écoulement et leur interprétation en relation avec la structure microscopique du fluide constituent la discipline appelée *rhéologie*. Les propriétés rhéologiques d'un matériau

sont traduites par l'équation d'état du matériau qui relie les forces s'exerçant sur la surface d'un élément infinitésimal au mouvement de cet élément. La connaissance des propriétés rhéologiques des fluides permet l'élaboration des modèles décrivant leur comportement lors d'une étude analytique ou numérique.

Dans cette partie du développement, nous rapportons les modèles mathématiques les plus répandus pour caractériser le comportement en écoulement des principales classes des fluides non-newtoniens.

A l'opposition des études expérimentales qui s'attachent à mesurer les propriétés de l'écoulement des matériaux, les relations constitutives sont des approches théoriques qui relient les contraintes et les déformations.

Le cisaillement simple est un mode de déformation très utilisé en rhéologie expérimentale. Il est possible d'effectuer un classement rhéologique des matériaux à partir de leur comportement en cisaillement simple (*Midoux (1993)*).

Considérons dans une configuration générale d'écoulement laminaire d'un fluide en cisaillement simple (figure 2.5) deux plans (P) et (P') parallèles, distants de dx et les points A et B sur une droite orthogonale.

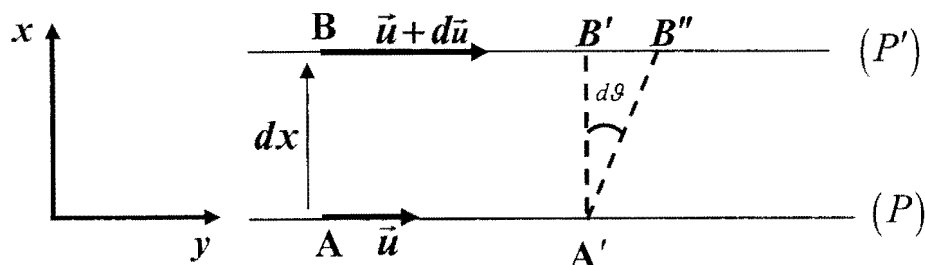


Figure 2.5) Configuration générale de l'écoulement en cisaillement simple des fluides non-newtoniens.

Les deux points animés des vitesses respectives u et $u+du$, parcourent entre les instant t et $t+dt$ les distances $AA' = udt$ et $BB' = (u+du)dt$. Une mesure de la déformation du milieu fluide est donnée par l'angle de cisaillement $d\vartheta$ tel que :

$$d\vartheta = \frac{B''B'}{A'B'} = \frac{du dt}{dx} \quad (2.1)$$

soit

$$\dot{\vartheta} = \frac{du}{dx} = \frac{d\vartheta}{dt} \quad (2.2)$$

où $\dot{\vartheta}$ est la vitesse de cisaillement .

Ainsi la loi de Newton, équation (1.2) permet d'écrire :

$$\hat{\lambda}_{xy} = \mu \dot{\vartheta} \quad (2.3)$$

Dans le cas d'un fluide newtonien ou parfaitement visqueux, μ est indépendante de la vitesse de cisaillement. Le diagramme reliant la contrainte de cisaillement $\hat{\lambda}_{xy}$ à la vitesse de cisaillement $\dot{\vartheta}$, appelé *courbe d'écoulement* est dans ce cas une droite (figure 2.6, courbe (1)).

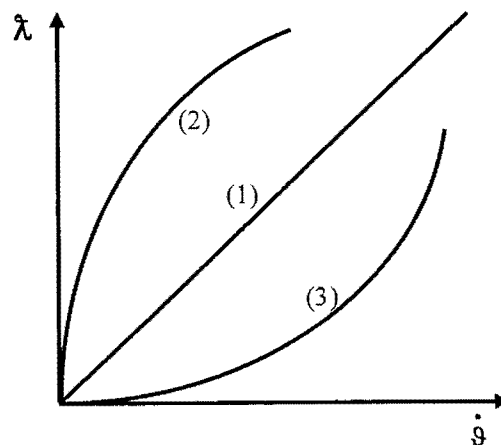


Figure 2.6: Rhéogrammes de fluides : (1) newtonien ; (2) rhéofluidifiant ; (3) rhéoépaississant.

Suivant les paramètres qui influent sur la courbe d'écoulement au delà de la viscoélasticité, nous distinguons deux catégories principales de fluides que sont les fluides dont le comportement est indépendant du temps et ceux dont le comportement dépend du temps.

2.3.2.1 Fluides au comportement indépendant du temps

Pour cette catégorie de fluides, la contrainte de cisaillement est proportionnelle à la vitesse de cisaillement:

$$\mu_a = \frac{\tau_{xy}}{\dot{\gamma}} \quad (2.4)$$

Le facteur de proportionnalité μ_a appelée *viscosité apparente* est une grandeur indépendante de la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$. Elle dépend des paramètres rhéologiques que sont l'indice d'écoulement n et l'indice de consistance $\dot{\eta}$ du fluide. Les fluides newtoniens constituent un cas particulier ($n=1$ et $\mu_a = \mu$) pour cette catégorie de fluides.

Il existe quatre types principaux de fluides indépendants du temps :

- Les fluides à contrainte :
 - Les fluides plastiques de type *Herschel-Bulkley* ;
 - les fluides plastiques de *Bingham*.
- Les fluides sans contrainte de type *Ostwald-de Waele* :
 - Les fluides pseudo-plastiques ou rhéofluidifiants ;
 - Les fluides dilatants ou rhéoépaississants.

2.3.2.1.1 Les fluides à contraintes critiques

Les fluides plastiques sont caractérisés en général par des courbes d'écoulement dont la loi de représentation est donnée par la relation d'*Herschel-Bulkley* qui s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \lambda - \lambda'_c = h (\dot{\gamma})^n & \lambda > \lambda'_c \\ \dot{\gamma} = 0 & \lambda < \lambda'_c \end{cases} \quad (2.5)$$

A partir d'une contrainte critique λ'_c la courbe d'écoulement (Figure 2.7) finit par devenir plus ou moins rectiligne. λ'_c représente le seuil minimal des contraintes à appliquer pour que le fluide commence à s'écouler.

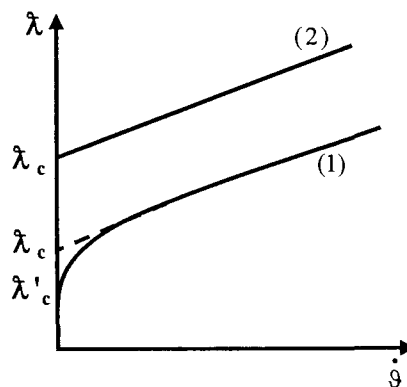


Figure 2.7 : Rhéogrammes de fluides à contraintes critiques : (1) fluide plastique ; (2) fluide plastique de Bingham.

En première approximation l'équation (2.5) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \lambda - \lambda_c = \mu_p \dot{\gamma} & \lambda > \lambda_c \\ \dot{\gamma} = 0 & \lambda < \lambda_c \end{cases} \quad (2.6)$$

Un fluide dont la loi de comportement est régie par l'équation (2.6) est dit fluide de *Bingham* lorsque la relation (2.6) est une bonne approximation du

comportement du fluide (*Midoux (1993)*). Les fluides dont les lois de comportement suivent fidèlement cette loi sont rares, mais beaucoup de fluides réels en sont justifiables par une très bonne approximation. Nous pouvons citer en exemple les suspensions de particules solides, les boues de forage, les peintures à huiles, les pâtes dentifrices, les margarines, certaines graisses, la pâte à papier.

Il existe d'autres lois de comportement relatives aux fluides à contraintes critiques. A cause de sa simplicité pour les calculs, la loi de comportement de type *Bingham* est la plus utilisée.

2.3.2.1.2 Les fluides sans contrainte critique

Les courbes respectivement numérotées (2) et (3) sur la figure 2.6, représentent respectivement les courbes d'écoulement des deux principales catégories de fluides sans contrainte critique : les fluides pseudo-plastiques et les fluides dilatants.

Ostwald (1925) a proposé pour représenter les courbes d'écoulement de ces fluides la relation dite loi de puissance *d'Ostwald-de Waele*:

$$\dot{\lambda} = \dot{\eta}^n \quad (2.7)$$

où n est l'indice d'écoulement du fluide et $\dot{\eta}$ la consistance du fluide. Il est à noter que les paramètres n et $\dot{\eta}$ n'ont aucune signification physique, et que n n'est vraiment pas constant sur une très large intervalle de $\dot{\eta}$ et de $\dot{\lambda}$. La relation (2.4) permet d'écrire pour ces fluides, l'expression de la viscosité apparente :

$$\mu_a = \dot{\eta} (\dot{\eta})^{(n-1)} \quad (2.8)$$

2.3.2.1.2.1 Les fluides pseudo-plastiques

Les fluides pseudo-plastiques ne présentent pas de contrainte critique d'écoulement. Ce sont des fluides caractérisés par un indice d'écoulement inférieur à l'unité ($n < 1$). Leur viscosité apparente (équation (2.8)) à peu près constante au début, décroît progressivement lorsque la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ augmente (puisque $n < 1$). Ce comportement rhéologique est dû, dans les suspensions de particules asymétriques de faibles masses moléculaires, à une orientation progressive avec la vitesse de cisaillement dans le sens de l'écoulement. A faible vitesse de cisaillement, les particules sont désordonnées ; et lorsque la vitesse de cisaillement augmente, elles s'orientent dans le sens de l'écoulement. La courbe d'écoulement ne devient linéaire que pour les grandes valeurs de la vitesse de cisaillement.

Les principaux fluides présentant un comportement pseudo-plastique sont : les polymères fondus, la mayonnaise, le savon, les suspensions de détergent, les colles, les pâtes à papier, certaines peintures.

2.3.2.1.2.2 Les fluides dilatants

Ce sont des fluides qui obéissent également à la loi de puissance, équation (2.7) pour laquelle l'indice d'écoulement est ici supérieur à l'unité ($n > 1$). Leur viscosité apparente croît avec la vitesse de cisaillement. Cette catégorie regroupe les suspensions de forte teneur en particules solides. Ce comportement rhéologique est dû au fait que, au repos, le volume libre entre les particules est minimal et ce volume libre est occupé par du liquide qui lubrifie le mouvement des particules. Au fur et à mesure que la vitesse de cisaillement croît, la structure solide devient de plus en plus lâche et le liquide est en défaut dans les lacunes. Aux frottements solide-liquide initiaux se substituent partiellement des frottements solide-solide qui accroissent

rapidement la viscosité apparente. On peut citer en exemple l'empois d'amidon, une solution de polyacrylamide, le latex (suspension de particules de polymère).

Il est à noter que la loi de puissance très utilisée est limitée à un petit domaine de variation de vitesses de cisaillement. Pour de grandes variations de la vitesse de cisaillement, elle s'avère inappropriée. Pour ces cas, d'autres lois plus complexes sont utilisées.

2.3.2.2 Les fluides visqueux au comportement dépendant du temps

Dans les différents cas de comportement précédemment énumérés, les modifications internes subies par le fluide interviennent de façon rapide de sorte que le temps n'est pas déterminant de façon apparente dans les équations d'écoulement. Par contre, si ces modifications sont suffisamment lentes, la viscosité apparente mesurée dépendra du temps. Lorsqu'il y a désorganisation de la structure d'un fluide par cisaillement, ce dernier est dit *thixotrope*. Dans le cas d'une réorganisation de structure, le fluide est dit *rhéopexe*.

2.3.2.2.1 Les fluides thixotropes

Les fluides thixotropes ont un comportement en écoulement dont les caractéristiques dépendent des traitements antérieurs. La viscosité dépend donc de la contrainte appliquée ou de la vitesse de déformation, mais aussi du temps (de la durée de cisaillement ou de repos par exemple). Ce phénomène est généralement lié à la désorganisation de la structure du fluide. C'est un phénomène réversible et, au repos la structure détruite par une déformation antérieure se reforme graduellement. La figure 2.8a) montre l'évolution de la courbe d'écoulement d'un fluide newtonien thixotrope suivant le temps de

repos t_R avant le commencement de l'expérience. Il est à noter que la thixotropie n'intervient pas en régime permanent.

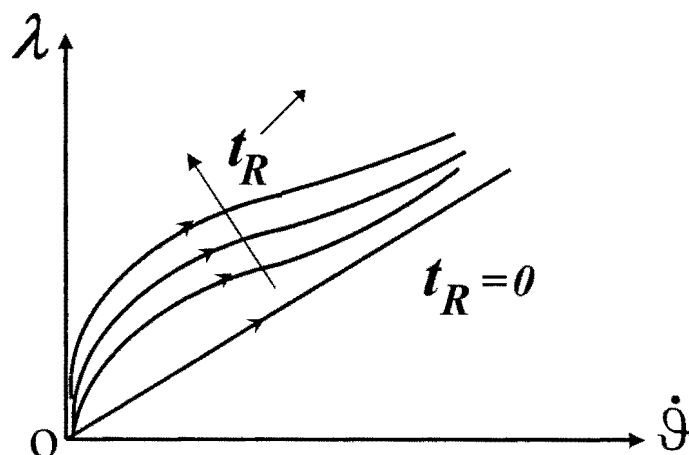


Figure 2.8a) Rhéogramme de fluide rhéopexe.

Comme exemple de fluides thixotropes nous pouvons citer les émulsions et les suspensions en général, de nombreux matériaux de l'industrie alimentaire, les boues de forage, certaines peintures.

Si la courbe d'écoulement est tracée en augmentant la vitesse de cisaillement

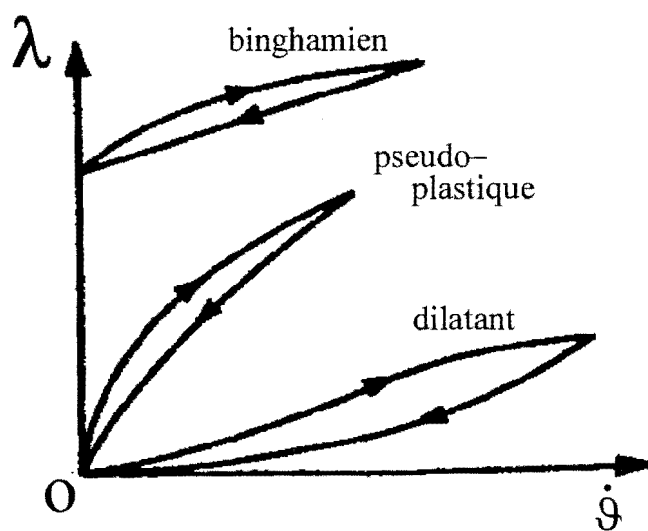


Figure 2.8b) Boucles d'hystérésis de différents types de fluides

puis en la diminuant, on obtient un cycle d'hystérèse représenté à la figure 2.8b). Expérimentalement on détermine une courbe de *montée* et une courbe de *retour à l'équilibre*.

2.3.2.2.2 Les fluides rhéopexes

La rhéopexie est un phénomène rare et extrêmement complexe. Pour certains fluides dits *rhéopexes*, un simple cisaillement est susceptible de favoriser la restructuration du fluide. Au-delà d'une valeur critique de vitesse de cisaillement, il y a désorganisation de la structure. Ce comportement est observé dans la solution aqueuse de gypse, la solution d'oléate d'ammonium et dans d'autres suspensions.

2.4 Lois physiques

2.4.1 Loi de l'écoulement en milieu poreux

2.4.1.1 Loi de Darcy

Dans le but de développer une représentation quantitative du comportement des fluides s'écoulant à travers un milieu poreux, il est nécessaire d'établir les principes physiques qui déterminent ce comportement. Ces principes sont fondamentalement identiques à ceux qui gouvernent le mouvement des fluides visqueux que régissent les équations de *Navier-Stokes* de l'hydrodynamique classique. Cette dernière impose sur la distribution de vitesse, dans tout système d'écoulement, la condition d'équilibre dynamique entre les forces inertielles et visqueuses, les forces massiques et la distribution interne de la pression du fluide. Malheureusement, malgré la simplification justifiable de négliger les forces inertielles dues aux faibles vitesses généralement caractéristiques de l'écoulement à travers le milieu poreux, les difficultés mathématiques pour appliquer ces équations sont encore grandes.

C'est dans la recherche de solution à ce problème que, *Darcy* en 1956 à l'issue de plusieurs expériences menées sur un modèle unidimensionnel en milieu poreux a abouti à une relation linéaire, simple, connue sous le nom de loi de Darcy et s'exprimant comme suit:

$$\vec{V} = - \frac{K}{\mu} \nabla p \quad (2.9)$$

où \vec{V} est la vitesse de filtration, μ la viscosité dynamique du fluide, ∇p le gradient de pression dans la direction de l'écoulement et K la perméabilité du milieu poreux considérée constante. Il est à noter que la loi de Darcy exprimée par l'équation (2.9) régit l'écoulement laminaire unidirectionnel des fluides homogènes en milieu poreux isotrope en perméabilité.

2.4.1.2 Loi de Darcy généralisée

2.4.1.2.1 Milieu poreux saturé par un fluide newtonien

L'équation (2.9) a été utilisée largement par de nombreux chercheurs pour des écoulements multidimensionnels. C'est dans le but de prendre en l'aspect anisotrope en perméabilité du milieu poreux que la loi de Darcy a été généralisée plus tard par *Bear* (1972). Ainsi, dans un milieu poreux homogène anisotrope en perméabilité et saturé par un fluide newtonien, la formulation généralisée de la loi de Darcy se présente sous la forme suivante (voir *Degan* (1997)):

$$\vec{V} = \overline{\overline{K}} \vec{J} \quad \text{avec} \quad \vec{J} = - \nabla \Lambda \quad (2.10)$$

où $\overline{\overline{K}}$ est le tenseur de perméabilité de second ordre et Λ la force potentielle spécifique.

De l'équation (2.10) on déduit les remarques suivantes:

- (i) le gradient de la force potentielle ∇A et la vitesse de filtration \vec{V} ne sont pas parallèles,
- (ii) il y a dans l'espace, trois axes orthogonaux le long desquels le gradient de la force potentielle et la vitesse de filtration ont la même direction; ces axes sont appelés *axes principaux* du tenseur de perméabilité.

En conséquence, les règles de l'analyse tensorielle classique s'appliquent à ce tenseur de perméabilité dont les propriétés dans un système de coordonnées cartésiennes permettent d'étudier le comportement des écoulements convectifs en milieu poreux anisotrope. Il est à mentionner qu'en milieu poreux, la loi de Darcy généralisée est limitée à des écoulements laminaires à faibles nombres de Reynolds Re basés sur le diamètre des pores ($Re < 1$). De plus, cette loi ne tient pas compte des effets de la diffusion visqueuse, et n'est donc pas valide à l'interface du milieu poreux avec un solide ou du milieu poreux avec une surface libre.

2.4.1.2 Milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien

Dans le modèle de Darcy, le fluide homogène saturant le milieu poreux est considéré newtonien. Cependant, la plupart des fluides rencontrés dans les applications en ingénierie sont des fluides non-newtoniens qui, présentent en écoulement un comportement plus complexe. Plusieurs résultats expérimentaux de l'étude rhéologique de ces fluides indiquent qu'en grande majorité ils obéissent à des modèles rhéologiques à caractéristiques en loi de puissance. C'est pour tenir compte de cette réalité physique que *Pascal (1983, 1986)* a adopté pour les écoulements bidimensionnels de vitesse \vec{V} la viscosité apparente μ_a dont le modèle se présente comme suit:

$$\mu_a = \varepsilon (\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2)^{(n-1)/2} \quad (2.11)$$

où

$$\varepsilon = \frac{2 \hbar}{8^{(n+1)/2} \left(\sqrt{K_1 K_2} \gamma \right)^{(n-1)/2} (1+3n)^n} \quad (2.12)$$

Dans les équations (2.11) et (2.12) u et v sont respectivement les composantes de la vitesse de filtration \vec{V} suivant les directions verticale et horizontale, n est l'indice d'écoulement qui, caractérise le comportement rhéologique du fluide non-newtonien; \hbar est l'indice de consistance du fluide; K_1 et K_2 sont les perméabilités le long des axes principaux du milieu poreux (voir *Degan et coll. (2007)*).

Dans le modèle mathématique de *Pascal* exprimé ci-dessus, les paramètres \hbar et n sont considérés non dépendants de la température. Ainsi, le modèle de Pascal de la loi de Darcy généralisée modifiée, régissant l'écoulement laminaire d'un fluide non-newtonien de caractéristique rhéologique en loi de puissance à travers un milieu poreux anisotrope en perméabilité s'écrit de la façon suivante (voir *Degan et coll. (2007)*):

$$\vec{V} = - \frac{\bar{\bar{K}}}{\mu_a} \nabla p \quad (2.13)$$

où μ_a la viscosité apparente est donnée par les relations (2.11) et (2.12).

2.5 Modèle mathématique

2.5.1 Hypothèses simplificatrices

Dans l'objectif de rendre moins ardue la résolution des équations gouvernantes traduisant les lois de comportement relatives à un phénomène physique, il est souvent commode de formuler des hypothèses simplificatrices. Ce travail préalable permet de négliger certaines grandeurs

physiques dont les variations compliqueraient ou rendraient impossible ce travail de modélisation.

Ainsi, dans la présente étude, la vitesse de circulation du fluide saturant la matrice solide est supposée faible et le nombre de Reynolds basé sur le diamètre moyen des grains est approximativement inférieur ou égal à l'unité. Nous considérons l'écoulement laminaire, le milieu poreux est homogène et le fluide saturant en équilibre thermodynamique local avec la matrice solide. Les écarts de température sont faibles de sorte que les propriétés thermophysiques du fluide peuvent être considérées constantes, donc indépendantes de la température à l'exception de la variation linéaire de densité dans le terme de la poussée d'Archimède (approximation de *Boussinesq*). De même, les effets de la dissipation visqueuse et du rayonnement thermique sont négligeables et aucune réaction chimique entre le fluide et la matrice solide n'est susceptible de générer des sources thermiques.

2.5.2 Equations gouvernantes

2.5.2.1 Formulation conservative

2.5.2.1.1 Equation de continuité

En considérant le milieu poreux comme un milieu basé sur le concept du volume élémentaire représentatif, le principe de la conservation de la masse permet d'établir l'équation de continuité, valable pour un fluide s'écoulant à travers les interstices moléculaires du milieu poreux. Cette équation s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial (\gamma\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{V}) = 0 \quad (2.14)$$

où $\partial(\gamma\rho)/\partial t$ désigne le taux d'accroissement du fluide dans le volume élémentaire et $\nabla \cdot (\rho\vec{V})$ représente le débit massique net du fluide à travers ce volume. Dans l'équation (2.14), la porosité γ , quantité adimensionnelle est indépendante du temps. Dans le cas où le fluide est incompressible ($\rho=\text{constante}$), l'équation (2.14) devient :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.15)$$

2.5.2.1.2 Equation de mouvement

Pour un milieu poreux anisotrope, la théorie quantitative de l'écoulement laminaire des fluides homogènes newtoniens est régie par la loi de Darcy généralisée (*Bear (1972)*) qui, en présence du champ gravitationnel terrestre s'écrit :

$$\vec{V} = - \frac{\overline{\overline{K}}}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g}) \quad (2.16)$$

où le tenseur de perméabilité $\overline{\overline{K}}$ s'exprime dans un système cartésien d'axes rotatifs autour de l'origine par la matrice symétrique suivante :

$$\overline{\overline{K}} = \begin{bmatrix} K_1 \cos^2 \theta + K_2 \sin^2 \theta & (K_1 - K_2) \cos \theta \sin \theta \\ (K_1 - K_2) \cos \theta \sin \theta & K_2 \cos^2 \theta + K_1 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

où K_1 et K_2 sont les perméabilités de la matrice solide respectivement dans les directions principales Ox et Oy et θ l'angle de rotation du système d'axes autour de l'origine O .

Conformément au modèle du fluide non-newtonien à caractéristique rhéologique en loi de puissance, la loi de Darcy généralisée, en suivant

l'approche de *Bear (1972)* et le modèle de *Pascal (1983, 1986)* s'écrit de la façon suivante (voir *Degan et coll. (2007)*):

$$\vec{V} = - \frac{\bar{K}}{\mu_a} (\nabla p + \rho \vec{g}) \quad (2.18)$$

où ρ est la densité du fluide, p sa pression, et \vec{g} l'accélération gravitationnelle.

2.5.2.1.3 Equation d'énergie

En négligeant dans le bilan énergétique les effets de la dissipation visqueuse, l'équation traduisant la conservation de l'énergie en milieu poreux anisotrope s'écrit (*Degan (1997)*):

$$(\rho c_p)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_f \nabla \cdot (\vec{V} T) = k \nabla^2 T \quad (2.19)$$

où k est la conductivité thermique du milieu poreux $(\rho c_p)_m$ est la capacité thermique totale du milieu poreux par unité de volume, $(\rho c_p)_f$ la capacité thermique totale du fluide par unité de volume et t le temps. Le terme $(\rho c_p)_f \nabla \cdot (\vec{V} T)$ est le taux de variation de l'énergie thermique due à la convection par unité de volume et le terme $k \nabla^2 T$ est relatif à la conduction par unité de volume. L'équation (2.19) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} T) = \alpha \nabla^2 T \quad (2.20)$$

où $\sigma = (\rho c_p)_m / (\rho c_p)_f$ désigne le rapport des capacités calorifiques et $\alpha = k / (\rho c_p)_f$ la diffusivité thermique du milieu poreux.

2.5.2.1.4 Equation d'état

A travers le terme de poussée intervenant dans l'équation de mouvement (2.16) l'écoulement est provoqué par le champ de densité généré par le champ de température. Le couplage des équations de mouvement (2.16) et d'énergie (2.20) est réalisé au moyen de l'équation d'état du fluide saturant. En admettant que ce dernier se comporte comme un gaz parfait et en négligeant l'influence de la pression dans l'équation différentielle d'état des gaz idéaux qui est réduite à :

$$d\rho = -\rho \beta dT \quad (2.21)$$

Nous obtenons dans la limite de $(T - T_\infty) \ll T_\infty$, l'équation suivante :

$$\rho = \rho_\infty [1 - \beta (T - T_\infty)] \quad (2.22)$$

L'indice "∞" est utilisé pour caractériser les grandeurs de l'écoulement loin du solide où siègent les mouvements thermoconvectifs, c'est-à-dire dans la zone du courant libre, à l'infini. L'équation (2.22) appelée *équation d'état* est valide lorsque les variations de densité $\Delta\rho$ sont très petites devant ρ_∞ à travers la région du milieu poreux où le fluide s'écoule et lorsque les variations de température $\Delta T = T - T_\infty$ sont insuffisantes pour provoquer des variations qualitatives des propriétés du milieu poreux autour de leurs valeurs moyennes.

2.5.2.2 Formulation en variables primitives

Suivant les composantes (u, v) de la vitesse de filtration \vec{V} dans le plan xoy illustré à la figure 2.9, les équations (2.15), (2.18) et (2.20) qui régissent le phénomène de convection en milieu poreux anisotrope en perméabilité, ont été formulées en variables primitives.

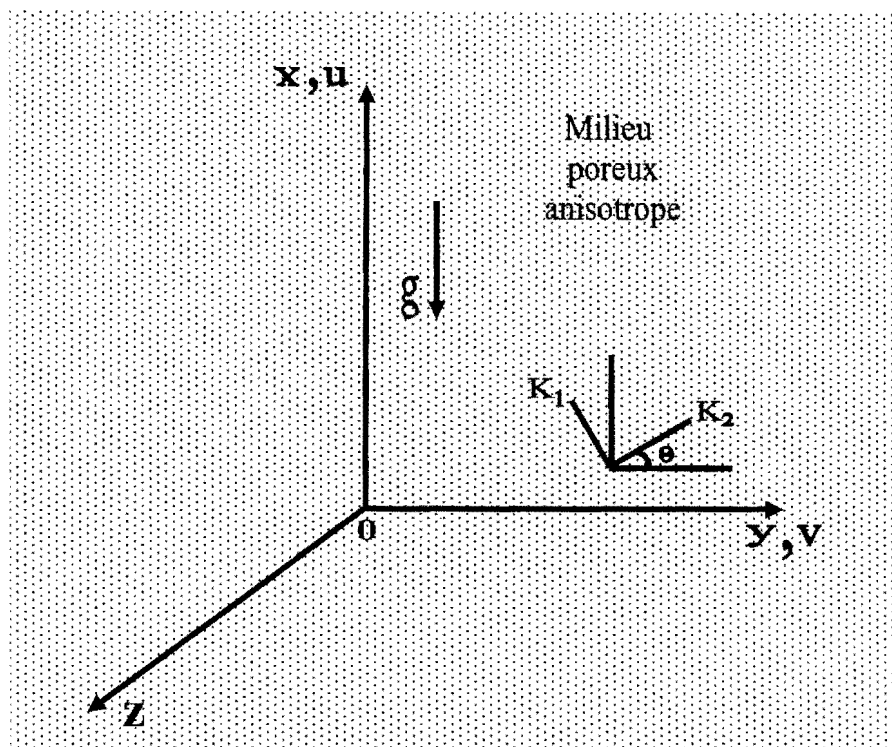


Figure 2.9 : Système d'axes de coordonnées.

2.5.2.2.1 Equation de continuité

Suivant le système d'axes de coordonnées adopté, l'équation de continuité (2.15) s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = 0 \quad (2.23)$$

2.5.2.2.2 Equation de mouvement

Dans un système bidimensionnel d'axes de coordonnées cartésiennes (Ox, Oy) tel qu'illustré en partie sur la figure 2.9, l'équation du mouvement (2.18) traduisant la loi de Darcy généralisée pour l'écoulement d'un fluide

non-newtonien en milieu poreux anisotrope s'écrit :respectivement dans les directions (Ox) et (Oy) par :

$$\mathbf{a} \mathbf{u} - \mathbf{c} \mathbf{v} = - \frac{\mathbf{K}_1}{\mu_a} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} + \rho \mathbf{g} \right) \quad (2.24a)$$

$$- \mathbf{c} \mathbf{u} + \mathbf{b} \mathbf{v} = - \frac{\mathbf{K}_1}{\mu_a} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} \right) \quad (2.24b)$$

En tenant compte de l'équation d'état (2.22), en éliminant le terme de pression et en prenant le rotationnel de cette grandeur, les équations (2.24a) et (2.24b) se réduisent à :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{c} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) - \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{1}{\mu_a} \left\{ \frac{\partial \mu_a}{\partial x} (-\mathbf{c} \mathbf{u} + \mathbf{b} \mathbf{v}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} (-\mathbf{a} \mathbf{u} + \mathbf{c} \mathbf{v}) + \mathbf{K}_1 \rho_\infty \beta \mathbf{g} \frac{\partial T}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

où :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= \cos^2 \theta + \mathbf{K}^* \sin^2 \theta \\ \mathbf{b} &= \sin^2 \theta + \mathbf{K}^* \cos^2 \theta \\ \mathbf{c} &= \frac{1}{2} (1 - \mathbf{K}^*) \sin 2\theta \\ \mathbf{K}^* &= \mathbf{K}_1 / \mathbf{K}_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Dans l'équation (2.25), β est le coefficient d'expansion thermique du fluide et T la température locale d'équilibre du fluide avec la matrice du milieu poreux.

2.5.2.2.3 Equation d'énergie

Suivant le système d'axes de coordonnées adopté, l'équation d'énergie (2.20) formulée en variables primitives s'écrit :

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.27)$$

2.5.3 Cas étudiés

Pour les applications ultérieures dans la présente thèse, deux variantes des équations gouvernantes seront considérées relativement aux systèmes de coordonnées adoptés dans le traitement respectif des problèmes d'écoulement en milieux poreux externe et confiné. Dans les chapitres 3 et 4 traitant de l'écoulement externe en convection naturelle le long d'une surface verticale, nous avons adopté un système de coordonnées cartésiennes dans lequel les équations gouvernantes du phénomène étudié sont les équations (2.23), (2.25) et (2.27).

Relativement à la configuration cylindrique du modèle physique étudié dans les chapitres 5 et 6 traitant de l'écoulement en milieu poreux confiné, nous avons adopté un système de coordonnées cylindriques. Le milieu poreux étant saturé dans ce cas par un fluide newtonien, les équations gouvernantes du phénomène sont les équations (2.15), (2.16) et (2.21) qui seront exprimées en cas opportun dans ce système de coordonnées et en régime d'écoulement permanent.

2.5.4 Conditions aux limites

▪ Conditions hydrodynamiques

Lorsque l'écoulement suit la loi de Darcy, seule une condition hydrodynamique peut être appliquée à une frontière solide, puisque l'équation

(2.16) ne comporte que des dérivées de premier ordre. Il en résulte que l'écoulement parallèle à la surface est libre de glisser. En d'autres termes, la condition d'adhérence à la surface n'est pas satisfaite.

▪ Conditions thermiques

En raison de la continuité de la température due à l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local stipulé entre le fluide et la matrice solide, le vecteur flux thermique, somme de deux termes convectif et conductif doit être aussi continu à travers le milieu poreux considéré également comme milieu continu. Par conséquent, à une frontière imperméable, les conditions thermiques classiques appropriées à l'environnement externe peuvent être appliquées. Il s'agira d'envisager comme conditions thermiques, soit une température, soit un flux de chaleur ou encore un coefficient de transfert thermique.

2.6 Transfert de chaleur

Le flux énergétique transféré localement à travers une paroi chaude ou froide est exprimée en terme de nombre de Nusselt local Nu_x défini par :

$$Nu_x = \frac{h x}{k} \quad (2.28)$$

où h est le coefficient local de transfert de chaleur à une distance x donnée comptée sur la plaque à partir du bord d'attaque. Le taux de transfert thermique total à travers cette plaque, exprimée par le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu}_{0-H} , est donné par :

$$\overline{Nu}_{0-H} = \overline{h}_{0-H} \frac{H}{k} \quad (2.29)$$

où \bar{h}_{0-H} est le coefficient moyen de transfert de chaleur par convection et H la hauteur de la plaque verticale.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations de base régissant la convection naturelle en milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non-newtonien ont été considérées.

Dans le chapitre suivant, il sera abordé l'étude en régime transitoire de la convection naturelle le long d'une paroi verticale bordant un milieu poreux anisotrope, saturé par un fluide non-newtonien et soumise à des conditions thermiques variées.

Chapitre 3

Etude en régime transitoire de la convection naturelle au voisinage d'une plaque verticale bordant un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non- newtonien

3.1 Introduction

A travers ce chapitre, une procédure analytique va être menée pour rechercher la solution du problème en régime transitoire de convection le long d'une plaque verticale bordant un milieu poreux. Ce dernier est anisotrope en perméabilité avec des axes principaux de perméabilité orientés arbitrairement par rapport au champ gravitationnel. Le milieu poreux est saturé par un fluide non-newtonien à caractéristique rhéologique en loi de puissance. Dans la limite des nombres de Darcy-Rayleigh de valeurs élevées, les équations de la couche limite sont résolues analytiquement. Cette résolution est précédée d'une analyse d'échelle qui permettra de prédire les ordres de grandeur requis pour les paramètres d'intérêt en régime de couche limite. Les effets des paramètres de contrôle sur le taux de transfert de chaleur local sont analysés. La solution analytique à ce problème sera validée en situation isotrope dans le cas d'un milieu poreux saturé par un fluide newtonien.

3.2 Présentation du système physique et du modèle mathématique

3.2.1 Présentation du système physique

Le système physique est illustré à la figure 3.1. Une surface verticale de hauteur H limite un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien. Ce dernier est à caractéristique rhéologique en loi de puissance de type *Oswald-de-Waele*. Les axes de coordonnées x et y sont respectivement orientés suivant les directions verticale et horizontale, conformément aux annotations de la figure 3.1 ci-dessous.

Le milieu poreux est anisotrope en perméabilité avec des axes principaux de perméabilité respective K_1 et K_2 non-coïncidants avec la gravité terrestre. L'anisotropie du milieu poreux est caractérisée par le rapport

d'anisotropie $K^* = K_1/K_2$ et l'angle θ que fait l'axe horizontal avec l'axe principal de perméabilité K_2 .

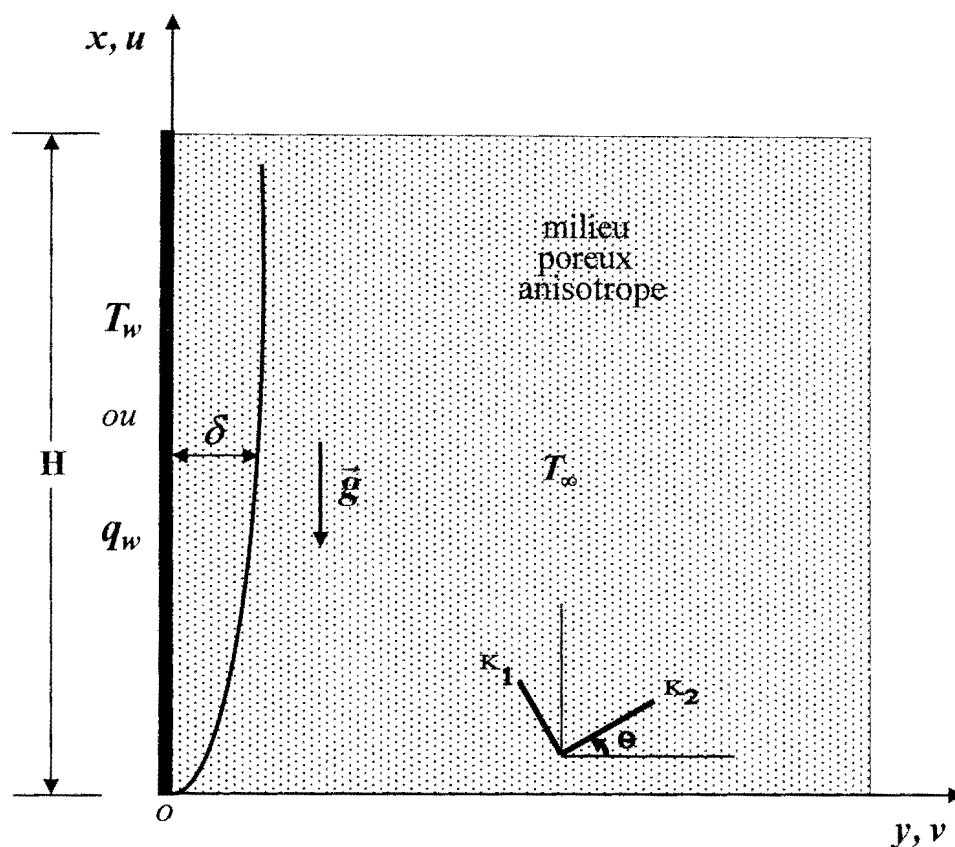


Figure 3.1 : Modèle physique et système d'axes de coordonnées.

La surface verticale est envisagée chauffée soit par un flux uniforme de chaleur q_w , soit maintenue isotherme à la température T_w conformément aux annotations de la figure 3.1. La pression et la température dans le milieu sont telles que le fluide non-newtonien demeure en phase liquide.

3.2.2 Modèle mathématique

3.2.2.1 Existence de la couche limite

Au cours du temps, les mouvements thermoconvectifs se développent le long de la surface où prédomine un fort gradient thermique. Pour cette

raison, nous considérons la convection en régime de couche limite le long de cette surface. Pour ce régime, le mouvement du fluide est restreint à une mince couche le long de cette surface verticale disposée suivant l'axe Ox orientée verticalement, l'axe Oy étant dirigé horizontalement. Ainsi donc, en première approximation nous pouvons observer que dans la région d'étude de la surface ($\delta \times H$) $x \gg y$ et donc $\partial^2/\partial x^2 \ll \partial^2/\partial y^2$. Par conséquent en retournant à l'équation de mouvement (2.25), le régime de couche limite n'est possible que si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$a \frac{\partial u}{\partial y} \gg c \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.1)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial y} \gg c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial y} \gg b \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.3)$$

$$K_1 \rho_\infty \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial \mu_a}{\partial x} (-c u + b v) \quad (3.4)$$

$$K_1 \rho_\infty \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial \mu_a}{\partial y} (-a u + c v) \quad (3.5)$$

En conséquence, dans la région de la couche limite, en tenant compte de l'équation (2.11), l'équation de mouvement (2.25) et l'équation d'énergie (2.27) se simplifient pour s'écrire respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial y}(u^n) = \frac{n}{a} \frac{K_1 \rho_\infty g \beta}{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.6)$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.7)$$

3.2.2.2 Condition initiale

Au début du chauffage de la surface verticale, la distribution de la température est nulle à l'instant $t=0$ et nous pouvons écrire la condition suivante :

$$t = 0 : \quad T(x, y, 0) = 0 \quad (3.8)$$

3.2.2.3 Conditions aux limites

En nous référant au système de coordonnées présenté à la figure 3.1, les conditions aux limites du problème étudié sont les suivantes:

1) Sur la surface verticale ($y=0$)

Condition hydrodynamique :

Sous l'effet du gradient de température, il naît un écoulement unidimensionnel le long de la surface verticale. Il convient donc d'écrire comme condition hydrodynamique le long de cette surface ce qui suit :

$$y = 0 : \quad v = 0 \quad (3.9a)$$

Condition thermique :

- Lorsque la surface est maintenue à la température constante T_w , la condition thermique s'écrit :

$$y = 0 : \quad T(x, y, 0) = T_w \quad (3.9b)$$

- Dans le cas où cette surface est soumise à un flux de chaleur constant q_w la condition thermique devient :

$$y=0 : \quad \frac{\partial T(x,0,t)}{\partial t} = -\frac{q_w}{k} \quad (3.9c)$$

2) Dans la zone de courant libre, loin de la surface ($y \rightarrow \infty$)

Condition hydrodynamique :

Loin de la surface verticale, la vitesse d'écoulement est celle de l'écoulement libre qui est développée dans la direction horizontale, soit:

$$y \rightarrow \infty : \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.10a)$$

Condition thermique :

Dans le courant libre, loin de la surface verticale le fluide est à la température T_∞ , la condition thermique s'écrit donc:

$$y \rightarrow \infty : \quad T(x,\infty,t) = T_\infty \quad (3.10b)$$

3.3 Analyse d'échelle

Soit δ l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite le long de la surface verticale. Dans la région de largeur δ et de longueur H sur la figure 3.1, nous identifions respectivement pour x et y les échelles suivantes:

$$x \sim H \quad , \quad y \sim \delta \quad (3.11)$$

Dans la région ($\delta \times H$), les équations gouvernantes (2.23), (3.6), et (3.7) requièrent les équivalences suivantes:

$$\frac{\mathbf{u}}{H} \sim \frac{\mathbf{v}}{\delta} \quad (3.12)$$

$$a \frac{u}{\delta} \sim \frac{1}{\varepsilon u^{n-1}} K_1 \rho_\infty g \beta \frac{\Delta T}{\delta} \quad (3.13)$$

$$u \frac{\Delta T}{H}, v \frac{\Delta T}{\delta} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta} \quad (3.14)$$

où ΔT est l'échelle de température qui dépend des conditions thermiques appliquées aux frontières de la surface. Lorsque la surface est chauffée à température constante T_w , nous avons $\Delta T (= T_w - T_\infty)$, tandis que, lorsqu'un flux de chaleur uniforme q_w (par unité d'aire) est spécifié sur la surface verticale, $\Delta T \sim q_w \delta / k$. Donc, nous notons que la variation de température à travers la couche limite est de l'ordre de l'unité c'est-à-dire $\Delta T = O(1)$. Dans les paragraphes suivants, nous ferons cas de deux séries de résultats d'analyse d'échelle correspondant aux deux types de chauffage imposés sur la surface verticale.

3.3.1 Surface chauffée isothermiquement

En exploitant les équivalences entre les relations (3.12), (3.13) et (3.14), nous obtenons pour δ , u , v et t les résultats suivants:

$$\delta \sim H Ra_H^{-1/(2n)} a^{1/(2n)} \quad (3.15)$$

$$u \sim \frac{\alpha}{H} Ra_H^{(1/n)} a^{(-1/n)} \quad (3.16)$$

$$v \sim \frac{\alpha}{H} Ra_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (3.17)$$

$$t \sim \frac{\sigma H^2}{\alpha} Ra_H^{-1/n} a^{1/n} \quad (3.18)$$

où le nombre de Darcy-Rayleigh modifié Ra_H , basé sur la hauteur de la plaque est défini comme suit:

$$Ra_H = \frac{K_1 \rho g \beta \Delta T H^n}{\varepsilon \alpha^n} \quad (3.19)$$

La fonction de courant ψ liée aux composantes de la vitesse de filtration est définie telle que :

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \mathbf{v} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.20)$$

Les relations (3.20) rendent automatiquement satisfaite l'équation de continuité (2.23). Tenant compte des résultats précédents, nous obtenons pour la fonction de courant l'ordre de grandeur suivant:

$$\psi \sim \alpha Ra_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (3.21)$$

Le nombre de Nusselt local Nu_H , défini comme étant le quotient de chaleur transférée par celle traversant la surface chauffée par conduction pure a pour ordre de grandeur:

$$Nu_H = \frac{hH}{k} \sim Ra_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (3.22)$$

où $h = q / (T_w - T_\infty)$ est le coefficient local de transfert de chaleur, avec $q = -k / (\partial T / \partial y)|_{y=0}$ définissant le flux local de chaleur sur la surface.

Dans le cas particulier où le milieu poreux est isotrope ($K^* = 1$, c'est-à-dire ($a = 1$), les ordres de grandeur précédents se réduisent pour donner des expressions analogues à ceux prédits par *Rastogi et Poulikakos (1995)*,

lorsque ces derniers ont étudié le régime de couche limite le long d'une plaque verticale baignant dans un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien.

Discutons maintenant des conditions de validité de la présente analyse du régime de couche limite. Les résultats de l'analyse d'échelle qui prédisent les ordres de grandeur des paramètres d'intérêt ne sont valides que lorsque la condition de départ ($\delta \ll H$), est satisfaite, c'est-à-dire $Ra_H \gg a$. En outre, en exploitant les relations (3.15)-(3.17), les expressions (3.1)-(3.5) faisant état de la condition d'existence du régime de couche limite se réduisent aux deux conditions ci-après :

$$\mathbf{b} \ll \mathbf{Ra}_H^{1/n} \mathbf{a}^{(n-1)/n} \quad (3.23)$$

et

$$\mathbf{c} \ll \mathbf{Ra}_H^{1/(2n)} \mathbf{a}^{(2n-1)/(2n)} \quad (3.24)$$

qui doivent être satisfaites.

3.3.2 Surface chauffée par un flux de chaleur uniforme

En recherchant les équivalences entre les différents termes d'intérêt à partir des équations (3.12) à (3.14) et en utilisant les mêmes procédures de calcul, nous obtenons les résultats suivants dans le cas où la plaque est chauffée par un flux uniforme de chaleur:

$$\delta \sim \mathbf{H} \mathbf{Ra}_H^{-1/(2n)} \mathbf{a}^{1/(2n)} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{u} \sim \frac{\alpha}{\mathbf{H}} \mathbf{Ra}_H^{1/n} \mathbf{a}^{-1/n} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{v} \sim \frac{\alpha}{\mathbf{H}} \mathbf{Ra}_H^{1/(2n)} \mathbf{a}^{-1/(2n)} \quad (3.27)$$

$$\Delta T \sim \frac{q_w H}{k} R_H^{-1/(2n+1)} a^{1/(2n+1)} \quad (3.28)$$

$$t \sim \frac{\sigma H^2}{\alpha} R_H^{-2/(2n+1)} a^{2/(2n+1)} \quad (3.29)$$

De même, à partir des équations (3.20) et (2.28) définissant respectivement la fonction de courant ψ et le nombre de Nusselt Nu_H , et en faisant usage des résultats de l'analyse d'échelle (3.25)-(3.28), nous obtenons les résultats d'équivalence suivantes :

$$\psi \sim \alpha R_H^{1/(2n+1)} a^{-1/(2n+1)} \quad (3.30)$$

$$Nu_H \sim R_H^{1/(2n+1)} a^{-1/(2n+1)} \quad (3.31)$$

Dans les résultats de balance des ordres de grandeur précédents, R_H le nombre de Darcy-Raleigh modifié, basé sur le flux thermique imposé sur la surface verticale q_w est défini comme suit:

$$R_H = \frac{K_1 \rho_\infty g \beta H^{n+1} q_w}{\varepsilon \alpha^n k} \quad (3.32)$$

Il résulte des résultats d'analyse d'échelle obtenus ici pour le cas du chauffage spécifié sur la surface verticale que, la condition d'existence de la couche limite verticale formulée dans l'hypothèse par $\delta \ll H$ devient $R_H \gg a$. De plus, en utilisant les approximations d'ordre de grandeur (3.25)-(3.28), le régime de couche limite n'est obtenu que lorsque les conditions suivantes :

$$b \ll R_H^{2/(2n+1)} a^{(2n-1)/(2n+1)} \quad (3.33)$$

et

$$c \ll R_H^{1/(2n+1)} a^{(2n-1)/(2n+1)} \quad (3.34)$$

sont simultanément satisfaites.

3.4 Résolution du problème physique

3.4.1 Adimensionnalisation des équations

Pour caractériser et interpréter physiquement les écoulements thermoconvectifs, il est utile de procéder à l'adimensionnalisation des équations gouvernantes. Nous ferons ici cas de deux séries de facteurs d'échelle de normalisation à utiliser pour les grandeurs d'intérêt. Chaque série de facteurs d'échelle est relative au type de chauffage appliqué sur la surface verticale. Ces facteurs de normalisation sont exprimés à partir des résultats de l'analyse d'échelle antérieure comme suit:

- **Surface chauffée isothermiquement**

- H : hauteur caractéristique de la surface verticale;
- $H / Ra_H^{1/(2n)}$: épaisseur caractéristique de la couche limite;
- $\alpha Ra_H^{(1/n)} / H$: facteur d'échelle pour la composante v de la vitesse de filtration;
- $\alpha Ra_H^{(1/2n)} / H$: facteur d'échelle pour la composante u de la vitesse de filtration;
- ΔT : facteur d'échelle pour la température;
- $\sigma H^2 / (\alpha Ra_H^{1/n})$: facteur d'échelle pour le temps;
- α : facteur d'échelle pour la fonction de courant.

- **Surface chauffée avec un flux de chaleur constant**

- H : hauteur caractéristique de la surface verticale;
- $H / Ra_H^{1/(2n+1)}$: épaisseur caractéristique de la couche limite;
- $\alpha Ra_H^{2/(2n+1)} / H$: facteur d'échelle pour la composante u de la vitesse de filtration;
- $\alpha Ra_H^{(1/2n)} / H$: facteur d'échelle pour la composante v de la vitesse de filtration;
- ΔT : facteur d'échelle pour la température;
- $\sigma H^2 / \alpha Ra_H^{2/(2n+1)}$: facteur d'échelle pour le temps;
- α : facteur d'échelle pour la fonction de courant.

Il résulte de ces facteurs de normalisation que les variables adimensionnelles sont les suivantes:

3) **Surface chauffée isothermiquement**

$$\left. \begin{aligned}
 X &= \frac{x}{H} & Y &= \frac{y (Ra_H^{1/(2n)})}{H} & \tau &= \frac{t (\alpha Ra_H^{1/n})}{\sigma H^2} \\
 U &= \frac{u H}{\alpha Ra_H^{1/n}} & V &= \frac{v H}{\alpha Ra_H^{1/(2n)}} & \Theta &= \frac{T - T_\infty}{\Delta T} \\
 \Psi &= \frac{\Psi}{\alpha} & \Delta T &= T_w - T_\infty
 \end{aligned} \right\} (3.35)$$

4) Surface chauffée par un flux de chaleur uniforme

$$\left. \begin{aligned}
 X &= \frac{x}{H} & Y &= \frac{y (R_H)^{1/(2n+1)}}{H} & \tau &= \frac{t(\alpha R_H)^{2/(2n+1)}}{\sigma H^2} \\
 U &= \frac{uH}{\alpha R_H^{2/(2n+1)}} & V &= \frac{vH}{\alpha R_H^{1/(2n+1)}} & \Theta &= \frac{T - T_\infty}{\Delta T} \\
 \Psi &= \frac{\Psi}{\alpha} & \Delta T &= \frac{q_w AH}{k}
 \end{aligned} \right\} (3.36)$$

où $A = \delta/H$ est le rapport de forme de la couche limite. En introduisant les variables adimensionnelles exprimées dans l'un ou l'autre des systèmes (3.35) ou (3.36) dans les équations gouvernantes (2.23), (3.6) et 3.7), nous obtenons les équations gouvernantes suivantes formulées en variables adimensionnelles :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} (U^n) = \frac{n}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \quad (3.39)$$

Pour un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$, c'est-à-dire $a = 1$) saturé par un fluide newtonien ($n = 1$), les équations adimensionnelles (3.37), (3.38), et (3.39) soumises aux conditions aux limites (3.9) et (3.10) et à la condition initiale (3.8) se réduisent identiquement aux équations qui ont été résolues par le passé par *Cheng et Pop (1984)* d'une part et *Ene et Polisevki (1987)* d'autre part. La méthode de recherche de la solution au problème étudié ici sera la méthode des relations intégrales développée par *Karman-Polhausen* qui est une méthode classique.

Les conditions aux limites adimensionnelles à considérer pour résoudre le système aux équations aux dérivées partielles formé par les équations sans dimension (3.37)-(3.39) sont les suivantes :

a) Surface isotherme

$$\begin{aligned} Y = 0: & \quad V = 0; & \quad \Theta(X, 0, \tau) = 1 & \quad (a,b) \\ Y \rightarrow \infty: & \quad U = 0; & \quad \Theta(X, Y, \tau) = 0 & \quad (c,d) \end{aligned} \quad (3.40)$$

b) Surface chauffée par un flux de chaleur constant

$$\begin{aligned} Y = 0: & \quad V = 0; & \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y}(X, 0, \tau) = -1 & \quad (a,b) \\ Y \rightarrow \infty: & \quad U = 0; & \quad \Theta(X, Y, 0) = 0 & \quad (c,d) \end{aligned} \quad (3.41)$$

La condition initiale (3.8) au problème à résoudre, en variables adimensionnelles devient :

$$\tau = 0: \quad \Theta(X, Y, 0) = 0 \quad (3.42)$$

En intégrant l'équation de mouvement (3.38) par rapport à Y entre les valeurs aux limites prises par cette variable, il vient que :

$$U = \left(\frac{n \Theta}{a} \right)^{1/n} \quad (3.43)$$

Dans la situation où le fluide saturant est newtonien ($n=1$) et le milieu poreux est isotrope ($K^*=1$, c'est-à-dire $a=1$), nous remarquons que l'équation (3.43) indique que la composante verticale de la vitesse et la température à l'intérieur de la couche limite sont du même ordre de grandeur et sont donc proportionnelles. De même, la composante verticale de la vitesse et la température varient de façon analogue. En particulier, si la surface

verticale est chauffée de façon isotherme, la composante verticale de la vitesse est constante puisque la température l'est aussi.

En utilisant l'équation de continuité (3.37), l'intégration de l'équation d'énergie (3.39) donne:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\infty} \Theta \, dY + \frac{\partial}{\partial X} \int_0^{\infty} U \Theta \, dY = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{Y=\infty} - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{Y=0} \quad (3.44)$$

Puisque le courant libre est immobile à l'extérieur de la couche limite loin de la surface verticale, alors nous avons $(\partial \Theta / \partial Y)|_{Y=\infty} = 0$. Nous obtenons ainsi l'équation suivante:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\infty} \Theta \, dY + \frac{\partial}{\partial X} \int_0^{\infty} U \Theta \, dY = - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{Y=0} \quad (3.45)$$

Substituant l'expression (3.43) dans l'équation (3.45), nous obtenons après réarrangement des termes ce qui suit :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\infty} \Theta \, dY + \left(\frac{n}{a} \right)^{1/n} \frac{\partial}{\partial X} \int_0^{\infty} \Theta^{(n+1)/n} \, dY = - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{Y=0} \quad (3.46)$$

Le problème de la convection naturelle en régime transitoire dans un milieu poreux adjacent à une surface verticale de grande extension et soumise à une variation de température ou à un flux de chaleur constant présente une singularité. A l'image du problème classique de la couche limite visqueuse en milieu fluide, cette singularité est liée à la transition qui marque le changement de régime de l'écoulement thermique le long de la surface. Ainsi, à une certaine date comptée à partir de l'origine des temps marquant le début du chauffage, l'écoulement thermique passe d'un régime de conduction thermique dans lequel l'écoulement n'est pas affecté par les effets du bord d'attaque de la surface à un régime permanent. Aux instants succédant à

l'instant initial, la vitesse et la température dans le milieu sont indépendantes de la distance X comptée à partir du bord d'attaque de la plaque. Par contre, à des dates très avancées de l'instant initial, les champs d'écoulement et de température sont indépendants du temps (régime permanent). La valeur singulière du temps qui marque le passage du régime transitoire unidimensionnel au régime permanent bidimensionnel dépend de la distance X .

Comme il a été démontré par *Ene et Polisevski (1987)*, les caractéristiques du transfert thermique changent soudainement, passant du régime transitoire de la conduction unidimensionnelle à la convection naturelle établie en régime permanent.

Dans les paragraphes à suivre, l'équation (3.46) sera différemment résolue en considérant les deux types de conditions aux limites précédemment exprimées dans les équations (3.40) et (3.41) et la condition initiale (3.42).

3.4.2 Solutions affines

Dans cette section, pour la recherche de solutions aux différentes équations obtenues, nous utiliserons la méthode de résolution dite méthode des caractéristiques. C'est une méthode de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles de type hyperbolique. Suivant l'ordre de dérivation notée dans l'équation aux dérivées partielles (3.46), nous allons procéder à la résolution des équations par cette méthode des caractéristiques que nous allons exposer dans la sous-section suivante.

3.4.2.1 Méthode des caractéristiques

Considérons l'équation différentielle aux dérivées partielles de premier ordre suivant :

$$\mathbf{e}_1(x,y,z) \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_2(x,y,z) \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{e}_3(x,y,z) \quad (3.47)$$

où $f = f(x,y,z)$. Les coefficients e_1, e_2, e_3 ne sont dépendant ni de $(\partial f/\partial x)$ ni de $(\partial f/\partial y)$. A l'équation (3.47) il faut ajouter les conditions aux limites à considérer pour la résoudre.

Considérons le système de vecteurs \vec{Z} et \vec{W} tels que:

$$\left. \begin{aligned} \vec{Z} &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ \vec{W} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

Partant de ce fait, l'équation aux dérivées partielles (3.47) à résoudre se réduit à $\vec{Z} \cdot \vec{W} = 0$. Ainsi le vecteur \vec{Z} se définit comme un vecteur tangent à la surface représentative de la solution $f(x,y)$.

Le vecteur $d\vec{M}$ de coordonnées $(dx, dy, dz(=(\partial f/\partial x) dx + (\partial f/\partial y) dy))$ parallèle au vecteur \vec{Z} est tel que nous avons:

$$\frac{dx}{\mathbf{e}_1} = \frac{dy}{\mathbf{e}_2} = \frac{df}{\mathbf{e}_3} \quad (3.49)$$

Les courbes x et y obtenues à partir de l'intégration de (3.49) sont appelées les courbes caractéristiques. La méthode des caractéristiques consiste à remplacer l'équation aux dérivées partielles (3.47) par un système d'équations de la forme:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{\mathbf{e}_1} &= \frac{dy}{\mathbf{e}_2} & \text{(a)} \\ \frac{dy}{\mathbf{e}_2} &= \frac{df}{\mathbf{e}_3} & \text{(b)} \end{aligned} \right. \quad (3.50)$$

L'intégration respective des équations (3.50a) et (3.50b) avec les conditions aux limites appropriées donne respectivement l'expression $y(x)$ et celle de f en tout point x (donc y) de la caractéristique. Ainsi la solution recherchée satisfait à la condition :

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = df \quad (3.51)$$

3.4.2.2 Solutions affines: cas de la plaque chauffée de façon isotherme

En nous référant aux travaux de Cheng et Pop (1984) et suivant la condition aux limites (3.40b), le profil de température approprié pouvant être adopté ici s'écrit:

$$\Theta = \operatorname{erfc}(\eta) \quad (3.52)$$

où erfc est la fonction d'erreur complémentaire et η la variable affine exprimée par:

$$\eta = \frac{Y}{A} \operatorname{Ra}_H^{-1/(2n)} \quad (3.53)$$

En portant (3.53) et sa différentielle dans l'équation (3.46), nous obtenons après intégration l'équation suivante:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + \zeta \left(\frac{n}{a} \right)^{1/n} \frac{\partial A}{\partial X} = 2 \frac{\operatorname{Ra}_H^{-1/n}}{A} \quad (3.54)$$

où ζ est une constante dépendant de l'indice d'écoulement n du fluide non-newtonien et donnée par la relation:

$$\zeta = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} [\operatorname{erfc}(x)]^{(n+1)/n} dx \quad (3.55)$$

Les conditions initiale et aux limites pour la variable A à considérer sont les suivantes :

$$\begin{cases} \tau = 0 & A(X, 0) = 0 & \text{(a)} \\ \tau \geq 0 & A(X, \tau) = 0 \text{ en } X = 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad (3.56)$$

Dans le cas où le milieu poreux est isotrope ($K^* = 1$, c'est-à-dire $a = 1$), et saturé par un fluide newtonien ($n = 1$), la solution exacte de l'équation (3.54) a été obtenue par le passé par *Cheng et Pop (1984)* par la méthode des caractéristiques. Ces mêmes auteurs sont parvenus à la solution approchée de la même équation en utilisant la méthode des relations intégrales de *Karman-Polhausen*.

Sur la base de la méthode des caractéristiques exposée au début de cette section, la résolution de l'équation (3.54) nous ramène au système différentiel suivant:

$$\frac{dX}{\zeta \left(\frac{n}{a} \right)^{1/n}} = d\tau = Ra_H^{1/n} \frac{A dA}{2} \quad (3.57)$$

De l'équation (3.57), l'équation des courbes caractéristiques est donnée par la relation :

$$dX = \zeta \left(\frac{n}{a} \right)^{1/n} d\tau \quad (3.58)$$

Sur chaque caractéristique, le rapport de forme de la couche limite A est donné soit par la relation :

$$Ra_H^{1/n} A dA = 2d\tau \quad (3.59)$$

soit par l'équation :

$$\mathbf{Ra}_H^{1/n} \zeta \left(\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{a}} \right)^{1/n} \mathbf{A} \, d\mathbf{A} = 2 \, d\mathbf{X} \quad (3.60)$$

suivant le fait que la caractéristique intercepte respectivement l'axe de temps τ ou l'axe des abscisses X . En tenant compte de la condition initiale (3.56a), l'intégration de l'équation (3.59) donne l'expression suivante:

$$\mathbf{A} = 2 \sqrt{\frac{\tau}{\mathbf{Ra}_H^{1/n}}} \quad (3.61)$$

La résolution de l'équation (3.60) soumise à la condition aux limites (3.56b) donne le résultat suivant:

$$\mathbf{A} = \frac{2}{\sqrt{\zeta}} \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{nRa}_H} \right)^{1/(2n)} \sqrt{\mathbf{X}} \quad (3.62)$$

Nous constatons que l'expression du rapport de forme A de la couche limite change en passant de l'expression (3.61) à celle (3.62). En posant $n=1$ (indice d'écoulement du fluide newtonien) dans les expressions (3.61) et (3.62) précédentes, les expressions résultantes sont identiques à celles obtenues par le passé par *Cheng et Pop (1984)* et par *Ene et Polisevki (1987)* à l'issue de leurs investigations sur le même problème dans le cas où le milieu poreux est saturé par un fluide newtonien.

En résolvant l'équation résultant de l'égalité des expressions (3.61) et (3.62), nous trouvons l'équation de la ligne caractéristique le long de laquelle s'opère le changement de la loi qui régit le rapport de forme de la couche limite. Cette équation s'écrit de la façon suivante:

$$\tau = \tau_s = \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{n}} \right)^{1/n} \frac{\mathbf{X}}{\zeta} \quad (3.63)$$

L'équation (3.63) est l'équation d'une droite définie dans le plan (X, τ) . Cette droite divise le plan en deux demi-plans, un demi-plan inférieur ($\tau < \tau_s$) dans lequel le rapport de forme A est donné par l'équation (3.61) et un demi-plan supérieur ($\tau > \tau_s$) dans lequel l'expression de A requise est donnée par l'équation (3.62). Cette ligne caractéristique détermine la date limite τ_s qui correspond à la durée marquant l'instant de début du régime transitoire de l'écoulement jusqu'à la date à partir de laquelle le régime permanent est atteint.

Portant les différentes expressions de la variable A données par les équations (3.61) et (3.62) dans l'équation (3.53), nous obtenons dans chaque cas l'expression de la variable affine η correspondante. Pour chaque expression de η ainsi obtenue, le profil de température correspondant, exprimé par l'équation (3.52) s'écrit dans chaque cas comme suit :

- Dans le demi-plan inférieur caractérisé par des dates τ tels que $\tau < \tau_s$ nous avons :

$$\Theta = \operatorname{erfc} \left(\frac{Y}{2\sqrt{\tau}} \right) \quad (3.64)$$

- Dans le demi-plan supérieur pour lequel $\tau > \tau_s$, la distribution de température a pour expression :

$$\Theta = \operatorname{erfc} \left\{ \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{\zeta}{X} \left(\frac{n}{a} \right)^{1/n}} \right\} \quad (3.65)$$

Nous remarquons que la distribution de température (3.64) valide à des dates telles que $\tau < \tau_s$ est indépendante de la position X sur la surface verticale. Cette solution pour le champ de température est caractéristique du phénomène de conduction en régime transitoire dans le milieu poreux. La

distribution de température fournie par l'équation (3.65), indépendante du temps τ , caractérise le phénomène de la convection naturelle dans le milieu poreux en régime permanent.

Dans le demi-plan supérieur ($\tau > \tau_s$), le nombre de Nusselt local Nu_x à travers la surface verticale exprimé à l'aide des variables physiques a pour expression :

$$Nu_x = \frac{q x}{k(T_w - T_\infty)} \quad (3.66)$$

A partir des équations (3.52) et (3.53), l'expression du flux local de chaleur q définie relativement à l'équation (3.22) et écrite au moyen des variables adimensionnelles du système d'équations (3.36), peut être réécrite sous la forme suivante:

$$q = \frac{2k(T_w - T_\infty)}{A H \sqrt{\pi}} \quad (3.67)$$

En substituant dans l'équation (3.67) l'expression de la variable A donnée par l'équation (3.61) valide dans le demi-plan inférieur ($\tau < \tau_s$) où prédomine le phénomène de conduction en régime transitoire, nous obtenons le résultat qui suit:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} \quad (3.68)$$

où $Q = q / [k \Delta T Ra_H^{1/(2n)} / H]$ est l'expression dimensionnelle du flux local de chaleur sur la surface.

A partir de l'équation (3.67), la prise en compte de l'expression de la variable A donnée par l'équation (3.62) et le nombre de Rayleigh Ra_H

(équation (3.19)) exprimé en fonction du nombre de Rayleigh local Ra_x permettent d'écrire le flux local de chaleur q sous la forme suivante:

$$q = \frac{2k(T_w - T_\infty)}{x} \sqrt{\frac{\zeta}{\pi} \left(\frac{n Ra_x}{a} \right)^{1/n}} \quad (3.69)$$

Dans l'équation (3.69), Ra_x est le nombre de Darcy-Rayleigh modifié, basé sur la distance x comptée à partir du bord d'attaque de la plaque. Son expression s'écrit:

$$Ra_x = \frac{K_1 \rho_\infty g \beta (T_w - T_\infty) x^n}{\varepsilon \alpha^n} \quad (3.70)$$

L'expression (3.69) donnant le flux de chaleur n'est valable que dans le demi-plan supérieur $\tau > \tau_s$ où prédomine le phénomène de convection thermique.

Substituant l'équation (3.69) dans l'équation (3.66), le nombre de Nusselt local Nu_x s'écrit sous la forme suivante:

$$Nu_x = \sqrt{\frac{\zeta n^{1/n}}{\pi}} Ra_x^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (3.71)$$

Intéressons-nous à présent à la fonction de courant ψ . Sous sa forme adimensionnelle, elle est définie par l'équation (3.20) qui nous permet d'écrire:

$$\psi = \int_0^\infty u dy \quad (3.72)$$

Tenant compte de l'expression de la variable adimensionnelle Y du système d'équations (3.35) et de l'équation (3.53), nous pouvons montrer que la coordonnée dimensionnelle y est liée à la variable affine η par la relation :

$$y = AH\eta \quad (3.73)$$

En écrivant la différentielle de la variable y à partir de l'équation (3.73) et en tenant compte de l'équation (3.43), nous obtenons l'expression dimensionnelle de la fonction de courant qui s'écrit de la façon suivante:

$$\psi = \alpha \left(\frac{n}{a} \right)^{1/n} \mathbf{Ra}_H^{1/n} A \int_0^\infty \Theta^{1/n} d\eta \quad (3.74)$$

où A est le rapport de forme de la couche limite donné par l'équation (3.62) et Θ la distribution de température indiquée à la l'équation (3.52).

Intéressons-nous à la fonction de courant locale sur la surface. Sur la base des équations (3.19) et (3.70), nous pouvons écrire la relation liant les nombres de Darcy-Rayleigh basés respectivement sur la hauteur H de la surface et sur la distance x comptée à partir du bord d'attaque. Elle s'écrit:

$$\mathbf{Ra}_H^{1/(2n)} \sqrt{X} = \mathbf{Ra}_x^{1/(2n)} \quad (3.75)$$

Compte tenu de l'équation (3.74) et de l'équation du système (3.35) donnant la fonction de courant, en utilisant les expressions (3.52) et (3.62), nous obtenons la fonction de courant écrite sous sa forme adimensionnelle. Son expression est la suivante :

$$\psi = \frac{2}{\sqrt{\zeta}} n^{1/(2n)} I_{1/n} \mathbf{Ra}_x^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (3.76)$$

avec

$$I_{1/n} = \int_0^\infty [\text{erfc}(x)]^{1/n} dx \quad (3.77)$$

Pour un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$ c'est-à-dire $a = 1$), saturé par un fluide newtonien ($n = 1$), les résultats obtenus dans la présente analyse sont identiques à ceux obtenus par *Cheng et Pop (1984)* et *Ene et Polisevski (1987)*.

3.4.2.3 Solutions affines: surface chauffée par un flux de chaleur constant

Dans ce deuxième cas où la surface est chauffée par un flux de chaleur constant, la procédure de recherche de la solution sera analogue à celle adoptée dans le cas précédent. Le problème à résoudre est posé à travers l'équation (3.46) avec les conditions aux limites (3.42) et (3.41b). En effet, sur la base de l'équation (3.46), en tenant compte de la condition initiale (3.42), le profil de température est de la forme :

$$\Theta = B [\operatorname{erfc}(\eta)] \quad (3.78)$$

Tenant compte de la condition aux limites (3.41b), nous trouvons l'expression du coefficient B apparaissant dans l'équation (3.78) qui s'écrit :

$$B = \frac{A \sqrt{\pi R_H^{1/(2n+1)}}}{2} \quad (3.79)$$

En écrivant la coordonnée cartésienne y en fonction du nombre adimensionnel Y dont l'expression figure dans le système d'équations (3.36), nous obtenons à partir de l'équation (3.73) l'expression la variable affine η correspondante. Elle a pour expression:

$$\eta = \frac{Y}{A} R_H^{-1/(2n+1)} \quad (3.80)$$

En substituant les équations (3.78) et (3.79) dans l'équation (3.46) et en tenant compte de la relation (3.80), l'équation qui régit la variation du rapport de forme A de la couche limite s'écrit :

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + C \left\{ \frac{A R_H^{1/(2n+1)}}{a} \right\}^{1/n} \frac{\partial A}{\partial X} = \left[A (R_H)^{2/(2n+1)} \right]^{-1} \quad (3.81)$$

où le facteur C apparaissant dans l'équation (3.81) s'écrit :

$$C = \frac{\zeta (2n+1)}{2n} \left(\frac{n \sqrt{\pi}}{2} \right)^{1/n} \quad (3.82)$$

La résolution de l'équation (3.81) par la méthode des caractéristiques avec les conditions aux limites (3.56a) et (3.56b) associées nous permet d'obtenir l'équation ci-après :

$$\frac{dX}{C \left[A R_H^{1/(2n+1)} / a \right]^{1/n}} = d\tau = R_H^{2/(2n+1)} A dA \quad (3.83)$$

A partir de l'équation (3.83), le rapport de forme A de la couche limite est déterminé sur chaque caractéristique par les équations suivantes:

$$R_H^{2/(2n+1)} A dA = d\tau \quad (3.84)$$

et

$$\left(R_H \right)^{1/n} C a^{-1/n} A^{(n+1)/n} dA = dX \quad (3.85)$$

L'intégration des équations (3.84) et (3.85) avec les conditions aux limites respectives (3.56a) et (3.56b) donne le rapport de la couche limite relatif à chaque type de régime. Ces différentes expressions s'écrivent respectivement :

$$A = \sqrt{2\tau} R_H^{-1/(2n+1)} \quad (3.86)$$

et

$$A = \left\{ \frac{(2n+1) a^{1/n} X}{n C (R_H)^{1/n}} \right\}^{n/(2n+1)} \quad (3.87)$$

Il est à remarquer que, l'expression du rapport de forme A de la couche limite change en passant de l'expression (3.86) et (3.87) à la traversée d'une ligne caractéristique limite. L'équation de cette caractéristique est obtenue en posant l'égalité entre les équations (3.86) et (3.87). Cette égalité fournit le résultat suivant :

$$\tau = \tau_s = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(2n+1) a^{1/n} X}{nC} \right\}^{2n/(2n+1)} \quad (3.88)$$

Des paragraphes précédents, nous pouvons conclure que le plan (X, τ) est divisé en deux demi-plans. Un demi-plan inférieur dans lequel l'expression du rapport de forme A de la couche limite est donnée par l'équation (3.86) et un demi-plan supérieur dans lequel A est donné par l'équation (3.87). Ainsi, l'équation de la ligne délimitant ces deux demi-plans est donnée par l'équation (3.88). Cette équation donne la valeur singulière du temps τ_s , qui marque le passage du régime transitoire au régime permanent.

En portant les différentes expressions de la variable A (équations (3.86) et (3.87)) dans les équations (3.79) et (3.80) et sur la base de l'équation (3.78), nous parvenons aux différents profils de température dans chaque demi-plan. Ces profils de température s'écrivent respectivement :

- Dans le demi-plan inférieur, défini tel que $(\tau < \tau_s)$ on a :

$$\Theta = \sqrt{\frac{\pi \tau}{2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{Y}{\sqrt{2\tau}} \right) \quad (3.89)$$

- Dans le demi-plan supérieur, défini tel que $(\tau > \tau_s)$ on a :

$$\Theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (DX)^{n/(2n+1)} \operatorname{erfc} \left\{ Y(DX)^{-n/(2n+1)} \right\} \quad (3.90)$$

où la constante D a pour expression

$$\mathbf{D} = \frac{(2n+1) \mathbf{a}^{1/n}}{n \mathbf{C}} \quad (3.91)$$

Comme il a été discuté dans le cas dans le cas précédent, la solution du problème de l'écoulement thermique en régime transitoire le long d'une surface verticale de grande extension, montre l'existence de deux modes de transfert qui se succèdent au cours du temps. En effet, dès le début du chauffage de la surface jusqu'à la date limite τ_s , le transfert thermique à travers la couche poreuse adjacente à la surface verticale se fait par conduction thermique en régime variable. Au-delà de cette date, le milieu poreux est le siège d'un régime permanent de convection. Dans le cas d'un milieu poreux isotrope ($a=1$ c'est-à-dire $K^*=1$) saturé par un fluide newtonien ($n=1$), les résultats obtenus (équations (3.89) et (3.90)) sont identiques à ceux trouvés par *Cheng et Minkowycz (1977)* qui se sont intéressés au problème de la couche limite en régime de convection naturelle dans un milieu poreux isotrope adjacent à une plaque verticale et saturé par un fluide newtonien.

En substituant l'équation (3.89) dans l'équation (3.67), le flux de chaleur le long de la surface verticale pendant le régime transitoire de conduction s'écrit :

$$\mathbf{Q} = \sqrt{\frac{2}{\pi \tau}} \quad (3.92)$$

où $Q = q / [k \Delta T Ra_H^{1/(2n+1)} / H]$ représente le flux local de chaleur sur la surface.

A partir de l'équation (3.67) et compte tenu de l'équation (3.87) donnant l'expression de la variable A, le flux local de chaleur pendant le régime de convection ($\tau > \tau_s$) a pour expression:

$$\mathbf{q} = \frac{2\mathbf{k}(T_w - T_\infty)}{\mathbf{H}\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\mathbf{n} \mathbf{C} (\mathbf{R}_H)^{1/n}}{(\mathbf{2n}+1) \mathbf{a}^{1/n} \mathbf{X}} \right\}^{n/(2n+1)} \quad (3.93)$$

En portant l'expression (3.93) dans l'équation (3.66), nous obtenons le nombre de Nusselt local Nu_x correspondant, défini par l'expression suivante :

$$\mathbf{Nu}_x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\zeta \left(\frac{\mathbf{n}\sqrt{\pi}}{\mathbf{2}^{n+1}} \right)^{1/n} \right]^{n/(2n+1)} \mathbf{R}_x^{1/(2n+1)} \mathbf{a}^{-1/(2n+1)} \quad (3.94)$$

où $R_x = K_1 \rho_\infty g \beta q x^{(n+1)} / (\varepsilon \alpha^n k)$ est le nombre de Darcy-Rayleigh modifié basé sur la distance x comptée sur la plaque à partir de son bord d'attaque et défini dans le cas où la plaque est chauffée par un flux de chaleur uniforme.

Intéressons-nous à présent à la fonction de courant dont l'expression est indiquée à l'équation (3.72). En remplaçant l'expression de la variable adimensionnelle Y du système d'équations (3.36) dans l'équation (3.80) donnant l'expression de la variable affine, nous retrouvons l'expression de la coordonnée cartésienne y définie ultérieurement par l'équation (3.73). En posant l'égalité entre l'équation (3.43) et l'équation correspondante définie au système d'équations (3.36), nous trouvons l'expression de la composante u de la vitesse de filtration dans la matrice poreuse dont l'expression est la suivante :

$$\mathbf{u} = \frac{\alpha}{\mathbf{H}} \mathbf{R}_H^{2/(2n+1)} \left(\frac{\mathbf{n}\Theta}{\mathbf{a}} \right)^{1/n} \quad (3.95)$$

En portant l'équation (3.95) et la différentielle de la variable affine η (équation (3.80)) dans l'expression de la fonction de courant définie à l'équation (3.72), nous obtenons l'expression suivante :

$$\psi = \alpha \left(\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{a}} \right)^{1/\mathbf{n}} \mathbf{Ra}_H^{2/(2\mathbf{n}+1)} \mathbf{A} \int_0^\infty \Theta^{1/\mathbf{n}} d\eta \quad (3.96)$$

L'expression du champ de température (équation (3.90) et l'équation (3.87) donnant l'épaisseur de la couche limite portées dans l'équation (3.96), nous permettent d'obtenir après calcul le résultat ce qui suit:

$$\psi = \alpha \left(\frac{\mathbf{n}\sqrt{\pi}}{2} \right)^{1/\mathbf{n}} \left[\frac{(2\mathbf{n}+1)}{\mathbf{n}\mathbf{C}} \right]^{(\mathbf{n}+1)/(2\mathbf{n}+1)} \mathbf{I}_{1/\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{X}^{(\mathbf{n}+1)} \mathbf{R}_H}{\mathbf{a}} \right)^{1/(2\mathbf{n}+1)} \quad (3.97)$$

En utilisant l'expression de la variation de température ΔT définie au niveau du système d'équations (3.36), on établit à partir des équations (3.32) et (3.70) relatives aux expressions des nombres de Darcy- Rayleigh modifiés Ra_x et R_H la relation qui suit :

$$\mathbf{R}_H = \frac{\mathbf{Ra}_x}{\mathbf{A} \mathbf{X}^{\mathbf{n}}} \quad (3.98)$$

En portant les expressions de R_H et de la constante C (équation (3.82)) dans l'équation (3.97), sur la base de l'équation donnant la fonction de courant adimensionnelle ψ définie au système d'équations (3.36), nous obtenons la fonction de courant adimensionnelle qui s'écrit de la façon suivante :

$$\psi = \left[\left(\frac{2}{\zeta} \right)^{\mathbf{n}+1} \left(\frac{\mathbf{n}\sqrt{\pi}}{2} \right) \right]^{1/(2\mathbf{n}+1)} \mathbf{I}_{1/\mathbf{n}} \mathbf{Ra}_x^{1/(2\mathbf{n}+1)} \mathbf{a}^{-1/(2\mathbf{n}+1)} \quad (3.99)$$

3.5 Discussion des résultats

Dans cette partie, les effets des paramètres d'anisotropie et l'influence de l'indice d'écoulement du fluide non-newtonien saturant la matrice du milieu

poreux ont été étudiés. En effet, pour analyser l'impact de ces paramètres sur l'écoulement convectif le long de la surface verticale, nous avons évalué les constantes ζ et $I_{1/n}$ dont les expressions respectives sont rapportées par les équations (3.55) et (3.77). Ces équations ont été résolues numériquement par la méthode de *Romberg* couplée avec la méthode d'extrapolation de *Richardson* en vue d'avoir une meilleure approximation de la solution exacte. Les résultats trouvés à l'issue de ce calcul numérique sont présentés dans la table 3.1.

n	ζ	$I_{1/n}$
0,5	0,41974	0,33049
0,6	0,46311	0,38206
0,8	0,53254	0,47727
1,0	0,58578	0,56414
1,2	0,62799	0,64439
1,4	0,66232	0,71913

Table 3.1: Evaluation des constantes ζ (équation (3.55)) et $I_{1/n}$ (équation (3.77)).

Dans l'objectif de prouver la validité de la présente étude, nous avons construit la table 3.2. Cette table présente une comparaison des valeurs obtenues pour le paramètre $Nu_x / (Ra_x)^{1/2}$ au cours de la présente étude et celles existantes en littérature et qui se rapportent à l'étude d'un milieu poreux

isotrope saturé par un fluide newtonien. En effet, dans le cas d'un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$) adjacent à une plaque chauffée de façon isotherme, et saturé par un fluide newtonien ($n = 1$), la valeur obtenue pour le paramètre $Nu_x / (Ra_x)^{1/2}$ au cours de la présente étude est comparée à celle obtenue par *Vasseur et Degan (1998)*. Ces derniers, par une procédure numérique basée sur le schéma implicite aux différences alternées couplé par la méthode de surrelaxation ont résolu ce même problème dans le cas d'un milieu poreux anisotrope en perméabilité. Sur la base d'une transformation affine, ce même problème a été résolu par *Cheng et Minkowycz (1997)* en situation isotrope.

a = K *	$Nu_x / (Ra_x)^{1/2}$	
	Méthode affine (<i>Vasseur et Degan (1998)</i>)	Présente étude, équation (3.70)
0.1 (<1.0)	1.404	1.3653
1.0 (isotrope)	0.444	0.4317
10. (>1.0)	0.140	0.1365

Table 3.2 : Valeurs du Nusselt $Nu_x / (Ra_x)^{1/2}$ obtenues pour différentes méthodes de résolution dans le cas où l'indice $n = 1$ et pour une surface chauffée de façon isotherme.

Nous avons observé que le résultat trouvé à l'issue de la présente étude par la méthode des caractéristiques est en accord avec ceux obtenus par *Cheng et*

Pop (1984) dans le cas où le milieu poreux hydrodynamiquement et isotrope et saturé par un fluide non-newtonien.

La figure 3.2 montre l'influence de l'indice d'écoulement du fluide non-newtonien sur la caractéristique limite τ_s dont l'équation est donnée par l'équation (3.63). Cette caractéristique τ_s , exprime le temps au bout duquel le régime permanent est atteint à partir de l'instant initial du chauffage.

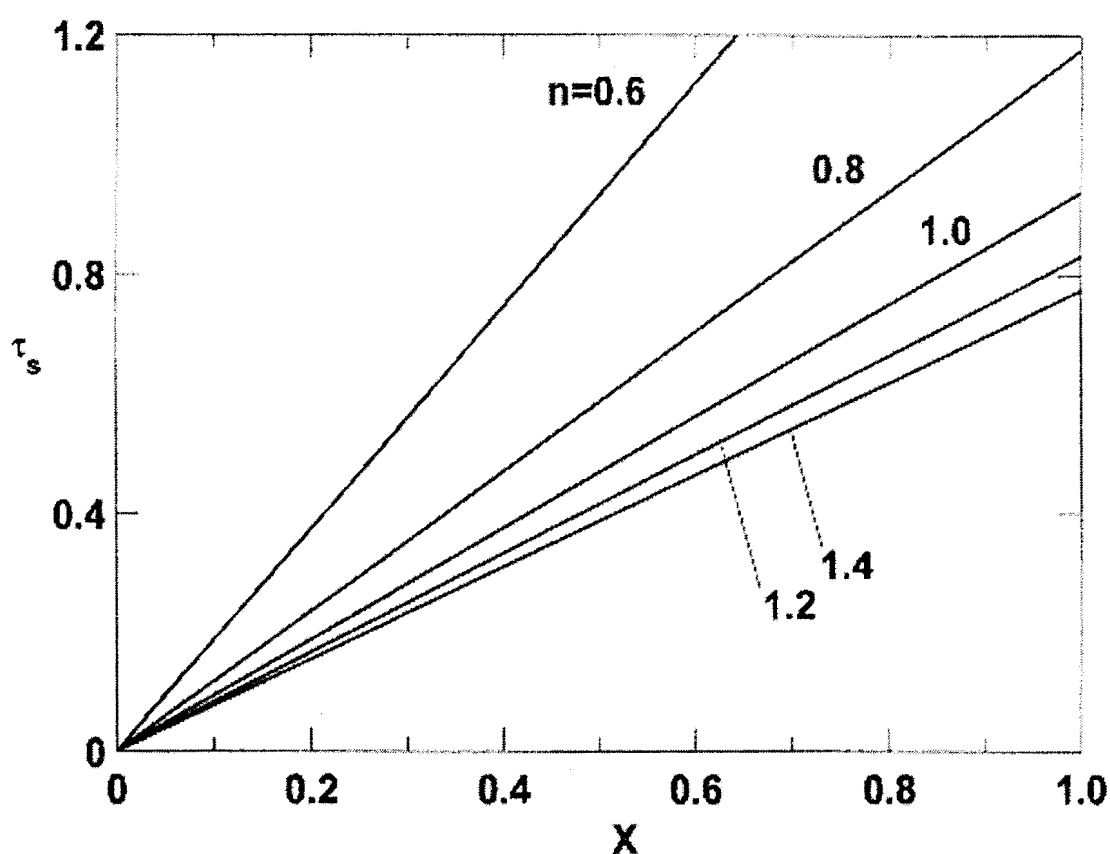


Figure 3.2 : Effet de l'indice d'écoulement n sur le temps critique τ_s lorsque $\theta = 45^\circ$, $K^* = 0.1$ dans le cas d'une surface chauffée de façon isotherme.

Sur la figure 3.2, nous observons que lorsque les paramètres d'anisotropie sont maintenus constants, soit $\theta = 45^\circ$ et $K^* = 0.1$ par exemple,

chaque caractéristique obtenue pour un indice d'écoulement fixé est une fonction linéaire de la distance X sur la surface comptée à partir du bord d'attaque. Cette droite divise le plan (X, τ) en deux demi-plans. A chaque demi-plan correspond un mode d'écoulement. Le demi-plan inférieur défini pour des dates $\tau (< \tau_s)$, est le siège du phénomène de pure conduction à travers le milieu poreux. Le demi-plan supérieur est la région dominée par le phénomène de transfert de chaleur par convection qui prédomine à des dates $\tau > \tau_s$. De plus, nous observons que lorsque l'indice d'écoulement du fluide augmente à partir de la valeur $n=0.6$ (correspondant à un fluide rhéofluidifiant) à $n=1.4$ (fluide rhéoépaississant) le demi-plan supérieur s'élargit progressivement. Ce comportement peut être expliqué par le fait que dans le demi-plan supérieur, siège de phénomènes convectifs, le taux local de transfert de chaleur dont l'expression est indiquée par l'équation (3.71) donne respectivement $Nu_x / (Ra_x)^{0.83} = 0,4127$ pour un fluide d'indice $n=0,6$ et $Nu_x / (Ra_x)^{0.35} = 0,6408$ lorsque $n=1.4$. Ainsi, l'écoulement convectif est intensifié lorsque l'indice n croît. Ceci se traduit dans le plan (X, τ) par l'élargissement du demi-plan supérieur qui en est le siège.

La figure 3.3 montre les variations de la date limite τ_s marquant le début du régime permanent lorsque la plaque est chauffée isothermiquement. Sur cette figure, τ_s varie linéairement en fonction de la distance X comptée sur la surface à partir du bord d'attaque lorsque l'indice d'écoulement du fluide vaut $n=1.2$, pour un angle d'orientation des directions principales de perméabilité $\theta=30^\circ$ et pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie K^* . Pour une distance X fixée, lorsque le rapport d'anisotropie décroît, on observe une diminution du temps τ_s mis par l'écoulement thermique pour passer du régime transitoire au régime permanent. Ainsi, le phénomène de convection devient de plus en plus important lorsque le rapport d'anisotropie

K^* diminue. Ceci se traduit dans le plan (X, τ) par une extension du domaine correspondant au demi-plan supérieur délimité par τ_s . Cette tendance peut être déduite de l'équation (3.63). En effet, dans l'équation (3.63) donnant l'expression de τ_s , pour n , θ et X choisis constants, τ_s est proportionnel à $(K^*)^{0.83}$.

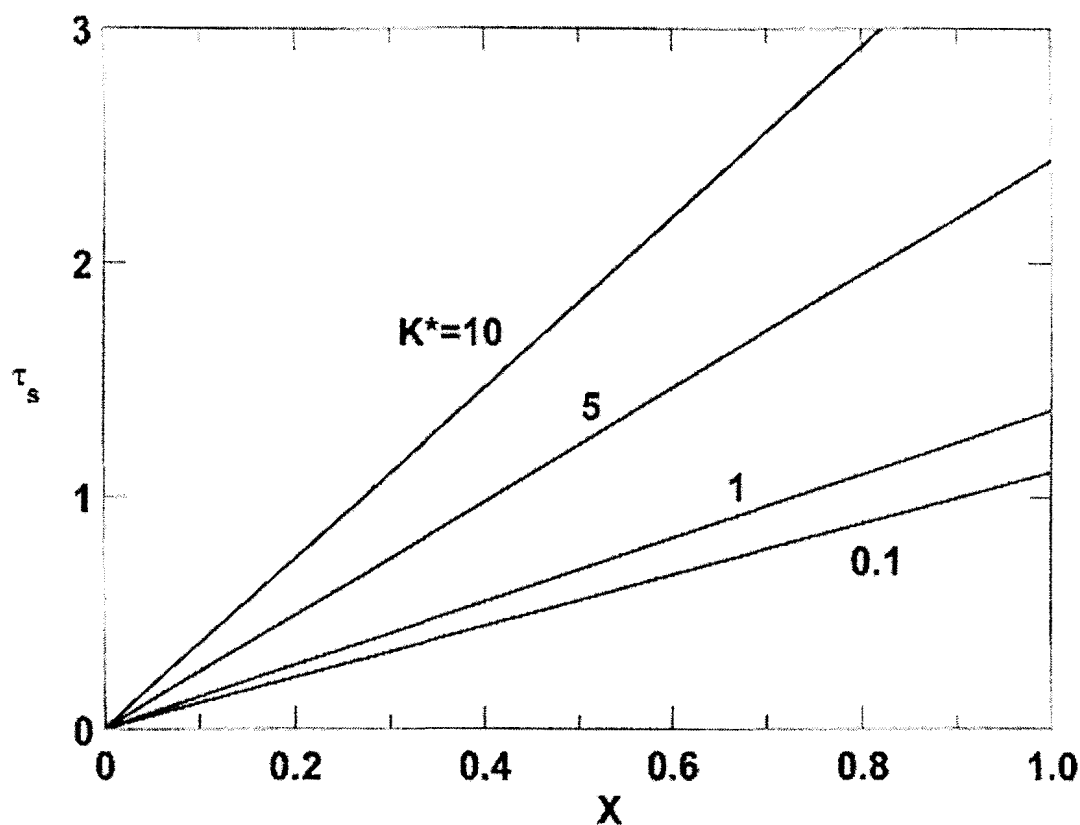


Figure 3.3 : Effet du rapport d'anisotropie K^* sur la variation du temps critique τ_s lorsque $n=1.2$ et $\theta=30^\circ$ dans le cas d'une surface chauffée de façon isotherme.

Sur la figure 3.4 ci-dessous est illustrée la variation de τ_s en fonction de la distance X , pour différentes valeurs de l'angle θ , lorsque $n=0.8$ et $K^*=10$ lorsque la surface est soumise à une élévation de température. En effet, de l'analyse de cette figure, nous pouvons conclure que la date limite τ_s à partir de laquelle le régime stationnaire est atteint croît en fonction d'une

augmentation de l'angle d'orientation θ des axes principaux du milieu poreux.

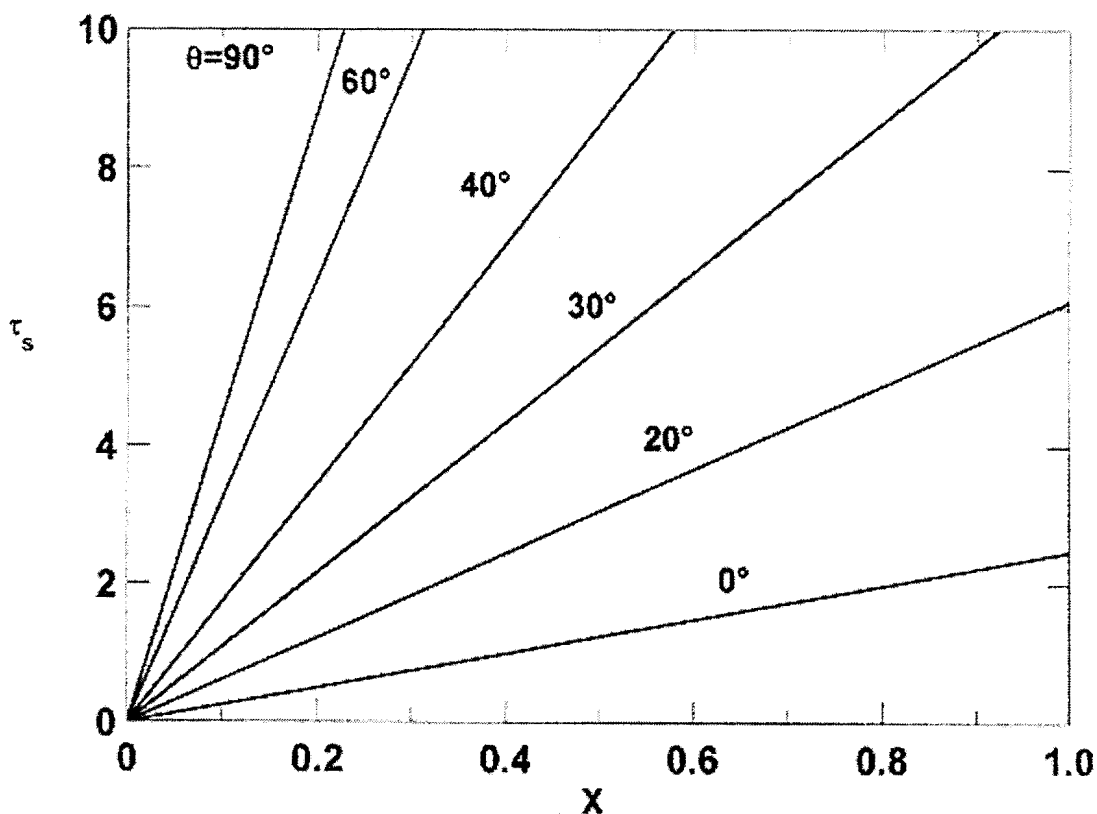


Figure 3.4 : Effet de l'angle d'orientation θ des axes principaux sur le temps critique τ_s lorsque $n=0.8$, $K^*=10$ pour une surface chauffée de façon isotherme.

La figure 3.5 ci-dessous illustre les effets de la variation du nombre de Darcy-Rayleigh modifié Ra_H sur le rapport de forme A de la couche limite le long d'une surface verticale chauffée isothermiquement à une date τ ($\tau < \tau_s$), lorsque la matrice poreuse est saturée par un fluide non-newtonien dont l'indice d'écoulement vaut $n=0.5$. Nous observons que le rapport de forme A de la couche limite diminue considérablement lorsque le nombre de Darcy-Rayleigh modifié Ra_H croît, occasionnant une canalisation de l'écoulement le long de la surface verticale. Ce comportement peut être expliqué par le fait que, conformément à l'équation (3.61), le rapport de

forme A de la couche limite est proportionnel à $(\tau)^{1/2}$ et inversement proportionnel à $Ra_H^{1/(2n)}$ de sorte que, en augmentant la valeur du nombre Darcy-Rayleigh modifié Ra_H , le rapport de forme A diminue progressivement et devient de moins en moins affecté par la durée τ .

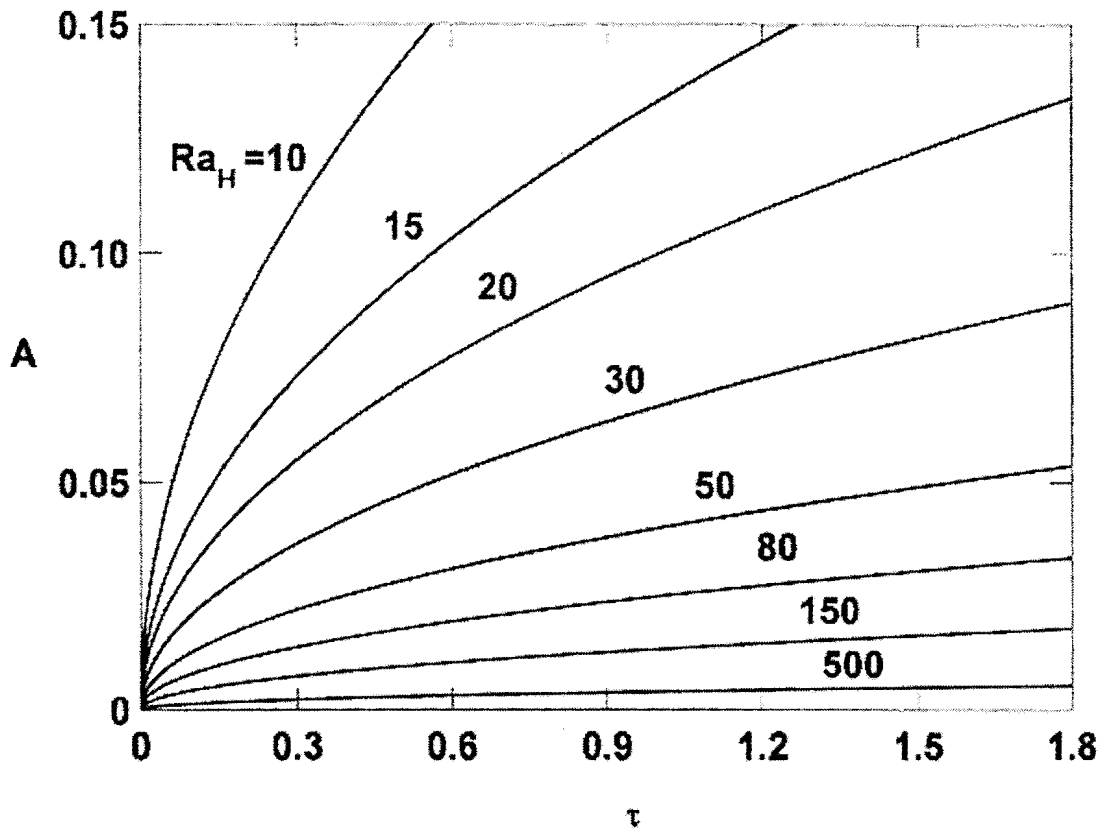


Figure 3.5: Influence du temps τ ($\tau < \tau_s$) sur l'épaisseur A de la couche limite pour $n = 0.5$ pour différentes valeurs de Ra_H dans le cas d'une surface chauffée isothermiquement.

A la figure 3.6 sont illustrés les effets de la variation du temps de chauffage τ ($< \tau_s$) et de l'indice d'écoulement n sur le rapport de forme A de la couche limite le long d'une surface verticale soumise à un gradient de température.

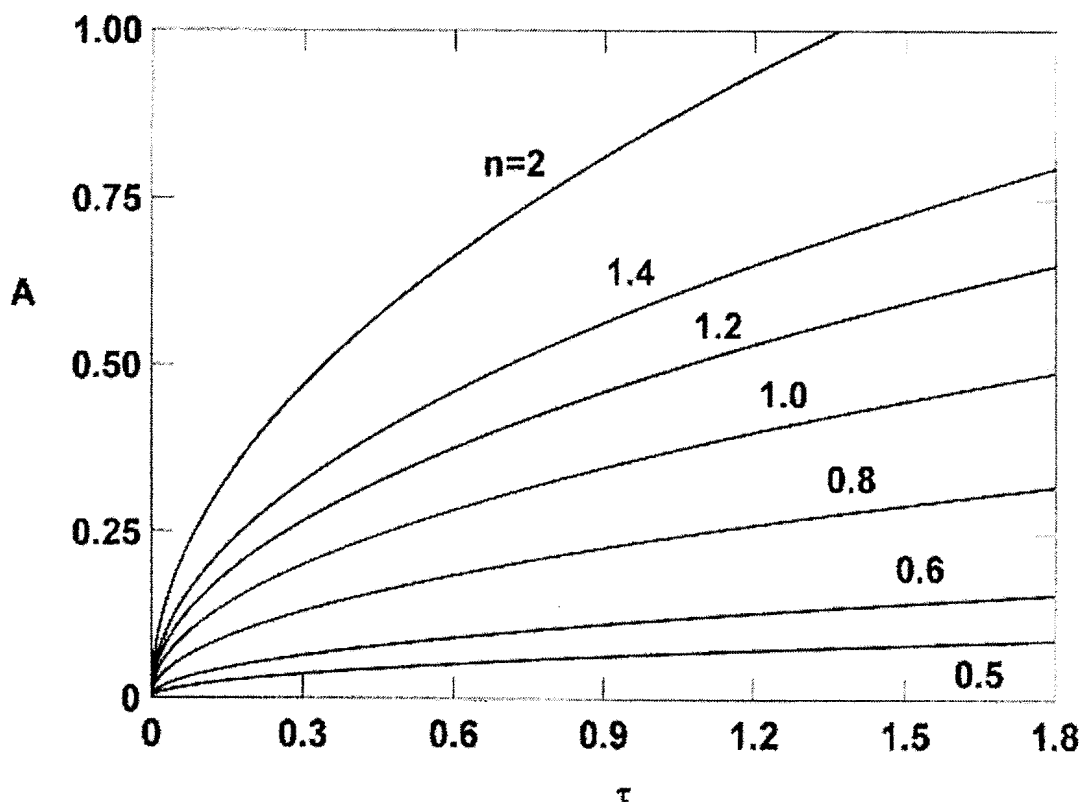


Figure 3.6 : Influence du temps τ ($\tau < \tau_s$) sur l'épaisseur A de la couche limite pour $Ra_H = 30$ pour différentes valeurs de n dans le cas d'une surface chauffée isothermiquement.

En effet, pour un nombre de Rayleigh fixé $Ra_H = 30$, le rapport de forme A de la couche limite croît lorsque l'on augmente la valeur de l'indice d'écoulement du fluide. Cette observation peut être expliquée par le fait que pour une date fixée τ ($< \tau_s$), en se basant sur l'équation (4.60), $Ra_H^{-1/(2n)} \rightarrow 0$ lorsque l'indice d'écoulement tend vers 0 ($n > 0$) et par conséquent la couche limite ($A \rightarrow 0$) tend à disparaître. Ainsi donc, de la figure 3.6 nous dégagons la conclusion selon laquelle, le rapport de forme A de la couche limite diminue progressivement lorsque l'indice d'écoulement du fluide non-newtonien devient de plus en plus faible et ceci indépendamment de la durée de l'écoulement convectif.

3.6 Conclusion

Nous venons d'étudier le problème de convection thermique en régime transitoire dans un milieu poreux adjacent à une surface verticale de grande extension. La surface est chauffée soit de façon isotherme, soit par un flux de chaleur constant. Le milieu poreux anisotrope en perméabilité avec des axes principaux de perméabilité non-coïncidants avec le champ gravitationnel est saturé par un fluide non-newtonien. Sur la base de la loi de Darcy généralisée (*Bear (1972)*) et du modèle en loi de puissance de *Pascal (1983,1986)*, les équations de la couche limite ont été formulées. Avec la prise en compte de la variable temporelle dans l'équation d'énergie, ces équations ont été résolues analytiquement par la méthode des caractéristiques. Des résultats obtenus au cours de la présente étude, il se dégage les conclusions suivantes :

1) L'écoulement convectif transitoire le long d'une plaque verticale adjacente à un milieu poreux anisotrope présente une singularité. Cette singularité est caractérisée par la transition que subit l'écoulement convectif en passant d'un régime où prévalent les mouvements d'instabilités dans le milieu poreux à un régime caractérisé par des mouvements stationnaires qui ont lieu à partir d'une date limite τ_s , comptée à partir de l'instant initial de chauffage de la surface. Cette durée τ_s , correspond au temps nécessaire au régime d'écoulement thermique pour atteindre le régime permanent dès l'entame du chauffage de la surface. Cette valeur singulière du temps marque la date à partir de laquelle les grandeurs caractéristiques du transfert thermique changent soudainement en passant du régime transitoire de conduction unidimensionnelle à un régime de convection naturelle bidimensionnelle.

2) Pendant la période de temps qui précède le changement de régime d'écoulement ($\tau < \tau_s$), les champs de vitesse et de température dépendent

uniquement du temps. Le transfert thermique à travers le milieu poreux au cours de ce régime est indépendant des paramètres d'anisotropie (K^* et θ) de la matrice poreuse et de l'indice d'écoulement n , caractéristique rhéologique du fluide non-newtonien saturant le milieu.

3) Pendant la période de temps ultérieure à la date limite ($\tau > \tau_s$), les champs de vitesse et de température et le taux de transfert de chaleur sont indépendants du temps. Par contre, ces solutions sont grandement affectées par les paramètres que sont les paramètres d'anisotropie en perméabilité K^* et θ , l'indice d'écoulement n du fluide non-newtonien et la distance X comptée sur la plaque à partir du bord d'attaque.

4) Dès l'amorce du régime permanent à partir de la date τ_s , le transfert de chaleur par convection est de plus en plus important lorsque l'indice d'écoulement du fluide non-newtonien croît. Nous pouvons conclure qu'à partir de cette date τ_s le transfert thermique est favorisé par un fluide dilatant.

5) Indépendamment du type de chauffage imposé sur la surface verticale, la durée de temps limite τ_s pour atteindre le régime permanent croît lorsqu'on augmente le rapport d'anisotropie K^* et l'angle d'orientation θ des axes principaux du milieu poreux.

Chapitre 4

**Etude de la convection en régime de
couche limite au voisinage d'une surface
verticale bordant un milieu poreux saturé
par un fluide non-newtonien**

4.1 Introduction

Le présent chapitre s'intéresse à la convection en régime de couche limite au voisinage d'une surface verticale adjacent à un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien. Par la méthode des relations intégrales, la solution approchée au problème considéré a été obtenue dans le cas où la température le long de la surface est une fonction de puissance de la distance comptée à partir du bord d'attaque. Le milieu poreux est anisotrope en perméabilité avec des axes principaux de perméabilité orientés dans une direction oblique par rapport au champ gravitationnel. Se basant sur le modèle de Pascal de la loi de *Darcy* généralisée modifiée régissant l'écoulement laminaire du fluide non-newtonien, le phénomène convectif va être étudié. Pour des valeurs élevées du nombre de Darcy-Rayleigh, les équations de couche limite seront résolues analytiquement en utilisant la méthode de relations intégrales. Dans l'objectif de prédire les ordres de grandeurs des paramètres d'intérêt du phénomène d'écoulement, une analyse d'échelle sera menée précédemment à la résolution des équations.

4.2 Modèle physique et formulation mathématique

4.2.1 Modèle physique

Nous considérons le cas d'une surface verticale adjacente à un milieu poreux caractérisé par l'anisotropie en perméabilité. La surface verticale est chauffée, soit isothermiquement, soit par un flux de chaleur uniforme. Le milieu poreux est saturé par un fluide non-newtonien de caractéristique rhéologique en loi de puissance de type *Oswald-de-Waele*. Les axes de coordonnées x et y sont respectivement orientés suivant les directions verticale et horizontale, conformément aux annotations de la figure 3.1. L'anisotropie dans le milieu est caractérisée par le rapport d'anisotropie

$K^* = K_1 / K_2$ et l'angle θ que fait l'axe principal de perméabilité K_2 avec l'horizontale. Les propriétés thermophysiques du fluide sont considérées constantes, indépendantes de la température à l'exception de l'approximation de Boussinesq.

4.2.2 Formulation mathématique

Dans les conditions ci-dessus indiquées, les équations gouvernantes adimensionnées (2.23) et (2.25) sont applicables ici. En régime permanent ($\partial T / \partial t = 0$), sur la base de l'équation adimensionnée (2.27), l'équation d'énergie s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}^2} \right) \quad (4.1)$$

Les conditions aux limites considérées ici sont les suivantes:

1) **Sur la surface verticale ($y = 0$)**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y} = \mathbf{0}: & \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{a}) \\ & \mathbf{T} = \mathbf{T}_w = \mathbf{T}_\infty + \mathbf{D}x^\lambda \quad (\mathbf{b}) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où la température sur la surface T_w est une fonction puissance de la distance x , D et λ des constantes positives et T_∞ est la température dans le courant libre loin de la surface verticale. Il a été démontré par *Rastogi et Poulikakos (1995)* que lorsque la plaque est chauffée par un flux de chaleur constant, la constante λ est donnée par la relation $\lambda = n / (2n + 1)$ et dans le cas d'un chauffage isotherme $\lambda = 0$.

2) Dans la zone de courant libre, loin de la surface ($y \rightarrow \infty$)

$$\begin{cases} y \rightarrow \infty: & \mathbf{U} = \mathbf{0} & \text{(a)} \\ & \mathbf{T}(\mathbf{X}, \infty) = \mathbf{T}_\infty & \text{(b)} \end{cases} \quad (4.3)$$

4.3 Résolution

Nous considérons dans cette section le régime de couche limite pour lequel la plupart du mouvement du fluide est restreint à une mince couche d'épaisseur δ le long de la surface verticale ($\delta \ll H$). En désignant par H et δ les échelles caractéristiques des variables x et y dans la couche limite, il résulte que $x \gg y$. Sur cette base, l'équation adimensionnée (2.25) se réduit pour donner l'équation (3.6) et l'équation d'énergie (3.1) devient:

$$\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial y^2} \quad (4.4)$$

Les équivalences requises par les équations gouvernantes (2.23), (3.6) et (4.4) sont celles indiquées par les relations (3.12)-(3.14)

En recherchant les équivalences pour les grandeurs telles que δ , u et v , nous obtenons respectivement les ordres de grandeur établis aux équations (3.15)-(3.17). De même, l'ordre de grandeur obtenu pour la fonction de courant ψ et le nombre de Nusselt local Nu_H sont respectivement ceux établis aux équations (3.21) et (3.22)). Au regard de tous ces résultats, les hypothèses de validité du régime de couche limite (3.1)-(3.5) se réduisent à celles (3.23) et (3.24) établies.

La résolution des équations gouvernantes (2.23), (3.6) et (4.4) avec les conditions aux limites (4.2) et (4.3) sera basée sur la méthode classique de

Karman-Polhausen. Nous allons rechercher l'expression analytique du taux de transfert de chaleur à travers le milieu poreux en fonction des paramètres de l'écoulement thermique.

Dans cette section, nous résoudrons analytiquement les équations gouvernantes en vue d'obtenir les expressions de l'épaisseur de la couche limite et du taux moyen de transfert de chaleur de la surface verticale dans le milieu poreux.

4.3.1 Epaisseur de la couche limite

En intégrant l'équation (3.6) de la position $y=0$ à la lisière la couche limite $y=\ell$ ($\ell \geq \delta$), et en tenant compte des équations au limites (4.2) et (4.3) nous obtenons l'équation suivante :

$$\mathbf{u}^n = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{a}} \frac{\mathbf{K}_1 \rho_\infty \mathbf{g} \beta}{\varepsilon} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_\infty) \quad (4.5)$$

En utilisant l'équation de continuité (2.18), l'équation d'énergie (4.4) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}\mathbf{T}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{v}\mathbf{T}) = \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial^2 y} \quad (4.6)$$

Le courant libre étant immobile à partir de la lisière du domaine de largeur δ , il résulte que $(\partial/\partial y)|_{y=\delta}=0$. Ainsi donc, en intégrant l'équation (4.6) dans le domaine $(\delta \times H)$ nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \mathbf{u}\mathbf{T} dy = -\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (4.7)$$

En substituant l'équation (4.5) dans l'équation (4.7), nous obtenons après réduction :

$$-\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\mathbf{n} \mathbf{K}_1 \rho_\infty \mathbf{g} \beta}{\mathbf{a} \varepsilon} \right)^{1/\mathbf{n}} \frac{d}{dx} \int_0^\delta \Phi^{(\mathbf{n}+1)/\mathbf{n}} dy \quad (4.8)$$

où

$$\Phi = T - T_\infty \quad (4.9)$$

Sur la base des équivalences établies pour les coordonnées cartésiennes dans la section analyse d'échelle, en tenant compte de l'écart de température ΔT évalué entre la surface verticale et la zone de courant libre, nous introduisons les transformations suivantes :

$$\chi(\eta) = \frac{\Phi}{\Phi_w} \quad (4.10)$$

avec

$$\eta = \frac{y}{\delta} \quad (4.11)$$

où η et $\chi(\eta)$ sont respectivement la variable affine et le profil de température dans le milieu poreux.

A partir de l'équation (4.11), nous observons d'une part que la variable affine est nulle ($\eta = 0$) sur la surface verticale ($y = 0$). Puisque sur cette surface $T = T_w$, le profil de température requiert la condition $\chi(0) = 1$. D'autre part, à partir de l'équation (4.11) nous observons également que, à la lisière de la couche limite ($y = \delta$) nous obtenons $\eta = 1$. Compte tenu du fait qu'au delà de cette limite ($y > \delta$) le champ de température est celui de l'écoulement libre ($T = T_\infty$), le profil de température requiert la condition $\chi(1) = 0$.

A partir de l'expression Φ obtenue de l'équation (4.10) et de la différentielle de la variable affine η écrite à partir de l'équation (5.11), nous

pouvons réécrire le premier membre de l'équation (4.8) sous la forme suivante :

$$-\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\alpha \Phi_w}{\delta} J \quad (4.12)$$

où

$$J = -\chi'(0) \quad (4.13)$$

Nous pouvons alors réécrire l'équation (4.8) de la façon suivante :

$$\frac{\alpha \Phi_w}{\delta} J = \left(\frac{n K_1 \rho_\infty g \beta}{a \varepsilon} \right)^{1/n} \frac{d}{dx} \int_0^\delta \Phi^{(n+1)/n} dy \quad (4.14)$$

En utilisant l'expression de la fonction Φ écrite à partir de l'équation (4.10), nous obtenons après transformation:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \Phi^{(n+1)/n} dy = \left[\int_0^1 \chi^{(n+1)/n} d\eta \right] \frac{d}{dx} \left[\delta \Phi_w^{(n+1)/n} \right] \quad (4.15)$$

Compte tenu de l'équation (4.15), nous obtenons à partir de l'équation (4.8) l'expression suivante :

$$\delta \frac{d}{dx} \left[\delta \Phi_w^{(n+1)/n} \right] = \frac{\alpha J}{I} \left[\frac{n \varepsilon}{a K_1 \rho_\infty g \beta} \right]^{1/n} \Phi_w \quad (4.16)$$

où :

$$I = \int_0^1 \chi^{(n+1)/n} d\eta \quad (4.17)$$

Cherchons à présent à exprimer l'expression entre crochet au second membre de l'équation (4.16) en fonction du nombre de Rayleigh Ra_x . En utilisant l'expression de la variation de température $T_w - T_\infty$ obtenue de

l'équation (4.2b), le nombre de Darcy-Rayleigh (équation (3.70)) s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{Ra}_x = \frac{\mathbf{K}_1 \rho_\infty \beta \mathbf{D} x^{n+\lambda}}{\varepsilon \alpha^n} \quad (4.18)$$

De l'expression du nombre de Rayleigh (équation (4.18)), nous obtenons l'égalité $\varepsilon / K_1 g \rho_\infty \beta = D x^{(n+\lambda)} / \alpha^n \mathbf{Ra}_x$. Portons cette dernière dans l'équation (4.16) et multiplions par la suite les deux membres de cette équation par $\Phi_w^{(n+1)/n}$. En intégrant membre à membre la nouvelle équation ainsi obtenue, nous parvenons à l'expression suivante :

$$\frac{1}{2} \left[\delta \Phi_w^{(n+1)/n} \right]^2 = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{I}} \left(\frac{\mathbf{a} \mathbf{D}}{\mathbf{n}} \right)^{1/n} \int_0^x \left[\frac{x'^{(n+\lambda)} \Phi_w^{(2n+1)}}{\mathbf{Ra}_{x'}} \right]^{1/n} d\mathbf{x}' \quad (4.19)$$

Remplaçons dans l'équation (4.19) \mathbf{Ra}_x par son expression donnée à l'équation (4.18) et $\Phi_w (= D x^\lambda)$. Après intégration et réarrangement nous parvenons à l'expression analytique de l'épaisseur de la couche limite qui s'écrit de la façon suivante:

$$\frac{\delta}{x} = \left\{ \frac{2\mathbf{n}}{(2\mathbf{n}+1)\lambda + \mathbf{n}} \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{I}} \mathbf{n}^{-1/n} \right\}^{1/2} \mathbf{Ra}_x^{-1/(2\mathbf{n})} \mathbf{a}^{1/(2\mathbf{n})} \quad (4.20)$$

Les ordres de grandeur respectifs de s paramètres \mathbf{Ra}_x et a dans le résultat exprimé à l'équation (4.20) confirment ceux obtenus dans l'équation (3.15) dans la sous-section analyse d'échelle.

En désignant par η_δ la valeur de la variable affine η à la lisière de la couche limite exprimée à $y = \delta$, nous obtenons à partir de l'équation (4.20) l'expression suivante pour η_δ :

$$\eta_{\delta} = \left\{ \frac{2\mathbf{n}}{(2\mathbf{n}+1)\lambda + \mathbf{n}} \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{I}} \mathbf{n}^{-1/\mathbf{n}} \right\}^{1/2} \mathbf{a}^{1/(2\mathbf{n})} \quad (4.21)$$

Les valeurs des intégrales I (équation (4.18)) et J (équation (4.13)) sont liés au profil de température réduite $\chi(\eta)$ qui demeure inconnu. Elles sont connues dès que le profil de température est déterminé, ce dernier devant satisfaire aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \chi(0) = 1 & \text{(a)} \\ \chi(1) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad (4.22)$$

Ainsi donc, la recherche de la solution au problème discuté ici, consisterait à choisir un profil de température $\chi(\eta)$ qui requiert les conditions aux limites (4.22).

4.3.2 Transfert de chaleur

Le flux local de chaleur q à travers la surface chauffée, défini relativement à l'équation (3.22) s'écrit :

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{y}} \right)_{\mathbf{y}=0} \quad (4.23)$$

A partir de l'équation (4.9), écrivons la température T en fonction de la différence de température Φ et exprimons sa dérivée par rapport à la variable y . Cette dernière évaluée sur la surface verticale ($y=0$), nous permet d'obtenir le résultat mentionné à l'équation (4.12). Il résulte une expression du flux local de chaleur q qui est la suivante:

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} \frac{\Phi_w}{\delta} \mathbf{J} \quad (4.24)$$

où J est donnée par l'équation (4.13).

Le transfert de chaleur de la surface verticale vers le milieu poreux se faisant par pure conduction au contact de la surface, suivant la loi de Newton relative au transfert de chaleur par conduction, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{q} = \mathbf{h} (\mathbf{T}_w - \mathbf{T}_\infty) \quad (4.25)$$

En tenant compte de l'équation (4.24), le coefficient de transfert local de chaleur h obtenu à partir de l'équation (4.25) s'écrit :

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{kJ}}{\delta} \quad (4.26)$$

En utilisant l'équation (4.25), le flux énergétique transféré localement à travers la surface chauffée, exprimée en terme de nombre de Nusselt local $Nu_x (= hx/k)$ défini par l'équation (2.28) s'écrit :

$$\mathbf{Nu}_x = \frac{\mathbf{xJ}}{\delta} \quad (4.27)$$

En portant dans l'équation (4.26) l'expression de l'épaisseur δ de la couche limite, nous obtenons pour le nombre de Nusselt local, l'expression suivante :

$$\mathbf{Nu}_x = \left\{ \frac{(2\mathbf{n}+1) \lambda + \mathbf{n}}{2\mathbf{n}} \mathbf{I J n}^{(1/\mathbf{n})} \right\}^{1/2} \mathbf{Ra}_x^{1/(2\mathbf{n})} \mathbf{a}^{-1/(2\mathbf{n})} \quad (4.28)$$

Intéressons-nous à présent au nombre de Nusselt moyen \overline{Nu}_{0-H} exprimant le taux de transfert de chaleur sur toute la surface verticale. Ce nombre $\overline{Nu}_{0-H} (= H \overline{h}_{0-H} / k)$ est défini à l'équation (2.29).

La quantité de chaleur Q^* évacuée sur toute la surface de hauteur H et de largeur ℓ s'écrit :

$$Q^* = \ell \int_0^H q \, dx \quad (4.29)$$

En utilisant l'équation (4.25), nous pouvons aussi écrire l'expression de la chaleur Q^* évacuée sur la surface de la façon suivante :

$$Q^* = \ell H (\overline{T_w} - T_\infty) \bar{h}_{0-H} \quad (4.30)$$

En tenant compte des équations (4.29) et (4.30), le coefficient moyen de transfert de chaleur par convection \bar{h}_{0-H} sur la surface s'écrit :

$$\bar{h}_{0-H} = \frac{\int_0^H q \, dx}{H(\overline{T_w} - T_\infty)} \quad (4.31)$$

où $\overline{T_w}$ est la température moyenne sur la surface.

En raison de la prévalence de faibles écarts de température sur la surface, assimilons la variation de température entre la température moyenne sur la plaque $\overline{T_w}$ et la température dans la zone de courant libre T_∞ à la moyenne des variations de température dans le milieu poreux, soit:

$$\overline{T_w} - T_\infty = \overline{T_w - T_\infty} \quad (4.32)$$

La moyenne des variations de température dans le milieu poreux est définie comme suit:

$$\overline{T_w - T_\infty} = \frac{1}{H} \int_0^H (T_w - T_\infty) \, dx \quad (4.33)$$

Compte tenu de la définition de la variation de température donnée à l'équation (4.2b), $T_w - T_\infty (= D x^\lambda)$, le calcul de l'intégrale figurant dans l'équation (4.33) nous permet d'établir que :

$$\overline{\mathbf{T}_w - \mathbf{T}_\infty} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{H}^\lambda}{1+\lambda} \quad (4.34)$$

A partir de l'équation (4.24) et de l'expression $\Phi_w (=Dx^\lambda)$ portées dans l'équation (4.31), nous arrivons à réécrire l'expression de coefficient moyen de transfert de chaleur par convection \bar{h}_{0-H} . Sur cette base, le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu}_{0-H} défini à l'équation (2.29) s'écrit de la façon suivante:

$$\overline{Nu}_{0-H} = \frac{(1+\lambda)\mathbf{J}}{\mathbf{H}^\lambda} \int_0^H \frac{x^\lambda}{\delta} dx \quad (4.35)$$

En utilisant les équations (4.20) et (3.70) donnant respectivement les expressions de δ et de Ra_x , nous parvenons à l'issue d'une intégration sur toute la hauteur de la surface et ceci après quelques réductions à l'expression suivante :

$$\overline{Nu}_{0-H} = \left\{ \frac{2\mathbf{n}^{(n+1)/n}(1+\lambda)^{(2n+1)/n}}{(2n+1)\lambda + n} \mathbf{I}\mathbf{J} \right\}^{1/2} \mathbf{R}_H^{1/(2n)} \mathbf{a}^{-1/(2n)} \quad (4.36)$$

où :

$$\mathbf{R}_H = \frac{\mathbf{K}_1 \rho_\infty \mathbf{g} \beta (\overline{\mathbf{T}_w - \mathbf{T}_\infty}) \mathbf{H}^n}{\alpha^n \varepsilon} \quad (4.37)$$

est le nombre de Darcy-Rayleigh basé sur la moyenne des différences de température entre la surface verticale et la zone de courant libre.

Nous remarquons que dans l'expression du résultat obtenu pour le nombre de Nusselt (équation (4.36)), les paramètres R_H et a ont respectivement les mêmes ordres de grandeur que ceux obtenus à l'équation (4.22) dans la sous-section analyse d'échelle.

4.4 Résultats et discussion

Compte tenu des conditions (équations (4.22)), asymptotiques requises pour le profil de température, le choix approprié pour ce profil est le suivant:

$$\chi(\eta) = 1 - \frac{17}{5}\eta + \frac{12}{5}\eta^2 \quad (4.38)$$

En posant $\lambda = 0$ (cas d'une surface chauffée isothermiquement) et en considérant le milieu poreux saturé par un fluide newtonien ($n = 1$), la présente solution (équation (4.28)) est conforme à celle obtenue par *Cheng et Minkowycz (1977)* à l'issue de la résolution du problème de même importance par la méthode de similitude.

a = K *	Nu _x / (Ra _x) ^{1/2}	
	Solution Affine <i>Vasseur et Degan</i> (1998)	Présente méthode (= (IJ/(2a)) ^{1/2})
(θ = 90°)		
0,1(<1,0)	1,404	1,337
1,0 (istrope)	0,444 <i>Cheng et coll.(1977)</i>	0,423
10(>1,0)	0,140	0,134

Table 4.1: Valeurs de $Nu_x / (Ra_x)^{1/2}$ obtenues pour différentes méthodes de résolution dans le cas où $n = 1$ et pour une surface chauffée de façon isotherme ($\lambda = 0$).

Cette même solution est aussi conforme à celle obtenue par *Vasseur et Degan (1998)* qui ont résolu entièrement les équations de la couche limite en utilisant successivement une procédure numérique et une méthode de similitude dans le cas où le milieu poreux est anisotrope en perméabilité. Dans le but de valider la méthode de résolution développée dans la présente étude, dans la table 4.1 les valeurs obtenues pour le paramètre $Nu_x/(Ra_x)^{1/2}$ ont été comparé à celles obtenues par le passé par les auteurs *Cheng et Minkowycz (1977)*, *Vasseur et Degan (1998)*.

a = K*	$Nu_x/(Ra_x)^{1/2}$	
	Solution Affine <i>Vasseur et Degan (1998)</i>	Présente méthode (= (IJ/a) ^{1/2})
($\theta = 90^\circ$)		
0,1 (< 1,0)	2,1465	2,0564
1,0 (isotrope)	0,6788 <i>Cheng et al. (1977)</i>	0,6503
10 (> 1,0)	0,2146	0,2056

Table 4.2 : Valeurs de $Nu_x/(Ra_x)^{1/2}$ obtenues pour différentes méthodes de résolution dans le cas où $n=1$ et pour une csurface chauffée par un flux de chaleur constant ($\lambda = 1/3$).

Considérant le cas d'une surface chauffée par un flux constant de chaleur, *Rastogi et Poulikakos (1995)* ont montré que la valeur de λ dépend de l'indice d'écoulement du fluide saturant le milieu poreux par la

relation $\lambda = n/(2n+1)$. Par conséquent pour les fluides newtoniens ($n=1$) cette expression donne $\lambda=1/3$; valeur obtenue par *Cheng et Minkowycz (1977)*. Dans l'objectif de valider la méthode des relations intégrales développée dans la présente étude, dans la table 4.2 les résultats obtenus pour le paramètre $Nu_x/(Ra_x)^{1/2}$ par cette méthode de résolution ont été comparé à ceux obtenus par les auteurs *Cheng et Minkowycz (1977)*, *Vasseur et Degan (1998)* par la solution affine.

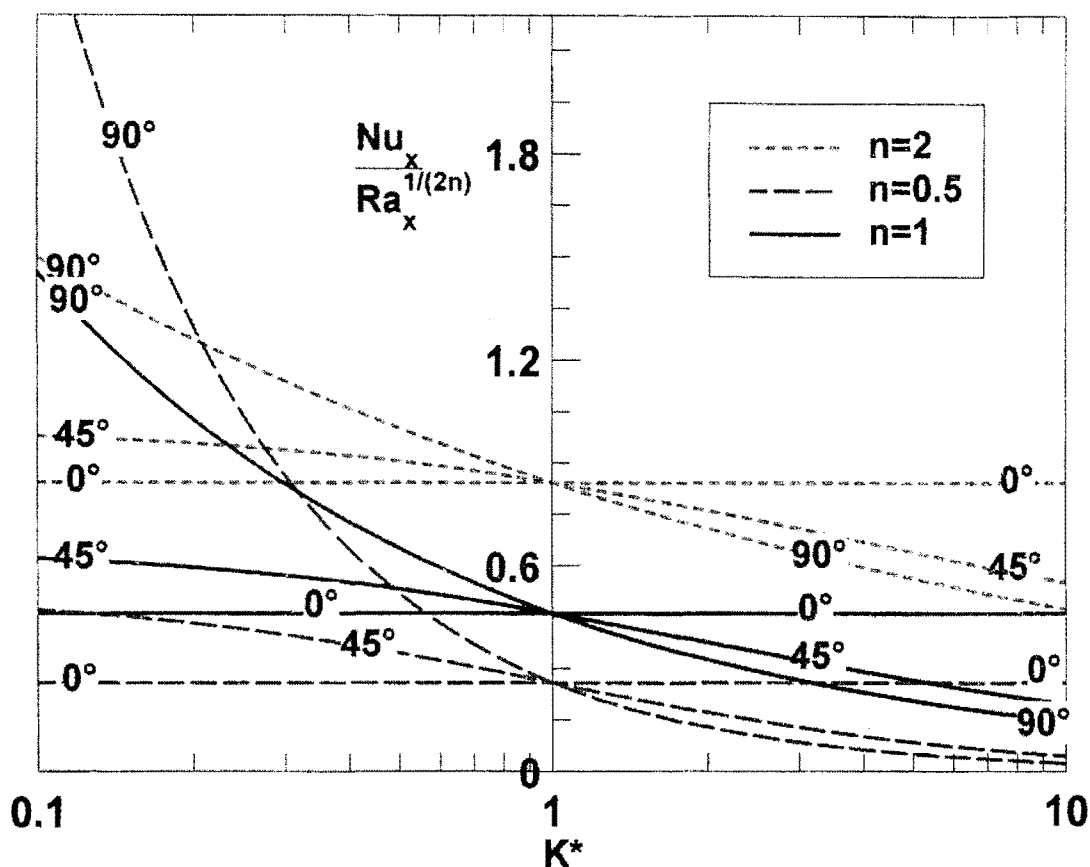


Figure 4.1: Variation du nombre de Nusselt en fonction de K^* pour différentes valeurs de l'angle d'orientation θ des axes principaux et pour différents indices d'écoulement.

La figure 4.1 présente le nombre de Nusselt à travers le paramètre $Nu_x/(Ra_x)^{1/(2n)}$ variant en fonction du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* pour différentes valeurs de l'angle d'orientation θ des axes principaux de

perméabilité dans le cas où la surface est chauffée isothermiquement ($\lambda = 0$) et pour différentes valeurs de l'indice d'écoulement n . En effet, à partir de l'équation (4.28), nous pouvons conclure que le paramètre $Nu_x / (Ra_x)^{1/(2n)}$ dépend du mode de chauffage c'est-à-dire du profil de température (à travers I et J) et des paramètres d'anisotropie K^* et θ à travers la constante $a (= \cos^2\theta + K^* \sin^2\theta)$. En général ce même comportement est observé dans le cas où le milieu poreux est saturé par un fluide pseudoplastique ($n = 0,5$) ou par un fluide dilatant ($n = 2$). Lorsque l'angle d'orientation $\theta = 0^\circ$ ($a = 1$), nous observons sur la figure 4.1 que pour chaque valeur de l'indice n , le paramètre $Nu_x / (Ra_x)^{1/(2n)}$ est constant et ne dépend pas du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* . Dans cette situation, le nombre de Nusselt local en régime de couche limite dépend uniquement du nombre de Rayleigh local Ra_x basé sur la perméabilité K_1 dont l'axe est parallèle à la direction de la surface.

Lorsque $\theta = 90^\circ$ ($a = K^*$), l'axe de perméabilité K_2 est aligné sur la direction de la surface pendant que celui de perméabilité K_1 lui est perpendiculaire. Nous pouvons aussi dire à partir de la figure 4.1 que le nombre de Nusselt dépend considérablement du rapport d'anisotropie K^* . Ce comportement découle du fait que le nombre de Rayleigh local Ra_x basé sur la perméabilité K_1 qui, est maintenant perpendiculaire à la surface n'est pas le paramètre approprié pour décrire la situation. Ainsi selon l'équation (4.28) en utilisant un nombre de Rayleigh basé sur la perméabilité K_2 (dont l'axe est parallèle à la direction de la surface) $Ra_x / a = K_2 \rho_\infty g \beta D x^{(\lambda+n)} / (\varepsilon \alpha^n)$ le nombre de Nusselt devient indépendant de K^* . Dans le cas où $\theta = 45^\circ$, nous observons que lorsque le rapport d'anisotropie K^* croît, le nombre de Nusselt local décroît. Cette situation, expliquée par les auteurs *Vasseur et Degan (1998)*, résulte du fait que pour un nombre de Rayleigh donné (c'est-à-dire

pour une valeur de K_1) une augmentation du rapport d'anisotropie K^* correspond à une diminution de la perméabilité K_2 affaiblissant ainsi l'écoulement convectif et le taux de transfert de chaleur.

Les effets de l'orientation θ des axes principaux de perméabilité du milieu poreux sur le nombre de Nusselt local Nu_x , pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie sont présentés à la figure 4.2.

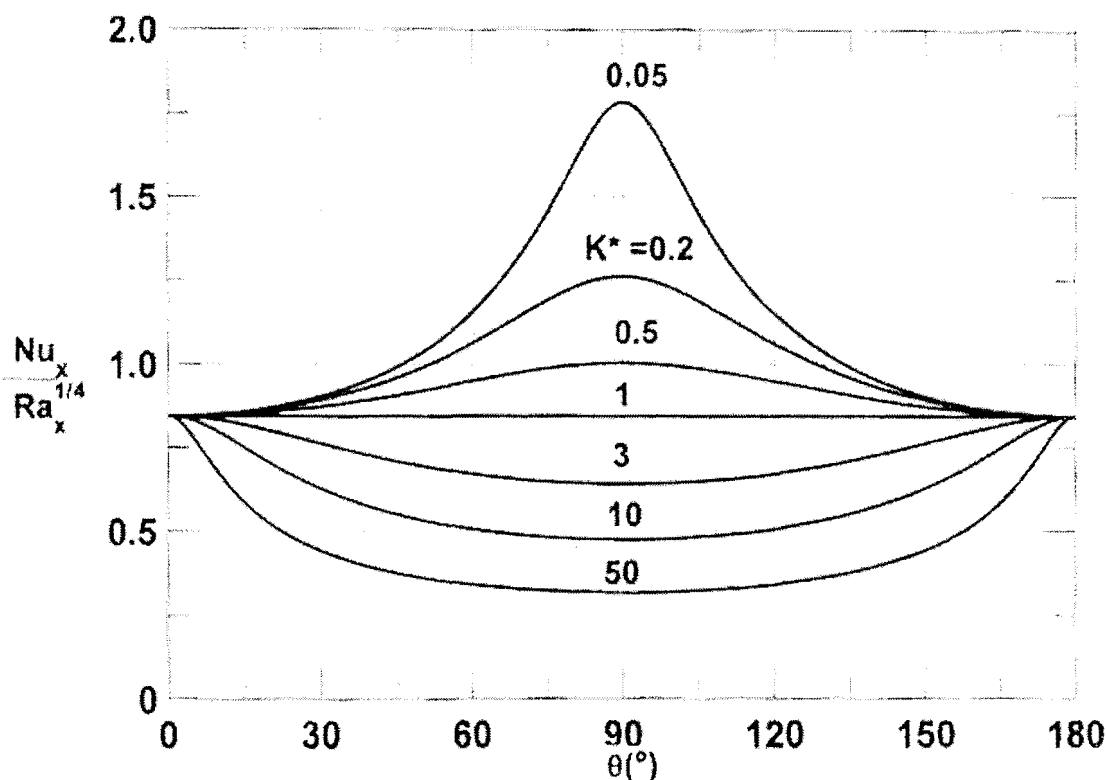


Figure 4.2 : Effet de l'angle d'orientation θ des axes principaux sur le nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie K^* .

La surface verticale chauffée isothermiquement est adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide dilatant ($n=2$). Dans le cas du milieu isotrope ($K^*=1$ et $a=1$), le paramètre $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$ est indépendant de θ . En général une symétrie des résultats par rapport à $\theta = 90^\circ$ est observée sur la figure 4.2.

Il peut être montré à partir des équations gouvernantes (2.20) et (4.4) et des conditions aux limites (4.2) et (4.3) que si $\psi(x, y)$ et $T(x, y)$ sont solutions pour Ra_H , K^* et θ alors $\psi(x, 1-y)$ sont aussi solutions pour Ra_H , K^* et $(\pi - \theta)$. Cette observation nous amène à limiter la discussion au domaine d'angle θ tel que $0 < \theta < 90^\circ$. Ainsi la figure 4.2 indique que lorsque le rapport d'anisotropie en perméabilité est inférieur à l'unité ($K^* < 1$), $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$ est minimal lorsque l'angle d'orientation $\theta = 0^\circ$ (une perméabilité minimale dans la direction verticale) et maximal lorsque $\theta = 90^\circ$ (une perméabilité maximale dans la direction verticale). La situation inverse est observée lorsque le rapport d'anisotropie en perméabilité est supérieur à l'unité ($K^* > 1$). Partant de ce fait, le transfert de chaleur par convection est maximal lorsque l'angle d'orientation $\theta = 0^\circ$ et minimal lorsque $\theta = 90^\circ$. Ce comportement peut être démontré par le fait que nous obtenons comme résultat $Nu_x / (Ra_x)^{1/4} = 0.8436 / a^{1/4}$ pour le cas étudié ici. Prenant la dérivée première de cette expression $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$ par rapport à θ et en la posant égale à zéro nous obtenons l'équation suivante $(K^* - 1) \sin 2\theta = 0$. Les solutions $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 90^\circ$ de cette dernière équation rendent $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$ respectivement maximal et minimal. De la dérivée seconde de la même expression, nous obtenons respectivement comme résultat $1,6872(1 - K^*)$ lorsque $\theta = 0^\circ$ et $1,6872(K^*)(K^* - 1)^{-5/4}$ lorsque $\theta = 90^\circ$. Ainsi lorsque le rapport d'anisotropie est supérieur à l'unité ($K^* > 1$), $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$ est maximal lorsque l'angle d'orientation $\theta = 0^\circ$ et minimal lorsque l'angle $\theta = 90^\circ$. La situation inverse est observée dans le cas où le rapport d'anisotropie est inférieur à l'unité ($K^* < 1$). Il résulte de ces résultats qu'un transfert maximal (minimal) de chaleur est atteint lorsque l'orientation de l'axe principal du milieu poreux anisotrope ayant la perméabilité la plus

élevée est parallèle (perpendiculaire) au champ gravitationnel. *Zhang (1993)*, *Degan et al (1995)* sont parvenus aux précédentes conclusions lorsqu'ils ont étudié les effets de l'anisotropie en perméabilité sur le transfert de chaleur par convection dans une cavité verticale confinée par un milieu poreux dont les axes de perméabilité sont orientés arbitrairement. Le milieu poreux étant chauffé isothermiquement par le côté.

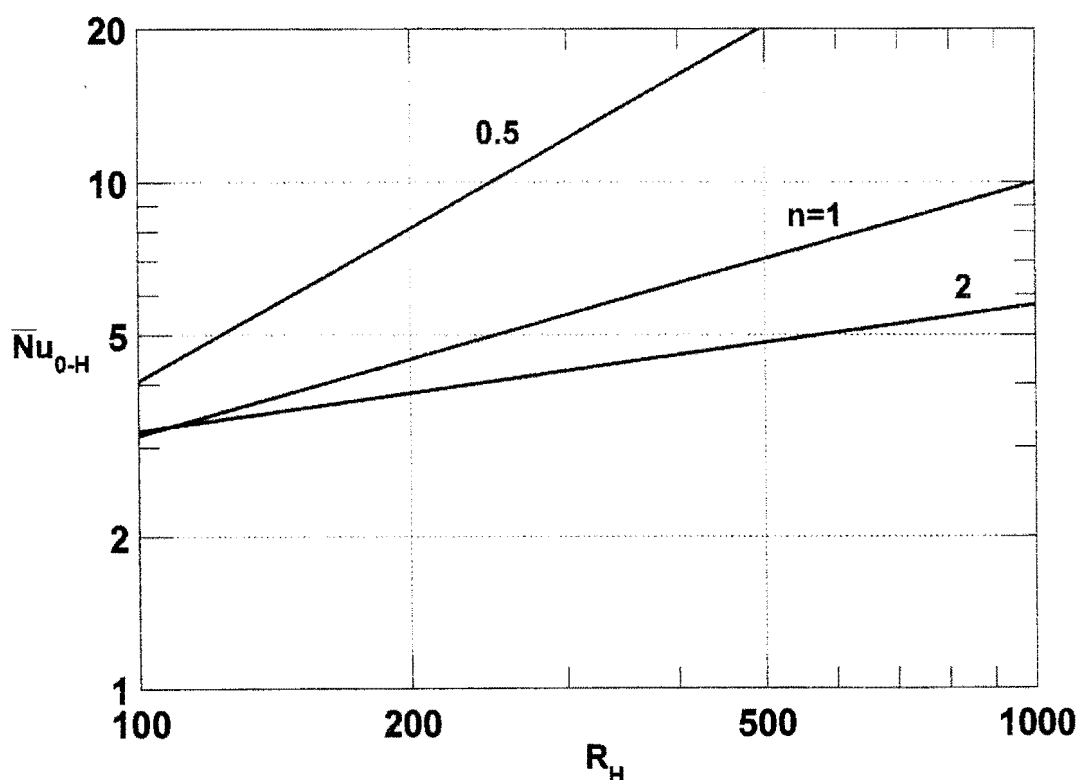


Figure 4.3 : Variation du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu}_{0-H} en fonction du nombre de Rayleigh R_H modifié et pour différentes valeurs de l'indice d'écoulement n .

La figure 4.3 montre les effets du nombre de Darcy-Rayleigh modifié R_H , sur le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu}_{0-H} lorsque $K^*=10$, $\theta=90^\circ$ et pour différents indices d'écoulement n , lorsque la surface est chauffée par un flux constant de chaleur.

Comme il a été mentionné ci-dessus, l'exposant λ figurant dans la loi de puissance dépend de l'indice de viscosité par la relation $\lambda = n/(2n+1)$. Sur la figure 4.3, les courbes correspondantes à chaque valeur de n sont des droites. Les pentes de ces droites sont fonction de n . Nous pouvons observer que le transfert de chaleur n'est amorcé que pour des valeurs élevées du nombre de Darcy-Rayleigh. Ainsi pour un nombre de Darcy-Rayleigh fixé, le nombre de Nusselt moyen croît lorsque l'indice d'écoulement devient de plus en plus faible. Ce résultat a été obtenu par *Bian et coll.(1994)* à l'issue de l'étude numérique la couche limite en convection naturelle dans une cavité verticale confinant un milieu poreux saturé par un fluide non Newtonien.

4.5 Conclusion

Le problème étudié dans le présent chapitre est relatif à la convection naturelle en régime de couche limite au voisinage d'une surface verticale. Cette dernière est adjacente à un milieu poreux anisotrope en perméabilité et saturé par un fluide non-newtonien. Le fluide est à caractéristique rhéologique en loi de puissance de type *Ostwald-de-Waele*. De l'analyse des résultats, il se dégage les conclusions suivantes :

- 1) L'écoulement convectif le long d'une surface verticale bordant un milieu poreux est considérablement affecté par les paramètres anisotropes que sont le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et l'angle d'orientation θ des axes principaux de perméabilité par rapport au champ gravitationnel
- 2) Le transfert de chaleur le long de la surface est maximal (minimal) lorsque l'axe principal ayant la perméabilité élevée est orienté parallèlement (perpendiculairement) au champ gravitationnel.
- 3) Pour des valeurs de plus en plus élevées de nombre de Darcy-Rayleigh modifié, lorsque l'indice d'écoulement du fluide devient de plus en

plus faible $n < 1$, l'écoulement convectif le long de la surface devient de plus en plus important.

Chapitre 5

**Solution affine au problème de pénétration
des courants convectifs à l'intérieur d'un
puits cylindrique vertical débouchant dans
un large réservoir**

5.1 Introduction

Dans le but d'approcher le réalisme physique du milieu poreux, il sera prise en compte dans la présente étude l'anisotropie en perméabilité de la matrice solide du milieu poreux. Ainsi, il sera analysé dans ce chapitre, l'influence de l'anisotropie sur la convection naturelle pénétrante dans un puits de forme cylindrique confinant un milieu poreux. Ce dernier est considéré hydrodynamiquement anisotrope avec des axes principaux orientés dans une direction oblique par rapport à la force gravitationnelle. Comme pour une cavité de grande extension, les équations gouvernantes du phénomène de convection seront résolues analytiquement en régime affine.

5.2 Modèle physique et formulation mathématique

5.2.1 Modèle physique

Le modèle physique considéré ici est constitué par un cylindre vertical bidimensionnel et de grande extension confinant un milieu poreux composé par une distribution éparse de particules solides, le tout saturé par un fluide newtonien. Le puits de longueur L , s'ouvre par sa section supérieure dans un large réservoir semi-infini. A l'image de la situation rencontrée dans la nature, le milieu poreux est hydrodynamiquement anisotrope. Les perméabilités le long des axes principaux de la matrice solide du milieu poreux sont K_1 et K_2 . L'anisotropie du milieu poreux est caractérisée par le rapport d'anisotropie K^* et l'angle θ que fait l'axe horizontal avec l'axe principal de perméabilité K_2 . Ainsi, la rotation des axes principaux autour de l'origine O est décrite par l'angle θ , conformément aux annotations de la figure 5.1). En conséquence, dans la présente analyse, les coordonnées polaires (r, x) seront utilisées dans l'étude de la structure du champ d'écoulement thermique qui de ce fait est à symétrie axiale. La surface latérale du cylindre est à la température T_l ,

pendant que le réservoir semi-infini reposant sur sa section supérieure est à une température T_2 relativement plus basse ($T_2 < T_1$).

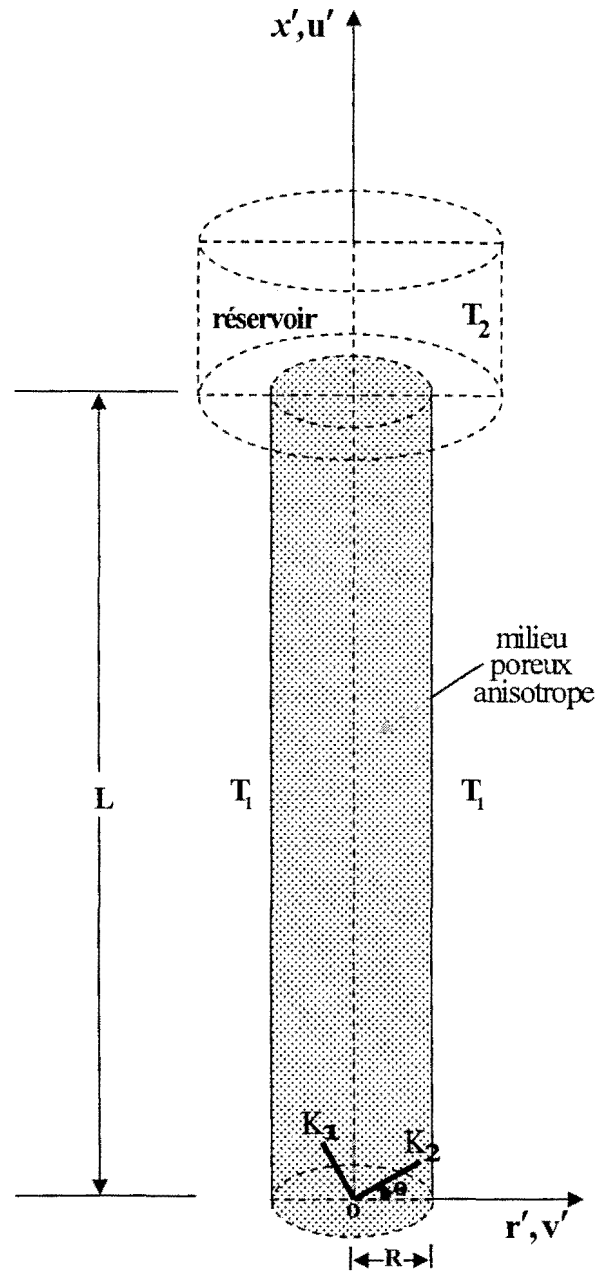


Figure 5.1 : Configuration géométrique du puits cylindrique et système d'axes de coordonnées.

Il résulte que cet état thermique différentiel donne naissance à un système physique potentiellement instable qui entraîne que l'écoulement convectif à l'intérieur du cylindre droit est tel que le fluide froid descend dans le puits par la région médiane de la section circulaire du cylindre tandis que le fluide chaud monte le long de la paroi interne chauffée du cylindre. Le fluide saturant le milieu poreux est visqueux, incompressible et supposé en équilibre thermodynamique local en tout point avec le milieu poreux. Les propriétés thermophysiques du fluide sont supposées constantes, à l'exception de la densité dans le terme de poussée dans l'équation du mouvement (approximation de Boussinesq).

5.2.2 Formulati on mathématique

Dans les conditions ci-dessus indiquées, les équations (2.15), (2.16) et (4.1) régissant l'écoulement thermique en régime permanent en milieu poreux saturé sont applicables ici.

Dans le système de coordonnées cylindriques, les équations gouvernantes traduisant la conservation de la masse (2.15), la conservation de la quantité de mouvement (2.16) et la conservation de l'énergie (2.20), s'écrivent respectivement de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r'}(r'v') + \frac{\partial}{\partial x'}(r'u') = 0 \quad (5.1)$$

$$a u' - c v' = - \frac{K_1}{\mu} \left(\frac{\partial p'}{\partial x'} + \rho g \right) \quad (5.2)$$

$$- c u' + b v' = - \frac{K_1}{\mu} \left(\frac{\partial p'}{\partial r'} \right) \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u}' \frac{\partial \mathbf{T}'}{\partial x'} + \mathbf{v}' \frac{\partial \mathbf{T}'}{\partial r'} = \alpha \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial \mathbf{T}'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{T}'}{\partial x'^2} \right] \quad (5.4)$$

où a, b, c sont des constantes données par les relations (2.26).

L'équation d'état du fluide newtonien considéré dans cet essai et exprimée par l'approximation de Boussinesq s'écrit :

$$\rho = \rho_1 [1 - \beta (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_1)] \quad (5.5)$$

Tenant compte de l'approximation de Boussinesq (5.5), et prenant le rotationnel des équations (5.2) et (5.3) permettent l'élimination du terme de pression dans ces équations, on aboutit à l'équation de mouvement qui s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial r'} + \mathbf{c} \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x'} - \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial r'} \right) - \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x'} = - \frac{\mathbf{K}_1 \mathbf{g} \beta}{\nu} \left(\frac{\partial \mathbf{T}'}{\partial r'} \right) \quad (5.6)$$

5.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites appropriées s'écrivent de la façon suivante :

- La condition d'imperméabilité de la paroi solide de l'enceinte se traduit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{0}: & \mathbf{u}' = \mathbf{0} & \text{(a)} \\ \mathbf{r}' = \mathbf{R}: & \mathbf{v}' = \mathbf{0} & \text{(b)} \end{cases} \quad (5.7)$$

- Les conditions thermiques sur la paroi latérale de cette enceinte cylindrique et sur la section supérieure droite de cette dernière en contact avec le réservoir s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} x' = 0: & T' = T_1 & \text{(a)} \\ r' = R: & T' = T_2 & \text{(b)} \end{cases} \quad (5.8)$$

où R représente le rayon de la section droite du puits cylindrique.

5.4 Résolution

5.4.1 Analyse d'échelle et adimensionnalisation

Reconnaissant L et R comme étant les échelles caractéristiques du modèle physique dans le système de coordonnées cylindriques nous pouvons écrire :

$$x' \sim L \quad ; \quad r' \sim R \quad (5.9)$$

De ce fait, les équations gouvernantes (5.1), (5.4) et (5.6) requièrent les équivalences suivantes :

$$\frac{u'}{L} \sim \frac{v'}{R} \quad (5.10)$$

$$u' \frac{\Delta T}{L}, \quad v' \frac{\Delta T}{R} \sim \alpha \frac{\Delta T}{R^2}, \quad \alpha \frac{\Delta T}{L^2} \quad (5.11)$$

$$a \frac{u'}{R}, \quad c \frac{u'}{L}, \quad c \frac{v'}{L}, \quad b \frac{v'}{L} \sim \frac{K_1 g \beta}{\nu} \frac{\Delta T}{R} \quad (5.12)$$

où $\Delta T (=T_1 - T_2)$ est le facteur d'échelle de normalisation de la température.

En résolvant les équations (5.10)-(5.12) nous obtenons pour u' , v' et ΔT les équivalences suivantes :

$$u' \sim \frac{\alpha L}{R^2} \quad (5.13)$$

$$v' \sim \alpha R^{-1} \quad (5.14)$$

$$\Delta T \sim a \frac{\alpha v L}{K_1 g \beta R^2} \quad (5.15)$$

Sur la base des équivalences (5.9) et (5.13) à (5.15) qui déterminent les facteurs d'échelles de normalisation pour les grandeurs d'intérêt, nous introduisons ici les variables de transformations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x &= x'/L & r &= r'/R \\ u &= u' R^2/(\alpha L) & v &= v' R/\alpha \\ T &= \frac{K_1 g \beta L (T' - T_1)}{\alpha v} \left(\frac{R}{L}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

En introduisant les variables adimensionnelles (5.16) dans les équations (5.1), (5.4) et (5.6), les équations gouvernantes adimensionnelles relatives à la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie en régime permanent s'écrivent respectivement:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (5.17)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial r} + c \left(\frac{R}{L}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r}\right) - b \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad (5.18)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5.19)$$

Les conditions aux limites (5.7) et (5.8) formulées en variables adimensionnelles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} r = 1: & v = 0, \quad T = 0 \quad (\text{a}) \\ x = 0: & u = 0, \quad T = 0 \quad (\text{b}) \end{array} \right. \quad (5.20)$$

Comme il a été discuté par *Bejan (1980)*, le puits cylindrique et le réservoir dans lequel il débouche ont la même température au point de l'axe médian du cylindre. Ainsi :

$$x=1: \quad r=0, \quad T = -Ra_L \left(\frac{R}{L} \right)^2 \quad (5.21)$$

où Ra_L le nombre Darcy-Rayleigh basé sur la hauteur L du puits a pour expression :

$$Ra_L = \frac{K_1 g \beta L (T_1 - T_2)}{\alpha \nu} \quad (5.22)$$

A cause de la grande extension du puits cylindrique, le rapport de forme (R/L) est très faible, soit $(R/L) \ll 1$. Par conséquent les termes dont ce rapport constitue un facteur dans les équations (5.18) et (5.19) seront négligés. Sur cette base, les équations adimensionnées (5.18) et (5.19) se réduisent aux équations suivantes :

$$a \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} \quad (5.23)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad (5.24)$$

Tenant compte de l'équivalence (5.9) et de la condition requise pour le rapport de forme du puits cylindrique, il résulte que $x' \gg r'$ et par conséquent $\partial/\partial x' \ll \partial/\partial r'$. Sur cette base, en retournant à l'équation de mouvement (5.6) les conditions de validité de la présente analyse sont les suivantes :

$$a \frac{\partial u'}{\partial r'} \gg c \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{r}'} \gg \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{x}'} \quad (5.26)$$

Sur la base des relations d'équivalence (5.14) et (5.15), nous parvenons à montrer que la présente analyse n'est valide que si les conditions suivantes :

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \gg \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \quad (5.27)$$

et

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \gg \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \right)^2 \quad (5.28)$$

sont satisfaites.

Recherchons à présent les ordres de grandeur de la fonction de courant ψ et du nombre de Nusselt Nu mesurant le transfert thermique entre le puits et le réservoir.

Dans le système de coordonnées cylindriques, la fonction de courant ψ est définie telle que :

$$\mathbf{r}'\mathbf{u}' = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}'} \quad , \quad \mathbf{r}'\mathbf{v}' = - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}'} \quad (5.29)$$

Les relations (5.29) rendent automatiquement satisfaite l'équation de continuité (5.1). A partir des relations d'équivalence (5.9), (5.12) et l'équation (5.22), nous obtenons pour la fonction de courant l'ordre de grandeur suivant :

$$\psi \sim \alpha \mathbf{a}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Ra}_L \quad (5.30)$$

Le nombre de Nusselt mesurant le transfert thermique entre le puits sur sa section supérieure droite et le réservoir a pour expression :

$$\mathbf{Nu} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{kL}(T_1 - T_2)} \quad (5.31)$$

où Q est le flux de chaleur transférée à la couche poreuse contenue dans le cylindre. Ce flux de chaleur a pour expression :

$$Q = \int_0^R (\rho c_p)_f r' u' T' d(\pi r'^2) \quad (5.32)$$

A l'extrémité supérieure du puits cylindrique, sur sa section droite en contact avec le réservoir $x' = L$. Ainsi l'équation (5.32) peut être réécrite sous la forme :

$$Q = 2\pi(\rho c_p)_f \left[\int_0^R r' u' T' dr' \right]_{x'=L} \quad (5.33)$$

A partir des équivalences (5.9), (5.13) et (5.15) et l'équation (5.33), l'ordre de grandeur du flux de chaleur est donné par la relation suivante:

$$Q \sim \alpha a^{-1} L Ra_L (\rho c_p)_f \left(\frac{R}{L} \right)^2 \Delta T \quad (5.34)$$

En utilisant l'expression de la diffusivité thermique du milieu poreux α ($= k/(\rho c_p)_f$) définie relativement à l'équation (2.20), et en tenant compte de l'équivalence (5.34), nous obtenons pour le nombre de Nusselt donné à l'équation (5.31) l'ordre de grandeur suivant :

$$Nu \sim a^{-1} Ra_L \left(\frac{R}{L} \right)^2 \quad (5.35)$$

5.4.2 Solution affine

Suivant les développements effectués par *Lighthill (1953)* en étudiant la convection naturelle dans les tubes confinant un fluide, et par *Bejan (1980)* dans l'étude de la convection naturelle dans un cylindre vertical confinant un milieu poreux isotrope en perméabilité, il existe une solution affine au

problème de convection décrit par les équations (5.17), (5.18) et (5.19). En effet, lorsque la composante radiale de la vitesse d'écoulement et la température ont des profils analogues, non dépendants de la position x définie sur l'axe vertical du cylindre, il existe en régime affine, un modèle d'écoulement convectif naturel dans le puits.

Lorsque la composante radiale de la vitesse d'écoulement dépend uniquement de la coordonnée cylindrique r , la distribution de température T et la composante longitudinale u de la vitesse de l'écoulement sont toutes proportionnelles à la coordonnée x . Par conséquent, la méthode d'analyse qui sera développée au cours de cette investigation serait basée sur celles utilisées par *Lighthill (1953)* et par *Bejan (1980)*.

A cause de la non-linéarité observée au niveau de l'équation d'énergie (5.19), il n'existe pas de solutions analytiques exactes pour les composantes u et v de la vitesse d'écoulement et le champ de température. Ainsi, sur la base des équivalences établies dans la section précédente, nous allons rechercher par la méthode des relations intégrales, la solution aux équations (5.23) et (5.24) et satisfaisant la condition imposée à l'équation (5.21).

Dans les conditions prescrites à l'équation (5.21), nous pouvons écrire le long de l'axe central du puits cylindrique ($r=0$) et sur la surface latérale ($r=1$) les équations suivantes:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^1 r u T dr \right) = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} \quad (5.36)$$

$$\left(u \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{r=0} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} \quad (5.37)$$

$$0 = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} \quad (5.38)$$

En plus des équations précédentes (5.36)-(5.38), l'équation de continuité (5.17) sous sa forme intégrale s'écrit:

$$\int_0^1 r u dr = 0 \quad (5.39)$$

Il convient maintenant de rechercher pour les distributions de température et de vitesse, les profils adéquats satisfaisants identiquement à l'équation de mouvement (5.18). Généralement, dans ces conditions une distribution polynomiale pour la distribution de température et la composante verticale de la vitesse s'avère plus appropriée. Ainsi, choisissons pour les profils les expressions suivantes :

$$T = x (m_0 + m_2 r^2 + m_4 r^4 + m_6 r^6) \quad (5.40)$$

$$u = \frac{x}{a} (n_0 + m_2 r^2 + m_4 r^4 + m_6 r^6) \quad (5.41)$$

Les équations (5.40) et (5.41) rendent identiquement satisfaite l'équation de mouvement (5.18). La résolution des équations (5.36)-(5.39) compte tenu de la condition (5.20a) et des équations (5.40) et (5.41) conduit à l'obtention de l'équation (5.42a) et du système d'équations (5.42b) dont les inconnues n_0 , m_0 , m_2 , m_4 et m_6 seront déterminées. Ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} & \frac{m_0 n_0}{a} + \frac{(m_0 + n_0) m_2}{2a} + \frac{(m_0 + n_0) m_4 + (m_2)^2}{3a} + \frac{(m_0 + n_0) m_6 + 2m_2 m_4}{4a} + \\ & + \frac{2m_2 m_6 + (m_4)^2}{5a} + \frac{m_4 m_6}{3a} + \frac{(m_6)^2}{7a} - 2(m_2 + 2m_4 + 3m_6) = 0 \end{aligned} \quad (5.42a)$$

$$\begin{cases} 12n_0 + 6m_2 + 4m_4 + 3m_6 = 0 \\ m_0 + m_2 + m_4 + m_6 = 0 \\ m_2 + 4m_4 + 9m_6 = 0 \\ m_0 n_0 - 4m_2 a = 0 \end{cases} \quad (5.42b)$$

La résolution des équations du système (5.42b) permet d'exprimer les constantes n_0, m_2, m_4, m_6 en fonction de m_0 et de a . Ce faisant, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_2 = \frac{24m_0^2}{7m_0 + 240a} \quad ; \quad m_4 = \frac{3m_0(17m_0 + 144a)}{7m_0 + 240a} \\ m_6 = \frac{4m_0(5m_0 + 48a)}{7m_0 + 240a} \quad ; \quad n_0 = \frac{96am_0}{7m_0 + 240a} \end{array} \right. \quad (5.43)$$

Portons les différentes expressions du système d'équations (5.43) dans l'équation (5.42a), nous aboutissons à une équation du troisième degré en m_0 qui s'écrit :

$$327\left(\frac{m_0}{a}\right)^3 + 23700\left(\frac{m_0}{a}\right)^2 + 643968\left(\frac{m_0}{a}\right) + 4838400 = 0 \quad (5.44)$$

De la résolution de cette équation (5.44), nous obtenons la solution suivante:

$$m_0 = -11,81038 a \quad (5.45)$$

Pour un milieu poreux isotrope en perméabilité ($a=1$), la solution m_0 donnée par l'équation (5.45) est identique à celle obtenue par le passé par *Bejan (1980)*.

Dans le modèle d'écoulement en régime affine prédit par *Bejan (1980)*, la profondeur de pénétration des courants de convection dans la matrice du milieu poreux confiné par le puits est proportionnelle à la différence de température caractérisant l'écoulement. Désignons par L_x le facteur d'échelle de normalisation de la profondeur de pénétration. De l'équivalence (5.11), nous pouvons écrire que :

$$\frac{\mathbf{u}'}{\mathbf{L}_x} \sim \frac{\mathbf{v}'}{\mathbf{R}} \quad (5.46)$$

Sur la base de l'égalité $\alpha Ra_L/L = K_I g \beta L \Delta T / \nu$ obtenue de l'équation (5.22), et de l'équivalence (5.13), nous obtenons pour la composante u' de la vitesse l'équivalence qui suit :

$$\mathbf{u}' \sim \alpha \mathbf{a}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{a}_L \quad (5.47)$$

Tenant compte des équivalences (5.14) et (5.47), nous obtenons pour le facteur d'échelle de normalisation de la profondeur de pénétration L_x l'équivalence suivante :

$$\mathbf{L}_x \sim \mathbf{a}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{R} \mathbf{a}_L \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \right)^2 \quad (5.48)$$

Désignons par ℓ_s le modèle en régime affine de la profondeur de pénétration de l'écoulement convectif dans le puits. A cette profondeur, selon le système d'équations (5.16) nous avons $x = \ell_s / L$. Ainsi donc, la distribution de température (5.40) rapportée à la condition (5.21) permet d'écrire :

$$\frac{\ell_s}{\mathbf{L}} = -\frac{1}{\mathbf{m}_0} \mathbf{R} \mathbf{a}_L \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \right)^2 \quad (5.49)$$

En portant dans l'équation (5.49) l'équation (5.45) donnant l'expression de \mathbf{m}_0 , on obtient la relation suivante :

$$\frac{\ell_s}{\mathbf{L}} = 0,08467 \frac{\mathbf{R} \mathbf{a}_L}{\mathbf{a}} \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \right)^2 \quad (5.50)$$

Nous remarquons, à partir de l'équation (5.50) que la profondeur de pénétration de l'écoulement convectif dans la couche poreuse confinée par le puits cylindrique dépend des paramètres anisotropes du milieu poreux. Compte tenu du fait que, la profondeur de pénétration de l'écoulement

convectif dans le puits doit être inférieure ou égale à la hauteur L du puits ($(\ell_s/L) \leq 1$), sur la base de l'équation (5.50) la condition d'existence en régime affine du modèle d'écoulement convectif dans le puits s'écrit :

$$\mathbf{Ra}_L \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \right)^2 \leq 11.81 \mathbf{a} \quad (5.51)$$

A partir de l'équation (5.31), le nombre de Nusselt mesurant le transfert thermique entre le puits sur sa section supérieure droite et le réservoir, s'écrit compte tenu de l'équation (5.33) sous la forme suivante :

$$\mathbf{Nu} = \frac{2\pi(\rho c_p)_f}{\mathbf{kL}(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2)} \left[\int_0^{\mathbf{R}} \mathbf{r}' \mathbf{u}' \mathbf{T}' \mathbf{d}\mathbf{r}' \right]_{x'=\mathbf{L}} \quad (5.52)$$

En utilisant les variables adimensionnelles définies au système (5.16), l'expression de la diffusivité thermique du milieu poreux $\alpha (=k/(\rho c_p)_f)$ et l'équation (5.49), le nombre de Nusselt sous sa forme adimensionnelle s'écrit :

$$\mathbf{Nu} = \frac{2\pi}{\mathbf{Ra}_L \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \right)^2} \mathbf{I} \quad (5.53)$$

où

$$\mathbf{I} = \left[\int_0^1 \mathbf{r} \mathbf{u} \mathbf{T} \mathbf{d}\mathbf{r} \right]_{x=1} \quad (5.54)$$

En utilisant la distribution de température (5.40) et l'expression (5.41) donnant la composante u de la vitesse de filtration du fluide à travers la matrice poreuse, on réécrit l'intégrale \mathbf{I} . A l'aide des expressions du système (5.43) on réduit l'expression de \mathbf{I} après l'avoir calculée. On trouve le résultat suivant :

$$I = 0,0406 \frac{m_0^2}{a} \quad (5.55)$$

En portant I dans l'équation (5.53) après y avoir remplacé l'expression de m_0 obtenue de l'équation (5.45), nous parvenons à l'expression du nombre de Nusselt qui s'écrit de la façon suivante :

$$Nu = \frac{0,255}{a} Ra_L \left(\frac{R}{L} \right)^2 \quad (5.56)$$

Il est aisé de constater que, aussi bien le résultat obtenu pour la profondeur de pénétration de l'écoulement convection dans le puits (équation (5.50)), que celui relatif au nombre de Nusselt (équation (5.56)) sont en accord avec ceux prédits respectivement par les équations (5.48) et (5.35).

5.5 Résultats et discussion

En vue de valider la présente étude, un modèle de l'écoulement à l'intérieur du puits cylindrique est présenté sur la figure 5.2. Cette figure illustre la profondeur de pénétration des lignes de courant ($\psi = \text{constante}$) de l'écoulement convectif en régime de similitude dans la cavité poreuse confinant un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$ c'est-à-dire $a = 1$) dont les axes principaux de perméabilité sont confondus avec les axes de coordonnées ($\theta = 0^\circ$). Les résultats obtenus dans ce cas particulier (milieu poreux isotrope) sont en accord avec ceux obtenus par *Bejan (1980)*. En combinant les équations (5.29) et (5.41), on montre que la fonction de courant est donnée par la relation $\psi = (xr/a)[n_0 + m_2(r^2/3) + m_4(r^4/5) + m_6(r^6/7)]$. Cette fonction est constante pour des valeurs données de r et de x . En choisissant les mêmes valeurs que celles utilisées par le passé par *Bejan*, nous avons tracé les lignes de courant $[\psi/(-0,7215) = \text{constante}]$ représentées sur la figure 5.2. Cette

figure montre un champ d'écoulement qui est identique à celui obtenu par cet auteur. De la comparaison de la température (relativement plus basse ($T=0$)) de la paroi latérale de l'enceinte à celle qui prévaut le long de l'axe central de la cavité qui est la même que celle du réservoir, il résulte qu'un écoulement de fluide froid descend le long de l'axe central. Au même moment, un écoulement de fluide chaud résultant d'une canalisation de l'écoulement et de la couche limite dynamique, monte le long de la paroi interne du cylindre.

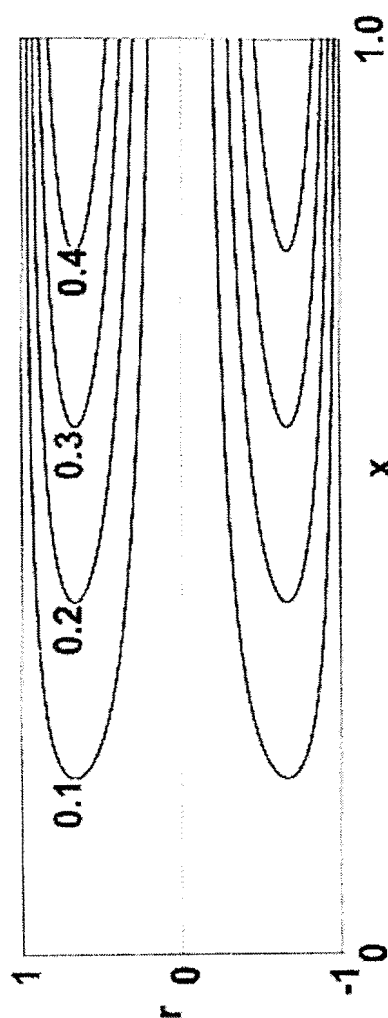


Figure 5.2 : Lignes de courant ($\psi/(-0.7215) = \text{constant}$).

Analysons maintenant les effets des paramètres d'anisotropie sur le champ thermique. Les effets du rapport d'anisotropie en perméabilité sur les

isothermes $[T/(-0,7215) = \text{constante}]$ sont présentés sur la figure 5.3 lorsque l'angle d'orientation des axes principaux $\theta = 45^\circ$. La figure 5.3a) illustre le champ de température correspondant au cas d'un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$).

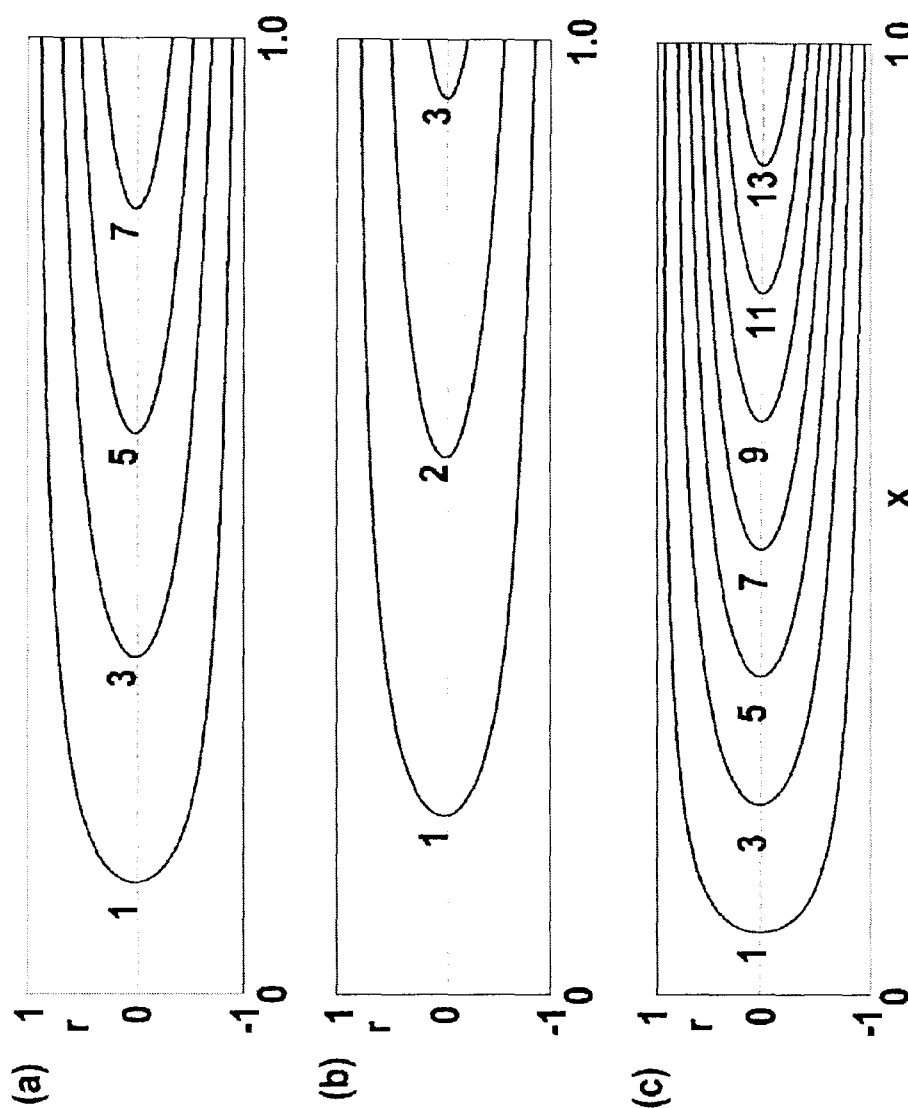


Figure 5.3 : Isothermes $(T/(-0.7215) = \text{constant})$ obtenues dans les cas:

- (a) $K^* = 1, \theta = 45^\circ$;
- (b) $K^* = 0,25, \theta = 45^\circ$;
- (c) $K^* = 2,5, \theta = 45^\circ$.

En général, nous observons sur cette figure des cellules convectives qui descendent dans le puits à partir de sa section supérieure droite, sur une profondeur inférieure à la hauteur du puits, tout en adoptant une disposition symétrique par rapport à l'axe médian ($r=0$) du puits cylindrique. Ceci dénote de l'existence d'une couche limite thermique le long de la paroi verticale interne du puits. A cause du faible rayon de courbure du puits cylindrique, nous observons à l'intérieur de ce dernier, au-delà de la profondeur de pénétration des courants convectifs, une zone pratiquement immobile dans laquelle stagne le fluide saturant le milieu. Lorsque nous choisissons de faibles valeurs pour les isothermes, la couche limite thermique le long de la paroi verticale de l'enceinte cylindrique devient de plus en plus épaisse favorisant ainsi une meilleure pénétration de l'écoulement convectif.

Par comparaison au cas du milieu poreux isotrope (figure 5.3a), lorsque nous diminuons le rapport d'anisotropie de la valeur 1 à 0,25, nous observons sur la figure 5.3b) une remontée des isothermes du puits. Par exemple, l'isotherme $[T/(-0,7215)=1]$ remonte du puits de la position $x \approx 0,12$ à 0,18 le long de l'axe central du puits, pendant que celui $[T/(-0,7215)=3]$ remonte de la position $x \approx 0,37$ à 0,93. Ces isothermes sont également beaucoup plus réparties dans la région centrale du puits, région avoisinante de la ligne d'écoulement froid. Ce comportement peut être expliqué par le fait que, pour un angle d'orientation θ fixé et une valeur donnée de la variable $Ra_L(R/L)^2$, une diminution du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* équivaut à une augmentation de la perméabilité K_2 qui a pour conséquence une croissance du champ thermique. Le phénomène inverse est observé lorsque $K^* > 1$. Ainsi, la figure 5.3c montre que, lorsque le rapport d'anisotropie en perméabilité est supérieur à l'unité ($K^*=2,5$), toutes les isothermes sont fortement canalisés le long de la paroi verticale de l'enceinte cylindrique où prévaut une plus basse température. Cette situation montre que le transfert de

chaleur est faible dans ce cas. Il résulte de toutes ces observations qu'un rapport d'anisotropie supérieur à l'unité ($K^* > 1$) provoque une diminution du transfert de chaleur à l'intérieur du puits, tandis que des rapports d'anisotropie inférieurs à l'unité ($K^* < 1$) renforcent l'étendue du champ thermique. Ceci constitue une conséquence logique de la convection thermique pénétrante et mérite une plus grande attention.

La figure 5.4 illustre les variations du nombre de Nusselt en fonction de la variable $Ra_L (R/L)^2$ pour différentes valeurs de l'angle d'orientation θ et pour un rapport d'anisotropie $K^* = 10$.

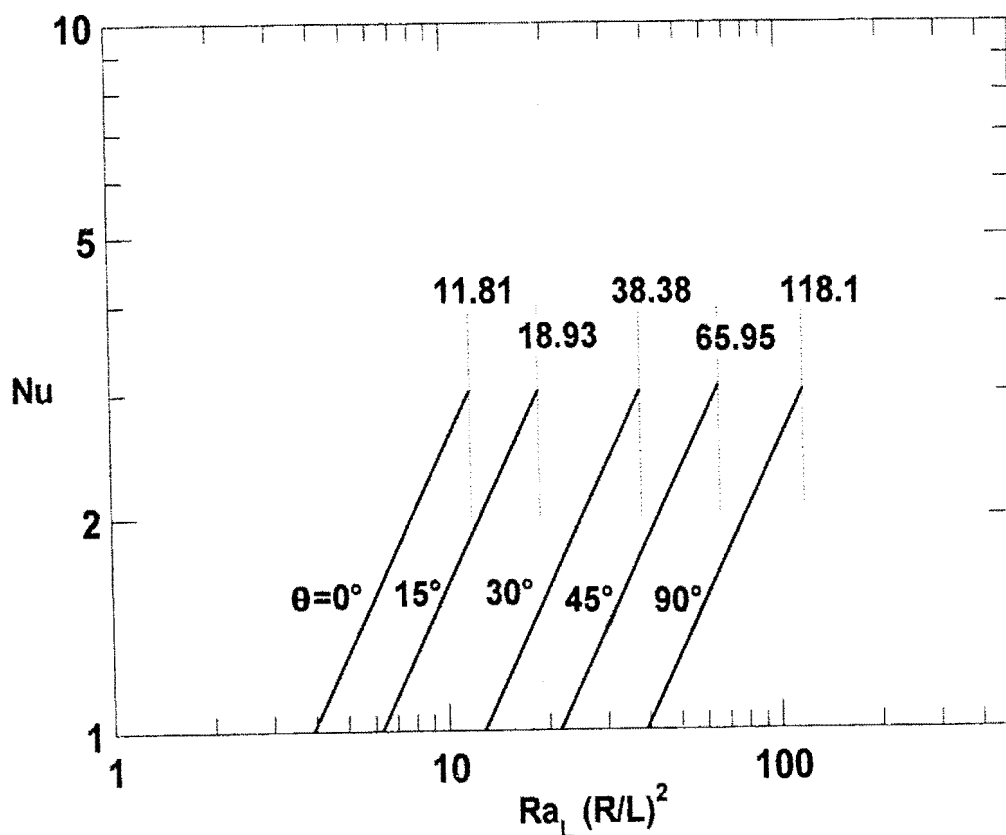


Figure 5.4 : Effet de l'angle d'orientation des axes principaux et du paramètre $Ra_L (R/L)^2$ sur le taux de transfert de chaleur.

Sur cette figure, pour toutes les valeurs de l'angle θ , nous observons que le nombre de Nusselt varie linéairement en fonction de la variable $Ra_L(R/L)^2$. Ce comportement est lié au choix de l'échelle logarithmique adopté sur les axes de coordonnées. Cette variation linéaire du nusselt est due à la condition d'existence du régime d'écoulement établie à l'équation (5.51) qui montre la dépendance de la variable $Ra_L(R/L)^2$ et du paramètre anisotrope a . L'interruption observée au niveau des droites représentatives de la figure 5.4 est expliquée par le fait que pour une valeur donnée de l'angle θ , le nombre de Nusselt devient constant (puisque $K^* = 10$). En effet, sur la base de l'équation (5.56) et de la condition (5.51) nous parvenons à établir la condition $Nu \leq 3,015$. Cette valeur du nombre de Nusselt constitue la valeur limite du taux de transfert de chaleur pénétrant dans le puits cylindrique. Elle détermine le transfert de chaleur en régime affine. Pour chacune des droites observées sur la figure 5.4 pour chaque valeur de l'angle θ , la condition d'existence du régime d'écoulement peut être déduite. Par exemple, lorsque nous donnons à l'angle d'orientation les valeurs $\theta = 15^\circ$ et $\theta = 45^\circ$ les conditions d'existence du régime affine s'écrivent respectivement $Ra_L(R/L)^2 \leq 18,98$ et $Ra_L(R/L)^2 \leq 65,95$. Ces limites sont représentées sur la figure 5.4 par les lignes verticales en pointillés.

La figure 5.5 ci-dessous, montre l'influence du rapport d'anisotropie K^* sur la profondeur de pénétration de l'écoulement thermique dans le puits cylindrique lorsque l'angle d'orientation $\theta = 45^\circ$. Nous observons sur cette figure que pour une valeur donnée du rapport d'anisotropie K^* , le rapport de profondeur de pénétration (ℓ_s/L) croît en fonction de la variable $Ra_L(R/L)^2$. Selon la loi de variation établie à l'équation (5.50), le rapport de profondeur de pénétration (ℓ_s/L) dépend des paramètres anisotropes K^* et θ qui déterminent la valeur de la constante a . Sur la figure 5.5, les valeurs limites

du paramètre $Ra_L(R/L)^2$ représentées par les asymptotes verticales tracées en pointillés, déterminent pour chaque valeur du rapport K^* la condition d'existence de l'écoulement en régime affine. Ainsi, pour une valeur donnée de la variable $Ra_L(R/L)^2$, le rapport de profondeur de pénétration de l'écoulement convectif décroît rapidement lorsque $K^* > 1$. Le phénomène inverse est observé lorsque $K^* < 1$.

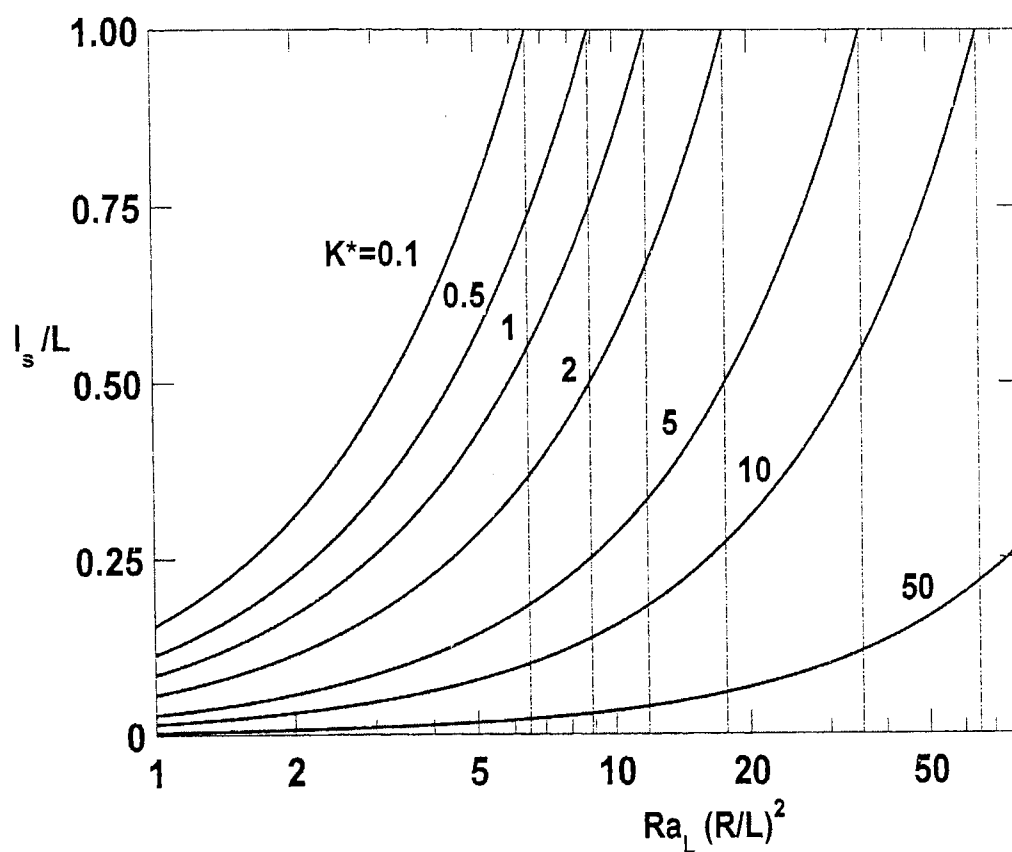


Figure 5.5: Effet du rapport d'anisotropie K^* et du paramètre $Ra_L(R/L)^2$ sur la profondeur de pénétration de l'écoulement convectif dans le puits.

Ce comportement est expliqué par le fait que, pour une valeur donnée de la variable $Ra_L(R/L)^2$ c'est-à-dire pour une valeur donnée de la

perméabilité K_1 , une augmentation du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* occasionne une croissance de la constante a . Puisque la constante a est inversement proportionnelle au rapport de profondeur de pénétration (équation (5.50)), alors (ℓ_s / L) croît. La tendance inverse est observée lorsque $K^* < 1$. Pour un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$, c'est-à-dire $a = 1$) le résultat obtenu dans la présente étude correspond exactement à celui obtenu par *Bejan (1980)*.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre le phénomène de transfert thermique par convection naturelle pénétrante dans un puits confinant un milieu poreux a été étudié. Le milieu poreux est hydrodynamiquement anisotrope avec des axes principaux de perméabilité orientés obliquement par rapport à l'accélération gravitationnelle. Une solution analytique valable pour les écoulements en milieux confinés de grande extension a été trouvée. La méthode de recherche de cette solution est basée sur celle développée par Lighthill pour étudier la convection naturelle dans les conduits verticaux confinant un milieu fluide. Les résultats détaillés pour le champ d'écoulement, la distribution de température, la profondeur de pénétration de l'écoulement convectif dans le puits et le transfert de chaleur ont été présentés et analysés.

De l'étude menée, il ressort que les paramètres d'anisotropie K^* et θ ont une grande influence sur la profondeur de pénétration de l'écoulement convectif dans la couche poreuse. Ainsi :

1) Un rapport d'anisotropie en perméabilité supérieur à l'unité ($K^* > 1$) a pour conséquence une réduction du transfert thermique pendant qu'un accroissement de la profondeur de pénétration des courants convectifs dans la couche poreuse est observé.

2) Pour des rapports d'anisotropie en perméabilité inférieurs à l'unité ($K^* < 1$), le champ thermique devient plus étendu pendant qu'une regression de la profondeur de pénétration de l'écoulement convectif dans le puits cylindrique est observée.

Chapitre 6

**Etude en régime de couche limite de la
convection pénétrante à l'intérieur d'un
puits cylindrique vertical débouchant dans
un large réservoir**

6.1 Introduction

Le présent chapitre traite du régime de couche limite en convection naturelle pénétrante dans un puits cylindrique vertical confinant un milieu poreux et débouchant à sa partie supérieure dans un large réservoir. Le milieu poreux est hydrodynamiquement anisotrope avec des axes principaux orientés dans une direction oblique par rapport à la force gravitationnelle. Il sera recherché dans ce chapitre, les effets des paramètres d'anisotropie en perméabilité sur transfert de chaleur dans le puits cylindrique. Pour la résolution analytique des équations de couche limite, deux méthodes de résolution seront utilisées.

6.2 Formulation du problème

Le modèle physique représenté à la figure 5.1 est constitué d'un cylindre vertical de grande extension confinant un milieu poreux saturé par un fluide newtonien. Le milieu poreux est hydrodynamiquement anisotrope. Le cylindre vertical surmonté d'un large réservoir a une surface latérale de température T_1 pendant que le réservoir est à une température relativement plus basse T_2 . Le fluide saturant le milieu poreux est visqueux, incompressible et supposé en équilibre thermodynamique local en tout point avec la matrice poreuse.

Dans les conditions ci-dessus indiquées et dans le système de coordonnées cylindriques utilisé ici, les équations gouvernantes (5.1), (5.6) et (5.4) traduisant respectivement la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie sont ici applicables. Les conditions aux limites appropriées sont celles qui sont indiquées en (5.7) et (5.8).

6.3 Solution analytique : méthode intégrale

6.3.1 Analyse d'échelle

Pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh ($Ra_L \rightarrow \infty$), l'écoulement a lieu en régime de couche limite. Dans la région centrale de la cavité cylindrique existe une zone chaude mesurant l'épaisseur de la couche thermique du milieu poreux où l'effet de la présence du réservoir se fait sentir. En raison de l'état thermique différentiel ($T_1 > T_2$) existant dans le milieu poreux, il se développe le long de la surface latérale du cylindre une couche limite dynamique d'épaisseur δ dans laquelle est concentrée la majeure partie du mouvement du fluide. Pour ce dernier cas, nous ferons une analyse d'échelle pour prédire les ordres de grandeur des variables d'intérêt intervenant dans la présente étude.

Sur la base de l'équation de mouvement (5.6) et compte tenu de la grande extension du puits cylindrique ($(R/L) \ll 1$), en faisant les approximations usuelles en régime de couche limite, l'hypothèse de l'écoulement en régime en couche limite n'est valide que lorsque les conditions suivantes :

$$a \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{r}'} \gg c \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x'} \quad (6.1)$$

$$a \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{r}'} \gg c \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{r}'} \quad (6.2)$$

$$a \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{r}'} \gg b \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x'} \quad (6.3)$$

sont satisfaites.

Ainsi sur la base des approximations (6.1)-(6.3), l'équation de mouvement (5.6) devient :

$$\mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{r}'} = \frac{\mathbf{K}_1 \mathbf{g} \beta}{\nu} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{r}'} \right) \quad (6.4)$$

En désignant par L et δ les échelles caractéristiques des variables x' et r' dans la couche limite ($\delta \ll L$), les équations (5.1), (6.4), et (5.4) requièrent les équivalences suivantes :

$$\frac{\mathbf{u}'}{L} \sim \frac{\mathbf{v}'}{R} \quad (6.5)$$

$$\mathbf{a} \frac{\mathbf{u}'}{\delta} \sim \frac{\mathbf{K}_1 \mathbf{g} \beta}{\nu} \frac{\Delta \mathbf{T}}{\delta} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{u}' \frac{\Delta \mathbf{T}}{L}, \quad \mathbf{v}' \frac{\Delta \mathbf{T}}{\delta} \sim \alpha \frac{\Delta \mathbf{T}}{\delta^2} \quad (6.7)$$

où $\Delta T = (T_1 - T_2)$ est le facteur d'échelle de normalisation de la température.

En résolvant les équations (6.5)-(6.7) nous obtenons pour δ , u' , v' , les équivalences suivantes:

$$\delta \sim L \mathbf{Ra}_L^{-1/2} \mathbf{a}^{1/2} \quad (6.8)$$

$$\mathbf{u}' \sim \frac{\alpha}{L} \mathbf{Ra}_L \mathbf{a}^{-1} \quad (6.9)$$

$$\mathbf{v}' \sim \frac{\alpha}{L} \mathbf{Ra}_L^{1/2} \mathbf{a}^{-1/2} \quad (6.10)$$

où le nombre de Darcy-Rayleigh \mathbf{Ra}_L basé sur la longueur L du puits cylindrique est celui indiqué à l'équation (5.22).

A partir des équivalences (6.9) et (6.10), les conditions (6.1) et (6.3) de validité de la présente analyse requièrent les conditions mentionnées aux équations (5.27) et (5.28).

Intéressons-nous à présent au nombre de Nusselt mesurant le transfert thermique entre le puits sur sa section supérieure et le réservoir. Son expression donnée par l'équation (5.31) est valable ici.

Tenant compte de l'équivalence (6.7), l'ordre de grandeur du flux de chaleur Q (équation (5.33)) transférée à la couche poreuse contenue dans le cylindre est le suivant :

$$Q \sim (\rho c_p)_f R (u')^2 \Delta T \quad (6.11)$$

En utilisant l'expression de la diffusivité thermique du milieu poreux $\alpha (= k/(\rho c_p)_f)$ définie relativement à l'équation (2.20), et en tenant compte de l'équivalence (6.11), nous obtenons à partir de l'équation (5.31) l'ordre de grandeur suivant pour le nombre de Nusselt:

$$Nu \sim \left(\frac{R}{L} \right) Ra_L^{1/2} a^{-1/2} \quad (6.12)$$

Tenant compte des équivalences (6.8)-(6.10), la résolution de l'équation (6.5) permet de réécrire les hypothèses du régime de couche limite traduites par les conditions (6.2) et (6.3) qui deviennent:

$$b \ll Ra_L \quad (6.13)$$

$$c \ll a^{1/2} Ra_L^{1/2} \quad (6.14)$$

Dans les développements ultérieurs dans ce chapitre, deux méthodes de résolution des équations gouvernant le phénomène seront utilisées. La première méthode, celle des relations intégrales est basée sur la méthode développée par *Lighthill (1953)* pour étudier le problème de même importance. La seconde est basée sur la méthode de linéarisation développée par *Oseen* et qui a été largement utilisée pour résoudre les problèmes de convection en milieu poreux confiné.

6.3.2 Adimensionnalisation des équations

A partir des résultats obtenus de l'analyse d'échelle, les variables de transformation qui résultent, demeurent les mêmes que celles écrites dans le système d'équations (5.16). Sur cette base, nous obtenons les mêmes équations adimensionnelles (5.17), (5.19) et (5.23) qui sont respectivement l'équation de conservation de la masse, de l'énergie et l'équation de mouvement.

Les conditions aux limites associées à ces équations sont celles indiquées au système d'équations (5.20).

6.3.3 Résolution

Désignons respectivement par $\zeta(x)$ et $[1-\zeta(x)]$, le rayon de courbure de la couche poreuse isotherme située dans la région centrale et centrée sur l'axe du puits cylindrique et l'épaisseur de la couche limite dynamique située dans la région annulaire du cylindre. S'inspirant des développements faits par Lighthill, les profils appropriés pour la température et la composante verticale u de la vitesse de filtration du fluide dans le milieu poreux sont les suivants :

$$0 < r < \zeta \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T} = \mathbf{T}_c \quad (\text{a}) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_c \quad (\text{b}) \end{array} \right. \quad (6.15)$$

$$\zeta < r < 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T} = \mathbf{T}_c \left[1 - \left(\frac{r-\zeta}{1-\zeta} \right)^2 \right] \quad (\text{a}) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_c - \frac{\mathbf{T}_c}{\mathbf{a}} \left[1 - \left(\frac{r-\zeta}{1-\zeta} \right)^2 \right] \quad (\text{b}) \end{array} \right. \quad (6.16)$$

où T_c et u_c représentent la température et la composante verticale de la vitesse dans la région centrale de la cavité cylindrique.

A partir de l'équation (5.17), l'équation de conservation de la masse

$$\int_0^1 r u \, dr = 0 \quad (6.17)$$

permet d'établir sur la base des équations (6.15) et (6.16) l'égalité suivante :

$$u_c = \frac{T_c}{6a} (3 - 2\zeta - \zeta^2) \quad (6.18)$$

L'équation d'énergie (5.4) écrite sous forme intégrale et évaluée de la position de l'axe central ($r=0$) de la cavité à la surface latérale intérieure ($r=1$) s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^1 r u T \, dr \right) = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} \quad (6.19)$$

Tenant compte des équations (6.15a) et (6.16b) et de l'expression de la température dans la région centrale $T_c (= -Ra_L (R/L)^2)$, l'équation d'énergie (6.19) permet d'obtenir le relation suivante :

$$\frac{x}{Ra_L (R/L)^2} = \frac{1}{1080a} (1 + 18\zeta - 12\zeta^2 - 28\zeta^3 + 15\zeta^4 + 6\zeta^5) \quad (6.20)$$

La relation (6.20) donne l'épaisseur maximale que peut avoir la couche limite dynamique qui se développe dans la région annulaire de la cavité cylindrique. En effet, en dérivant par rapport à ζ le second membre de l'équation (6.20) et en l'annulant, on obtient $\zeta = 0,392$ qui donne l'épaisseur maximale qui est définie comme suit :

$$\frac{x}{\text{Ra}_L (R/L)^2} \Big|_{\zeta=0,392} = \frac{0,00457}{a} = \frac{1}{218,83a} \quad (6.21)$$

Sur la section supérieure droite de l'enceinte cylindrique au point où elle est en contact avec le réservoir ($x=1$), l'épaisseur de la couche limite s'écrit $[1-\zeta(1)]$. Puisque la couche limite se développe dans la région annulaire de la cavité cylindrique dont la limite est telle que $x \leq 1$, cette condition nous permet de relier son épaisseur au nombre de Rayleigh Ra_L . Ainsi, nous obtenons sur la base de l'équation (6.21) la condition d'existence de la couche limite qui est la suivante :

$$\text{Ra}_L \left(\frac{R}{L} \right)^2 \geq 218,83a \quad (6.22)$$

A partir de l'équation (6.19), le calcul de l'intégrale (5.54) permet, compte tenu de l'équation (5.53) d'exprimer le nombre de Nusselt (5.31) sous sa forme adimensionnelle qui devient :

$$\text{Nu} = 5,62 \left(\frac{R}{L} \right) \text{Ra}_L^{1/2} a^{-1/2} \quad (6.23)$$

Le nombre de Nusselt ainsi obtenu (équation (6.23)) est en accord avec celui découlant de l'analyse d'échelle (équation (6.12)) relativement aux ordres de grandeur des paramètres dont il est fonction. Dans le cas particulier d'un milieu poreux isotrope ($a=1$) le présent résultat est confirmé par celui obtenu par *Bejan (1980)*.

6.4 Solution par la méthode de linéarisation d'Oseen

6.4.1 Formulation mathématique

Dans la méthode de linéarisation d'Oseen le modèle du champ de l'écoulement est la région annulaire avoisinant la surface latérale du cylindre illustré conformément aux annotations de la figure 6.1.

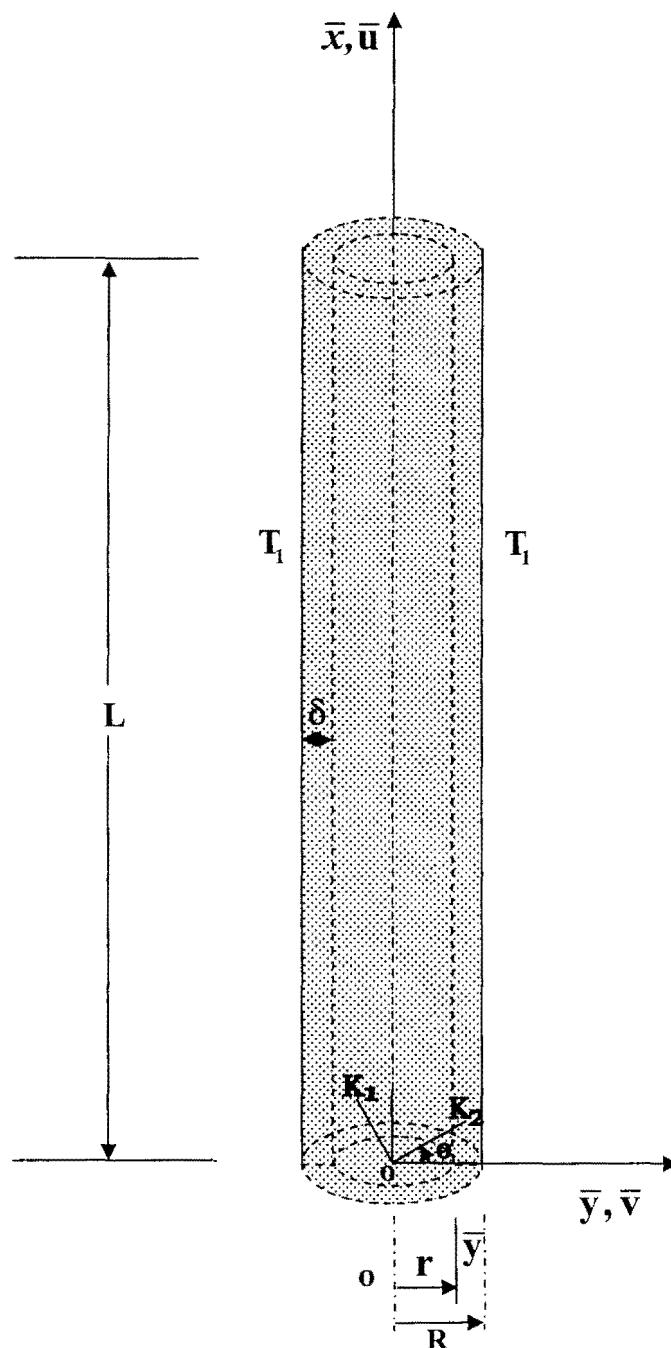


Figure 6.1 : Modèle physique et système d'axes de coordonnées (méthode d'Oseen).

Pour l'étude de ce champ, il est considéré un système de coordonnées cartésiennes (\bar{x}, \bar{y}) dans lequel \bar{x} mesure la distance le long de la surface latérale du cylindre vertical et \bar{y} celle mesurée sur l'axe horizontal à partir du bord d'attaque du cylindre ($\bar{y}=R-\bar{r}$). Il est évident que dans la région annulaire située près de la surface latérale considérée comme une couche limite le long de cette paroi, nous devons avoir la condition ($\bar{y} \ll R$). Sur cette base, les équations gouvernantes du phénomène de convection (5.1), (5.6) et (5.4), écrites dans le système de coordonnées physiques (\bar{x}, \bar{y}) s'écrivent de la façon suivante :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\bar{v}}{(R-\bar{y})} = 0 \quad (6.24)$$

$$a \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + c \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) - b \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = \frac{K_1 g \beta}{\nu} \left(\frac{\partial T'}{\partial \bar{y}} \right) \quad (6.25)$$

$$\bar{u} \frac{\partial T'}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T'}{\partial \bar{y}} = \alpha \left[\frac{1}{(R-\bar{y})} \frac{\partial T'}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 T'}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial \bar{x}^2} \right] \quad (6.26)$$

Dans le système de coordonnées (\bar{x}, \bar{y}) , compte tenu de la relation $\bar{y}=R-\bar{r}$, la condition d'imperméabilité de la paroi cylindrique et les conditions thermiques associées nous permettent d'écrire les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=0: \quad \bar{v}=0, \quad T'=T_1 \\ \bar{x}=0: \quad \bar{u}=0, \quad T'=T_1 \end{array} \right. \quad (6.27)$$

6.4.2 Analyse d'échelle

Reconnaissant L et δ comme étant les échelles caractéristiques respectives des variables \bar{x} et \bar{y} dans la région annulaire considérée précédemment ($\delta \ll L$), les équations gouvernantes (6.24), (6.25) et (6.26) requièrent les équivalences suivantes :

$$\frac{\bar{u}}{L} \sim \frac{\bar{v}}{\delta} \quad (6.28)$$

$$a \frac{\bar{u}}{\delta}, \quad c \frac{\bar{u}}{\delta}, \quad c \frac{v'}{L}, \quad b \frac{v'}{L} \sim \frac{K_1 g \beta}{\nu} \frac{\Delta T}{R} \quad (6.29)$$

$$\tilde{u} \frac{\Delta T}{L}, \quad \tilde{v} \frac{\Delta T}{R} \sim \alpha \frac{\Delta T}{R^2}, \quad \alpha \frac{\Delta T}{L^2} \quad (6.30)$$

où $\Delta T (=T_1 - T_2)$ est le facteur d'échelle de normalisation de la température.

La résolution des équations (6.28)-(6.30) compte tenu de l'équation (5.22) donnant le nombre de Darcy-Rayleigh Ra_L , nous permet d'obtenir pour \tilde{u} , \tilde{v} , et δ les équivalences suivantes :

$$\delta \sim L Ra_L^{-1/2} a^{1/2} \quad (6.31)$$

$$\tilde{u} \sim \frac{\alpha L}{\delta^2} \quad (6.32)$$

$$\tilde{v} \sim \frac{\alpha}{\delta} \quad (6.33)$$

6.4.3 Adimensionnalisation des équations

En se basant sur les résultats obtenus en ce qui concerne les ordres de grandeur des variables d'intérêt dans la section précédente, les variables adimensionnelles correspondantes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{x} = \frac{\bar{x}}{L} & \tilde{y} = \frac{\bar{y}}{\delta} \\ \tilde{u} = \frac{\bar{u}\delta^2}{\alpha L} & \tilde{v} = \frac{\bar{u}\delta}{\alpha} \\ \tilde{T} = \frac{T' - T_1}{\Delta T} & \Delta T = T_1 - T_2 \end{array} \right. \quad (6.34)$$

En introduisant les variables adimensionnelles (6.34) dans les équations (6.24)-(6.26), les équations adimensionnelles gouvernant le phénomène de convection dans la couche limite s'écrivent de la façon suivante:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (6.35)$$

$$a \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + c \left(\frac{\delta}{L} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) - b \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \quad (6.36)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \left(\frac{\delta}{L} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} + \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (6.37)$$

Les conditions aux limites (6.27) formulées en variables adimensionnelles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \tilde{y} = 0: & \tilde{v} = 0, & \tilde{T} = 0 \quad (\mathbf{a,b}) \\ \tilde{y} \rightarrow \infty: & \tilde{u} = \tilde{u}_\infty(\tilde{x}), & \tilde{T} = -1 \quad (\mathbf{c,d}) \end{array} \right. \quad (6.38)$$

6.4.4 Résolution

Sur la base des approximations du régime de couche limite ($(\delta/L) \ll 1$), les équations (6.36) et (6.37) se réduisent pour donner respectivement :

$$\mathbf{a} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{\mathbf{y}}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \tilde{\mathbf{y}}} \quad (6.39)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{v}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \tilde{\mathbf{y}}} = \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \tilde{\mathbf{y}}^2} \quad (6.40)$$

En intégrant l'équation (6.39) par rapport à $\tilde{\mathbf{y}}$, nous obtenons la relation liant la température adimensionnelle $\tilde{\mathbf{T}}$ et la composante adimensionnelle $\tilde{\mathbf{u}}$ de la vitesse de filtration du fluide en milieu poreux, soit :

$$\mathbf{a} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{T}} \quad (6.41)$$

En prenant la dérivée partielle de l'équation (6.39) par rapport à $\tilde{\mathbf{y}}$, nous obtenons le deuxième membre de l'équation (6.40). De cette nouvelle égalité, nous écrivons l'équation suivante :

$$\mathbf{a} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{\mathbf{y}}^2} - \mathbf{a} \tilde{\mathbf{v}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{\mathbf{y}}} - \tilde{\mathbf{u}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad (6.42)$$

La méthode d'Oseen consiste à considérer $\tilde{\mathbf{v}}$ et $\partial \tilde{\mathbf{T}} / \partial \tilde{\mathbf{x}}$ comme des fonctions de la variable physique $\tilde{\mathbf{x}}$. Ainsi, l'équation (6.42) peut être intégrée relativement à $\tilde{\mathbf{y}}$ et ceci conformément aux conditions (6.38). En tenant compte de l'équation (6.41) nous obtenons les expressions suivantes :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{\mathbf{a}} \exp \left[\tilde{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{x}}) \right] + \tilde{\mathbf{u}}_{\infty}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (6.43)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \exp \left[\tilde{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{x}}) \right] - 1 \quad (6.44)$$

Les fonctions inconnues $\tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{x}})$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{\infty}(\tilde{\mathbf{x}})$ sont déterminées à partir de la formulation intégrale des équations de conservation de la masse et de l'énergie (6.35) et (6.36) qui s'écrivent comme suit :

$$\int_0^Y \tilde{u} d\tilde{y} = 0 \quad (6.45)$$

$$\frac{d}{d\tilde{x}} \left(\int_0^Y \tilde{u} \tilde{T} d\tilde{y} \right) = \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \right) \Big|_{\tilde{y}=0} \quad (6.46)$$

où Y représente la valeur de \tilde{y} au centre du cylindre ($Y=R/(2\delta)$).

Substituant les expressions de \tilde{u} (équation (6.43)) et de \tilde{T} (équation (6.44)) dans l'équation (6.45) et en tenant compte de la condition aux limites (6.38d), nous obtenons l'équation suivante :

$$\tilde{v} Y \tilde{u}_\infty = \frac{1}{a} \quad (6.47)$$

De la même façon, en tenant compte de la condition aux limites (6.38d) et de l'équation (6.47), la substitution des équations (6.43) et (6.44) dans l'équation (6.46) donne ce qui suit :

$$\frac{1}{4\tilde{v}^2} + \frac{2}{3Y\tilde{v}^3} = a\tilde{x} \quad (6.48)$$

Discutons à présent la condition d'existence de la solution obtenue suivant la méthode d'Oseen. Etudions à cet effet les variations de la variable physique \tilde{x} en fonction de la composante de la vitesse \tilde{v} . La recherche de son maximum conduit à la valeur $\tilde{v} = -4/Y$, qui permet de calculer le maximum \tilde{x}_0 :

$$\tilde{x}_0 = \frac{Y^2}{192a} \quad (6.49)$$

En résolvant les équations du système (6.34), nous obtenons l'expression de δ en fonction du nombre de Rayleigh $\delta (= L Ra_L^{-1/2})$; de plus,

en tenant compte de la valeur de \tilde{y} au centre du cylindre ($Y=R/(2\delta)$) nous aboutissons à l'expression suivante :

$$\tilde{x}_0 = \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{Ra_L}{768a} \quad (6.50)$$

\tilde{x}_0 étant le maximum de la variable physique \tilde{x} définie à l'équation (6.48), nous devons avoir la condition $\tilde{x} \leq \tilde{x}_0$. De cette inéquation, la condition d'existence du régime de couche limite exprimée sur la section droite à l'extrémité supérieure du puits cylindrique ($x=1$) s'écrit:

$$Ra_L \left(\frac{R}{L}\right)^2 \geq 768a \quad (6.51)$$

En utilisant les expressions (6.43) et (6.44) et en tenant des équations du système (6.34), nous pouvons calculer l'intégrale (5.54). Sur la base de l'équation (6.47) et du résultat (6.50), nous obtenons l'expression du flux de chaleur (5.33) qui nous permet d'exprimer le nombre de Nusselt expression (5.31) de la façon suivante :

$$Nu = 2\pi \left(\frac{R}{L}\right) Ra_L^{1/2} a^{-1/2} \quad (6.52)$$

6.5 Résultats et Discussion

Pour des nombres de Rayleigh suffisamment élevés, le phénomène de convection libre à l'intérieur d'un puits et celui siégeant au voisinage d'une surface verticale présentent approximativement les mêmes caractéristiques. Dans le cas d'un milieu poreux isotrope ($a=1$), un excellent accord entre les nombres de Nusselt (équations (6.23) et (6.52)) et ceux obtenus par *Cheng et*

Minkowycz (1976) en convection naturelle le long d'une plaque verticale a été obtenu par *Bejan (1980)*.

K^*	a ($\theta = 45^\circ$)	$Ra_L^{1/2} (R/L)$	Nu/100	
			Solution Intégrale (6.23)	Solution d'Oseen (6.52)
0.2 (<1.0)	0.6	25.0	1.81	2.02
1.0 (isotrope)	1.0	30.0	1.69	1.88
10. (>1.0)	5.5	65.0	1.55	1.74

Table 6.1 : Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt obtenu par différentes méthodes de résolution lorsque $\theta = 45^\circ$.

La comparaison des nombres de Nusselt obtenus par les deux méthodes développées dans ce chapitre est présentée dans la table 6.1.

A partir de la table 6.1, nous observons que dans le cas particulier d'un milieu poreux isotrope, la solution obtenue par la méthode intégrale est meilleure lorsque nous la comparons à celle que donne la méthode de linéarisation d'Oseen. Cette conclusion découle du fait que le nombre de Nusselt obtenu dans ce cas diffère seulement de 7% de celui obtenu par *Cheng et Minkowycz (1976)* ($Nu/100 = 1,674$).

La figure 6.2 illustre la variation du taux de transfert de chaleur Nu en fonction du paramètre $Ra_L^{1/2} (R/L)$ pour $\theta = 45^\circ$ et pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie K^* . Sur cette figure, la condition d'existence du régime de couche limite $Ra_L^{1/2} (R/L) \geq 14,793 a^{1/2}$, obtenue par la méthode des relations intégrales est représentée par les droites en traits pleins obtenues pour les

différentes valeurs du rapport K^* . Par exemple lorsque $K^* = 0,2$; $K^* = 1$ et $K^* = 10$ nous obtenons respectivement les conditions $Ra_L^{1/2} (R/L) \geq 11,486$; $Ra_L^{1/2} (R/L) \geq 14,793$ et $Ra_L^{1/2} (R/L) \geq 34,692$. En général, lorsque le paramètre $Ra_L^{1/2} (R/L)$ croît, le transfert de chaleur par convection croît à partir de la valeur limite $14,793 a^{1/2}$ qui dépend des paramètres d'anisotropie K^* et θ dont est fonction la constante a .

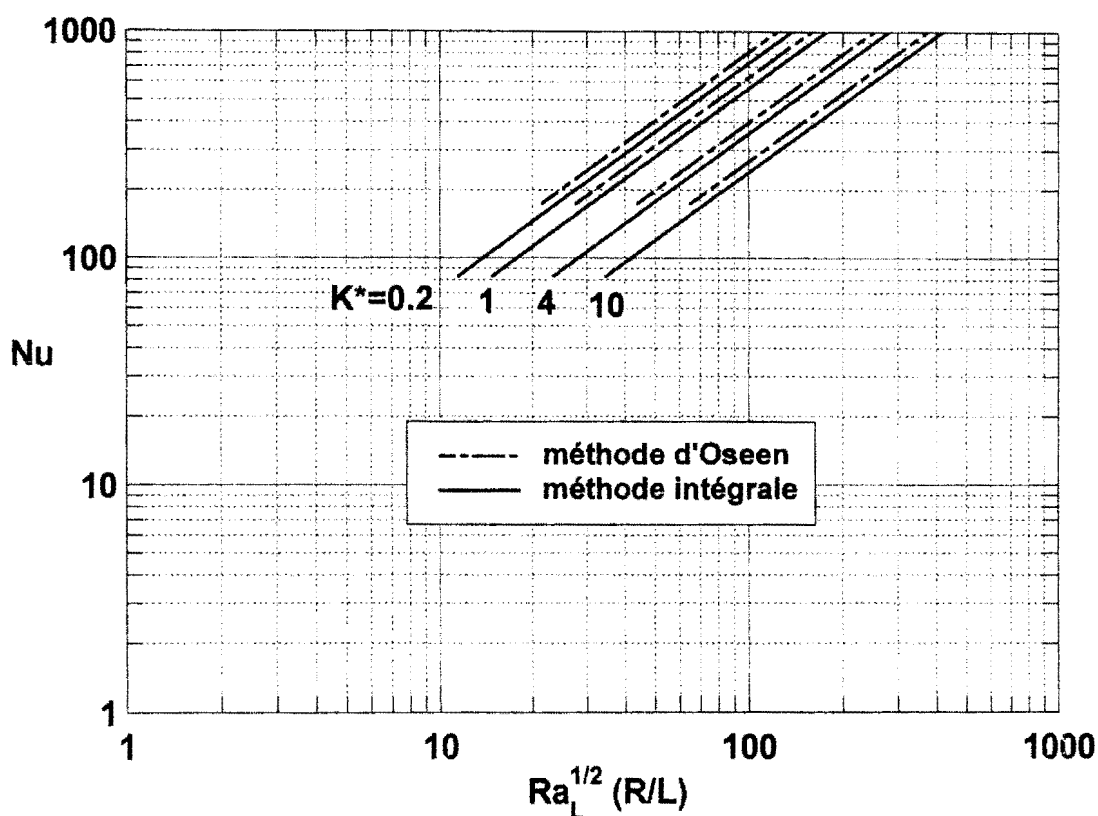


Figure 6.2: Effet du nombre de Rayleigh-Darcy modifié Ra_L sur le nombre de Nusselt Nu pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie K^* .

En outre, lorsqu'on augmente la valeur du rapport d'anisotropie K^* de 0,2 à 10, nous observons sur la figure 6.2 une croissance de la valeur du paramètre $Ra_L^{1/2} (R/L)$ qui passe de 11,456 à 34,692 traduisant le fait que

l'écoulement du fluide à travers la matrice poreuse confinée dans le puits devient de plus en plus développé. Ce comportement peut être expliqué par le fait que, pour des valeurs données de θ et de Ra_L (c'est-à-dire de K_1), une augmentation du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* peut être interprétée comme une augmentation de la valeur du nombre de Rayleigh Ra_L par l'intermédiaire du paramètre a ($= \cos^2 \theta + K^* \sin^2 \theta$). Par conséquent, il résulte une croissance du taux de transfert de chaleur (équation (6.23)). La même observation être faite à partir de la solution obtenue par la méthode de linéarisation d'Oseen. Cette dernière est illustrée sur la figure 6.2 par les droites représentées en pointillés dans le cas où les valeurs prises par le paramètre $Ra_L^{1/2} (R/L)$ sont définies telles que $Ra_L^{1/2} (R/L) \geq 27,713 a^{1/2}$. Nous observons également dans ce cas que, lorsque K^* varie de 0,2 à 10, la valeur du paramètre $Ra_L^{1/2} (R/L)$ croît de 21,466 à 64,992. Ceci met en évidence, une nette croissance du transfert thermique.

L'influence de l'angle d'orientation θ des axes principaux de perméabilité sur le nombre de Nusselt Nu est illustrée sur la figure 6.3 pour $Ra_L = 1000$, $(R/L) = 0,2$ et pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie K^* . Dans le cas d'un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$), le nombre de Nusselt Nu est indépendant de θ comme nous pouvons le prévoir. En général, une symétrie des résultats est observée lorsque l'angle d'orientation θ atteint la valeur 90° . Pour cette raison, nous limiterons la discussion au domaine de valeurs d'angle θ telles que $0^\circ < \theta < 90^\circ$. La figure 6.3 indique que pour des rapports d'anisotropie de valeurs inférieures à l'unité ($K^* < 1$), le Nusselt est minimal lorsque $\theta = 0^\circ$; angle d'orientation pour laquelle la perméabilité dans la direction verticale est maximale. La situation inverse est observée lorsque

$K^* > 1$. Dans ce cas, le transfert de chaleur est maximal lorsque $\theta = 0^\circ$ et minimal lorsque $\theta = 90^\circ$.

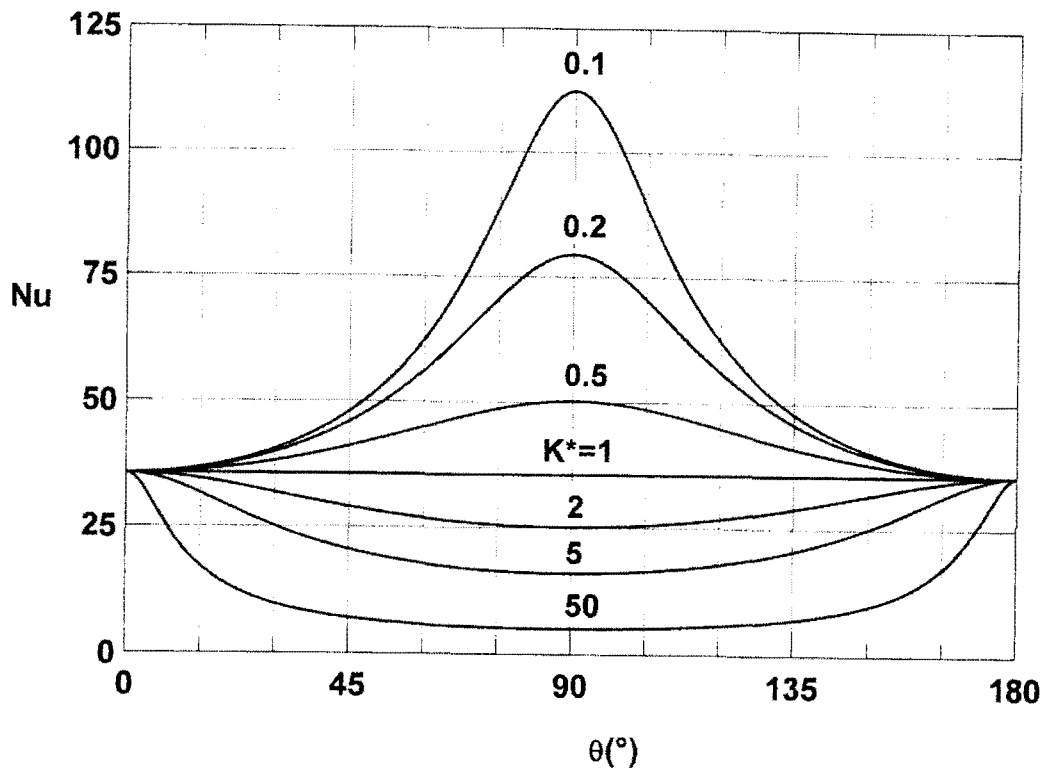


Figure 6.3 : Effet de l'angle d'orientation θ des axes principaux sur le nombre de Nusselt Nu (solution intégrale) pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie K^* .

Nous pouvons démontrer ce comportement à partir de la solution (équation (6.28)) obtenue en régime de couche limite. En annulant la dérivée par rapport à θ du nombre de Nusselt obtenu à l'équation (6.28), nous obtenons comme équation $(K^* - 1) \sin 2\theta = 0$. Les solutions de cette équation rendent le nombre de Nusselt Nu maximal lorsque $\theta = 90^\circ$ et minimal lorsque $\theta = 0^\circ$. De la dérivée seconde par rapport à θ , nous obtenons $d^2 Nu / d\theta^2 = \pm 11,24 (R/L) Ra_L^{1/2} (K^* - 1)$ respectivement lorsque $\theta = 0^\circ$ et

lorsque $\theta = 90^\circ$. Ainsi, dans le cas des rapports d'anisotropie de valeurs supérieures à l'unité ($K^* > 1$), le Nusselt est maximal lorsque $\theta = 0^\circ$ et minimal lorsque $\theta = 90^\circ$. La situation inverse est observée lorsque $K^* < 1$. Il résulte de ces observations que, le transfert de chaleur est maximal (minimal) lorsque l'orientation de l'axe principal du milieu poreux ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle (perpendiculaire) au champ gravitationnel. Ces résultats sont qualitativement similaires à ceux obtenus numériquement par *Zhang (1993)*, *Degan et coll. (1995)*, *Degan et Vasseur (1996, 1997)* qui ont étudié l'influence de l'angle d'orientation des axes principaux de perméabilité sur le transfert de chaleur dans une cavité verticale chauffée par les côtés.

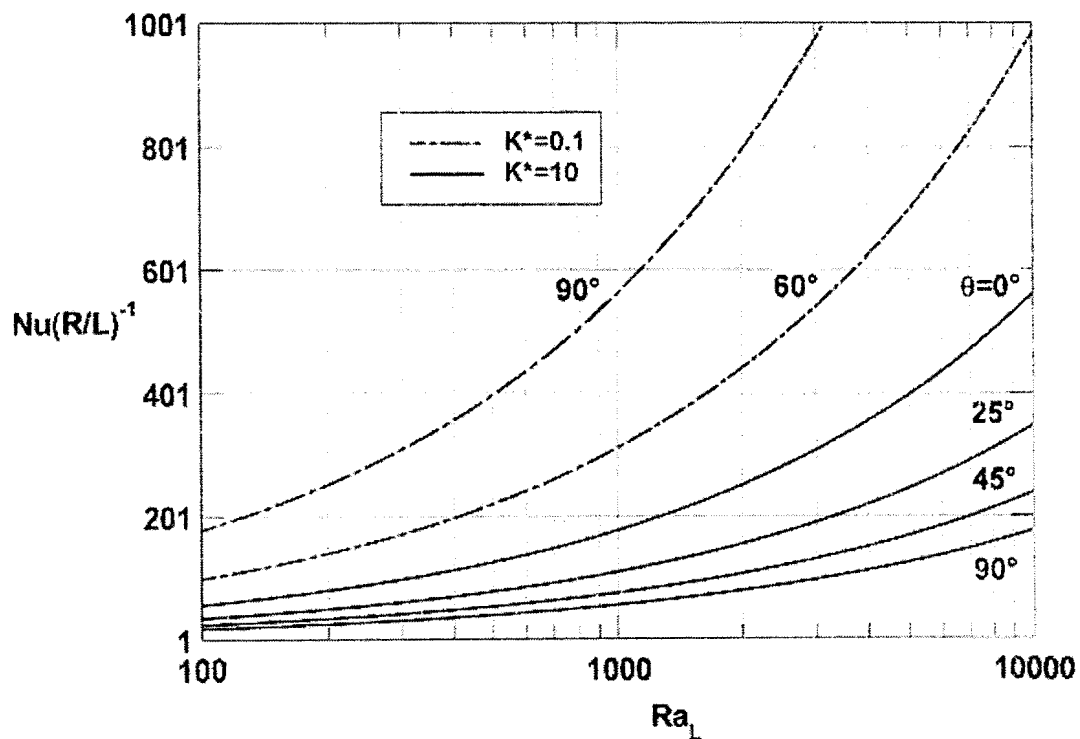


Figure 6.4: Effet du nombre de Rayleigh-Darcy modifié Ra_L sur le nombre de Nusselt Nu (solution intégrale) pour différentes valeurs de l'angle d'orientation θ des axes principaux lorsque $K^* = 0,1$ et $K^* = 10$.

Sur la figure 6.4, la variation du nombre de Nusselt (équation (6.23)) est représentée en fonction du nombre de Darcy-Rayleigh Ra_L pour différentes valeurs de l'angle d'orientation θ et pour deux valeurs du rapport d'anisotropie, respectivement $K^* = 0,1$ et $K^* = 10$. Lorsque $\theta = 0^\circ$, la valeur de la constante a est égale à l'unité et nous obtenons $Nu(R/L) = 5,62Ra_L^{1/2}$. Par conséquent le transfert de chaleur par convection est indépendant du rapport d'anisotropie K^* . Comme il a été discuté précédemment, dans le cas où le rapport d'anisotropie en perméabilité est inférieur à l'unité ($K^* < 1$), nous observons sur la figure 6.4, une croissance du transfert de chaleur lorsque l'angle d'orientation θ croît de 0° à 90° . Dans les mêmes conditions, la situation inverse est observée lorsque $K^* > 1$. La figure 6.5 illustre les effets du nombre de Darcy-Rayleigh modifié R_L et du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* sur le taux de transfert de chaleur pour $\theta = 45^\circ$. Comme l'ont discuté *Aboubi et coll. (1995)*, *Degan et Vasseur (1996)*, le nombre de Darcy-Rayleigh modifié R_L normalisé tel que $R_L = Ra_L / \sqrt{K^*} = g\beta L(T_1 - T_2) \sqrt{K_1 K_2} / (\alpha\nu)$ est plus approprié pour décrire le présent phénomène, puisque les perméabilités extrêmes K_1 et K_2 font partie des effets normalement associés à tout changement de nombre de Rayleigh R_L . La figure 6.5 ci-dessus montre la variation du nombre de Nusselt en fonction du rapport d'anisotropie K^* et du nombre de Darcy-Rayleigh modifié R_L . Pour les raisons évoquées au début de ce paragraphe, les courbes obtenues sont symétriques par rapport à la ligne verticale à $K^* = 1$. Nous pouvons aussi à partir des équations gouvernantes, déduire aisément que pour un nombre de Rayleigh R_L donné, la solution obtenue pour $\theta = 45^\circ$ et pour une valeur particulière de K^* , correspond à celle obtenue pour $\theta = -45^\circ$ et $1/K^*$.

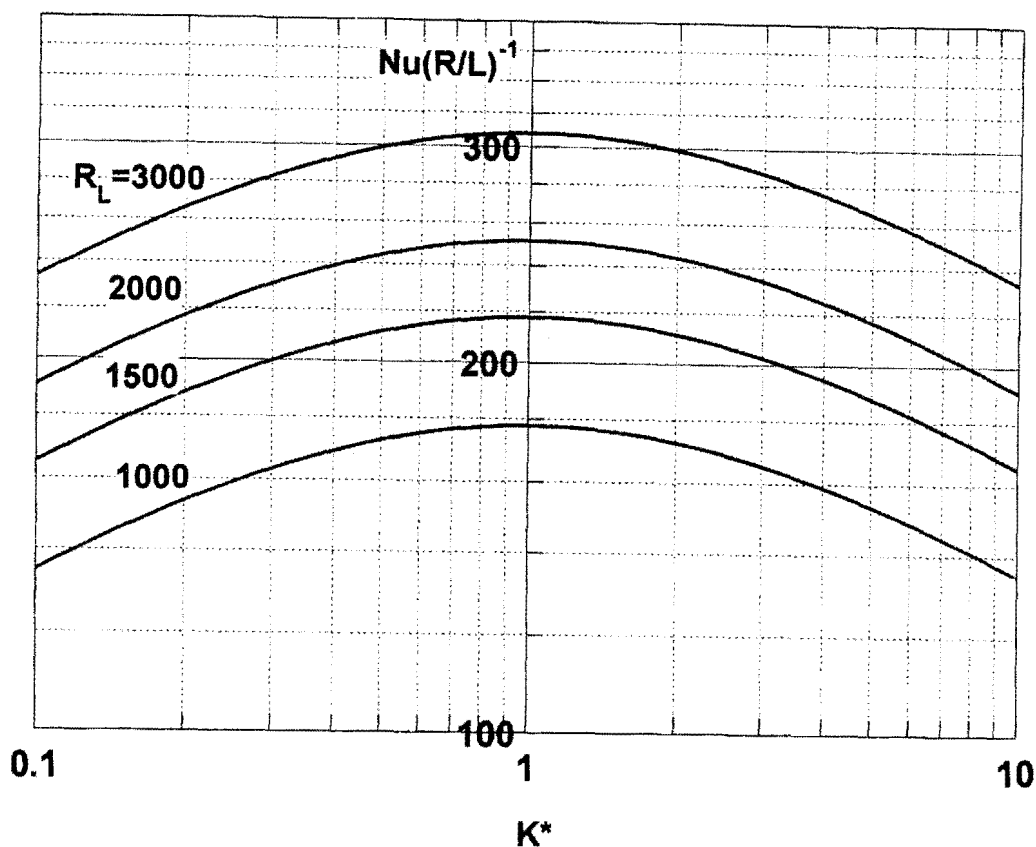


Figure 6.5: Effets du rapport d'anisotropie K^* et du nombre de Rayleigh-Darcy modifié R_L sur le nombre de Nusselt Nu pour un angle d'orientation $\theta = 45^\circ$ des axes principaux.

La figure 6.6 ci-dessous montre les variations du nombre de Nusselt Nu moyen en fonction des paramètres d'anisotropie K^* et θ . Partant de l'équation (6.23) et tenant compte du fait que $R_L = Ra_L / \sqrt{K^*}$, il a été observé que le paramètre $Nu(R/L)^{-1} / R_L^{1/2}$ dépend uniquement $((K^*)^{1/2} / a)^{1/2}$, où la constante a dépend des paramètres anisotropes du milieu poreux K^* et θ par la relation $a = \cos^2 \theta + K^* \sin^2 \theta$. En outre, pour une valeur donnée du nombre de Darcy-Rayleigh modifié R_L , nous pouvons déduire que si $u(r, x)$, $v(r, x)$, et $T(r, x)$ sont solutions pour $(R_L, R/L, \theta, K^*)$, alors elles sont également solutions pour $(R_L, R/L, \pi/2 - \theta, 1/K^*)$. Ce point est illustré sur la figure 6.6,

où la symétrie obtenue par rapport à la ligne verticale à $K^* = 1$ est aussi une conséquence de l'échelle logarithmique qui a été utilisée pour le rapport d'anisotropie K^* . Dans le cas particulier où $\theta = 45^\circ$, $\theta = \pi/2 - \theta$; les courbes correspondantes sont parfaitement symétriques par rapport à $K^* = 1$, de sorte que les résultats obtenus pour une valeur donnée de K^* sont équivalents à ceux obtenus pour $1/K^*$. Cependant, lorsque θ a une valeur différente de 45° , la symétrie observée pour un ensemble donné de propriétés anisotropes θ et K^* est réalisée pour $\pi/2 - \theta$ et $1/K^*$.

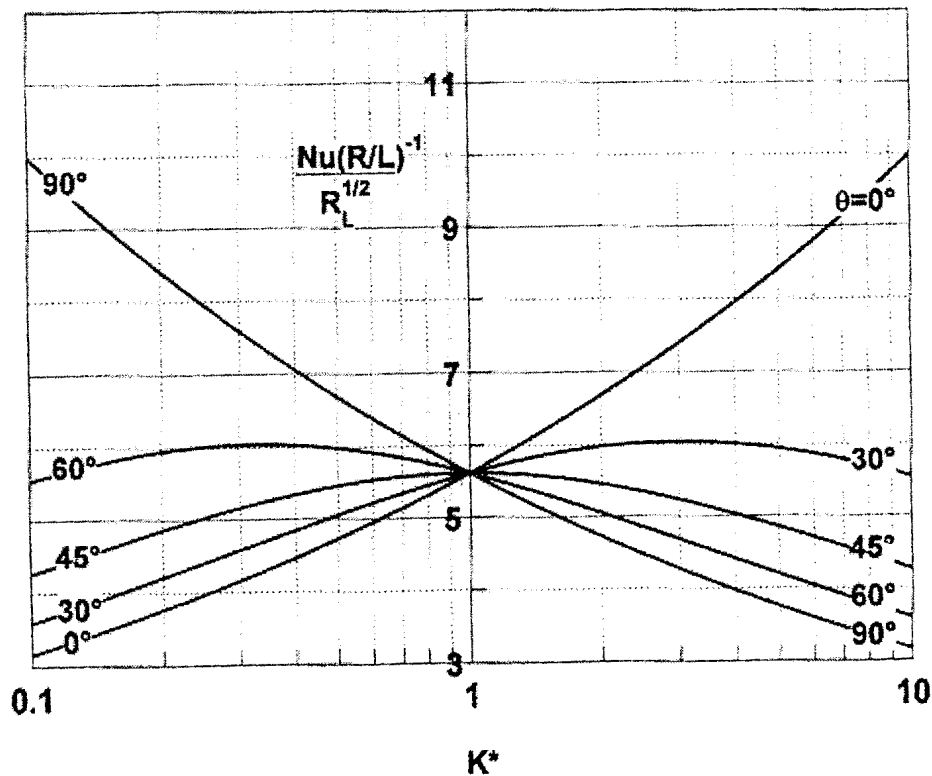


Figure 6.6: Effets du rapport d'anisotropie K^* et de l'angle d'orientation θ des axes principaux sur le nombre de Nusselt Nu .

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude analytique a été menée pour étudier la convection pénétrante à l'intérieur d'un puits cylindrique vertical confinant un milieu poreux et débouchant dans un réservoir de température relativement plus basse. Le milieu poreux est supposé anisotrope en perméabilité avec des axes principaux orientés dans une direction oblique par rapport au champ gravitationnel. Pour l'étude de la couche limite le long de la surface latérale du cylindre, deux méthodes basées sur le modèle de Darcy, ont été développées. La première méthode, celle des relations intégrales est basée sur le modèle d'étude développée par Lighthill (1953) pour la convection dans les tubes verticaux confinant un fluide newtonien. La seconde méthode est basée sur la technique de linéarisation d'Oseen qui, est très indiquée pour sa précision en ce qui concerne l'étude du phénomène de convection libre en milieu confiné.

Il a été démontré que, la condition d'existence du régime de couche limite, bien que liée à la méthode de résolution, reste dépendante des paramètres d'anisotropie en perméabilité du milieu poreux. Le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et l'angle d'orientation θ des axes principaux ont une grande influence sur le taux de transfert de chaleur. En particulier, il a été démontré que le transfert de chaleur est maximal lorsque l'orientation de l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle au champ gravitationnel et minimal lorsque cette orientation est perpendiculaire à ce dernier. Pour une orientation θ fixée, la solution pour un ensemble donné de paramètres de contrôle R_L , R/L , et K^* est équivalente à celle correspondant aux paramètres R_L , R/L , $\pi/2 - \theta$, et $1/K^*$. Finalement, pour le cas particulier $\theta = 45^\circ$, les solutions pour des valeurs fixées de R_L et

R/L sont parfaitement symétriques par rapport à $K^* = 1$, de sorte que les résultats pour une valeur de K^* sont équivalents à ceux obtenus pour $1/K^*$.

Conclusion générale et perspectives

1. Conclusion générale

Dans cette thèse, les écoulements thermoconvectifs en milieu poreux anisotrope ont été étudiés. Nous avons envisagé le cas d'un milieu poreux hydrodynamiquement anisotrope avec des axes principaux de perméabilité orientés obliquement par rapport au champ gravitationnel. Dans le premier essai, le modèle physique étudié est constitué par un milieu poreux adjacent à une surface verticale qui a été supposée chauffée soit de façon isotherme, soit par un flux uniforme de chaleur. Le fluide saturant la matrice solide du milieu poreux est non-newtonien et considéré à caractéristique rhéologique en loi puissance de type *Ostwald-de-Waele*. Dans le deuxième essai, nous avons étudié la convection naturelle pénétrante dans un milieu poreux confiné par un puits cylindrique débouchant dans un large réservoir. Le milieu poreux dans ce cas est saturé par un fluide newtonien.

Dans l'environnement, les milieux poreux sont fortement anisotropes et sont souvent le siège d'écoulements thermoconvectifs naturels. Ces milieux sont saturés par des fluides qui sont pour la plupart des fluides non-newtoniens. La minimisation des pertes énergétiques et la recherche d'un meilleur transfert de chaleur pour des applications en ingénierie ont conduit à l'étude des phénomènes thermoconvectifs naturels. Disposer pour les grandeurs d'intérêt de l'écoulement, de modèles mathématiques prenant en compte aussi bien le réalisme physique du milieu poreux que constitue l'anisotropie en perméabilité que le caractère rhéologique du fluide du fluide non-newtonien a été la motivation de ce travail de recherche. Les différentes conclusions auxquelles nous sommes parvenus au cours de cet travail de recherche seront présentées par chapitre.

Dans le premier chapitre, nous avons posé le problème après avoir rappelé quelques définitions utiles pour la compréhension du sujet de recherche.

Dans le second chapitre, nous avons présenté le modèle physique étudié suivi du bien-fondé de l'étude. Nous avons rapporté dans ce chapitre, les lois de comportement du phénomène physique. Nous y avons rapporté également quelques éléments entrant dans la classification des différentes catégories de fluides non-newtoniens lorsque ces derniers sont en écoulement de cisaillement simple.

Dans le chapitre 3, nous avons étudié la convection naturelle en régime transitoire au voisinage d'une surface verticale adjacente à un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non-newtonien. A partir de l'instant initial de chauffage de la surface jusqu'à une date τ_s déterminée, le transfert thermique passe d'un régime transitoire de conduction unidimensionnelle à un régime permanent bidimensionnel de convection naturelle. Pendant le régime de conduction ($\tau < \tau_s$), les champs d'écoulement et de température sont exclusivement affectés par le temps et le transfert de chaleur au cours de ce régime n'est affecté ni par les paramètres d'anisotropie ni par l'indice d'écoulement du fluide non-newtonien. Indépendamment du type de chauffage imposé sur la surface verticale, le temps τ_s croît lorsque le rapport d'anisotropie K^* et l'angle d'orientation des directions principales de perméabilité θ augmentent. Pendant le régime permanent ($\tau > \tau_s$), les paramètres d'anisotropie, l'indice d'écoulement du fluide et la distance comptée sur la plaque à partir du bord d'attaque influencent considérablement le phénomène convectif. Pendant cette période de temps, les champs d'écoulement, de température et le taux de transfert de chaleur sont indépendants du temps. Le taux de transfert de chaleur devient de plus en plus important lorsque l'indice d'écoulement du fluide non-newtonien croît.

Au chapitre 4, le régime de couche limite de la convection naturelle a été étudié. Le modèle physique étudié est également une surface verticale

adjacent à un milieu poreux anisotrope en perméabilité et saturé par un fluide non-newtonien. Comme il a été envisagé dans l'étude résumée au chapitre 3, la surface verticale a été supposée chauffée, soit de façon isotherme, soit par un flux uniforme de chaleur. A travers une approche basée sur une méthode intégrale et la méthode classique de Karman-Polhausen, une solution analytique a été trouvée respectivement pour les nombres de Nusselt local et moyen sur la surface et pour l'épaisseur de la couche limite. La comparaison des solutions obtenues dans le présent chapitre avec celles disponibles en littérature dans le cas des fluides newtoniens ($n = 1$) a révélé un bon accord. Nous avons noté que, l'écoulement convectif le long de la surface verticale est grandement affecté par les paramètres d'anisotropie en perméabilité que sont le rapport d'anisotropie K^* et l'angle d'orientation des directions principales de perméabilité θ . Nous avons démontré que le transfert de chaleur est maximal lorsque l'orientation de l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle au champ gravitationnel et est minimal quand cette orientation lui est perpendiculaire. Il résulte de cette observation que la meilleure isolation thermique possible est obtenue lorsque l'axe principal ayant la perméabilité la plus faible est parallèle au champ gravitationnel.

Dans le chapitre 5, une solution affine au problème de pénétration des courants convectifs à l'intérieur d'un puits cylindrique vertical débouchant dans un large réservoir a été proposée. Le puits cylindrique confine un milieu poreux anisotrope en perméabilité et saturé par un fluide newtonien. Les axes de perméabilité du milieu poreux sont inclinés obliquement par rapport au champ gravitationnel. Sur la base de la méthode de résolution développée par Lighthill, les solutions détaillées des équations gouvernantes du phénomène ont été obtenues pour le champ de température, de l'écoulement et pour la profondeur de pénétration de l'écoulement convectif et le transfert de chaleur

dans le puits. Nous retenons de cette investigation que dans le cas d'un milieu poreux anisotrope, lorsque le rapport d'anisotropie est inférieur à l'unité ($K^* < 1$), la profondeur de pénétration des courants convectifs dans la puits diminue. La situation inverse est observée lorsque $K^* > 1$.

Au chapitre 6, une étude analytique a été menée pour étudier la couche limite en convection naturelle pénétrante à l'intérieur d'un puits cylindrique vertical débouchant dans un large réservoir. Ce cylindre vertical contient un milieu poreux hydrodynamiquement anisotrope saturé par un fluide newtonien et dont les axes de perméabilité sont orientés obliquement par rapport au champ gravitationnel. Deux méthodes de résolution ont été développées pour résoudre les équations de la couche limite écrites à partir du modèle de Darcy généralisé. Il a été montré que le problème physique est fondamentalement contrôlé par les paramètres tels que le rapport de forme du cylindre (R/L), les paramètres anisotropes K^* et θ et le nombre de Rayleigh R_L . Au terme de cette analyse, nous avons abouti à l'importante conclusion selon laquelle le transfert de chaleur est maximal lorsque l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée est orientée parallèlement au champ gravitationnel et qu'une perméabilité minimale dans la direction du champ gravitationnel minimise le transfert de chaleur.

2. Perspectives

Au regard des résultats obtenus, il est à noter qu'en complément de la disposition faisant état de l'anisotropie du milieu poreux, il reste posé le problème de l'inhomogénéité du milieu poreux. En effet, dans la réalité, chacune des perméabilités considérées varie en fonction de la variable spatiale considérée dans la direction de l'écoulement. La considération simultanée de ces deux états du milieu poreux dans la modélisation des écoulements

thermoconvectifs est donc souhaitable. Par ailleurs, pour le fluide saturant la matrice solide nous avons envisagé au cours de notre étude un mouvement de cisaillement simple. En effet, l'écoulement de cisaillement peut induire des contraintes normales qui, à faible taux de cisaillement sont des fonctions quadratures de la vitesse de cisaillement, donc indépendantes de la direction de l'écoulement. A fort taux de cisaillement, la dépendance est en loi de puissance occasionnant ainsi l'anisotropie des contraintes normales qui rend plus complexe l'écoulement du fluide. Aussi le modèle rhéologique en loi de puissance adopté, bien que très utilisé dans les calculs, demeure-t-il limité à un petit domaine de vitesses de cisaillement. Elle s'avère inadaptée pour les opérations liées aux fluides constituées de macromolécules telles que les plastiques. Au-delà de tout calcul théorique, il est souhaitable d'envisager la validation des résultats à travers un travail expérimental.

REFERENCES

- ABOUBI, K., ROBILLARD, L. and BILGEN E., 1995, "Natural convection in horizontal annulus filled with an anisotropic porous medium", *ASME / JSME Thermal Eng. Conf*, Vol. 3, pp. 415-422.
- AKOWANOU, C. and DEGAN, G., 2007, "Boundary-layer analysis for natural convection over a vertical plate embedded in an anisotropic porous region with a non-Newtonian fluid". Article sous presse.
- BEAR, J., 1972 "Dynamics of fluids in porous media", *Dover Publications, Elsevier, New York*.
- BEJAN, A., 1980, "Natural convection in a vertical cylindrical well filled with porous medium", *Int J Heat Mass Transfer*, Vol. 23, pp.726-729.
- BEJAN, A., 1984, "Convection heat transfer", *A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons*
- BEJAN, A. and POULIKAKOS, D., 1984, " The non-Darcy regime for vertical boundary-layer natural convection in a porous medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 27, pp. 717-722.
- BIAN, W., VASSEUR, P. and BILGEN, E., 1994, "Boundary-layer analysis for natural convection in a vertical porous layer filled a non-Newtonian fluid", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 15, pp. 384-391.
- CASTINEL, G. and COMBARNOUS, M., 1974, "Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope". *C. R. Hebd. Seanc. Acad. Sci. Paris. B*, Vol. 278, pp.: 701-704.

- CHANG, J. and HSIAO, F., 1993, "Natural Convection in a Finite Wall Rectangular Cavity Filled With an Anisotropic Porous Medium" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.36, pp.3361-3367.
- CHENG, P., TSAU H., 1999," The effective stagnant thermal conductivity of porous Media with periodic structure", *J. Porous Media*, vol. 2, pp. 19-38.
- CHEN, T., CHEN, C. K., 1988, "Free convection flow of non-Newtonian fluids along a vertical plate embedded in a porous medium". *J. Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 257-260.
- CHENG, P., 1978, "Heat transfer in geothermal systems". *Adv. Heat Transfer*, Vol. 15, pp. 1-105.
- CHENG, P. and IOAN, Pop., 1984, "Transient free convection about a vertical flat plate embedded in a porous media", *Int. J. Engng. Sci*, Vol. 22, pp. 253-264.
- CHENG, P. and MINKOWYCZ, W. J., 1997, "Free convection about a vertical flat plate embedded in a saturated porous medium with application to heat transfer from a dyke", *J. Geophys. Res*, Vol. 82, pp. 2040-2044.
- CHIN-YANG C., 2006 "Natural convection heat and mass transfer of non-newtonian power fluids with yield stress in porous media from a vertical plate with variable wall heat and mass fluxes", *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, pp. 1156-1164.
- DEGAN, G., 1997, "Etude Numérique et Analytique de la Convection Naturelle en Milieu Poreux Anisotrope " Thèse de Philosophae Doctor (Ph.D.) *Ecole Polytechnique de Montréal*

- DEGAN, G., VASSEUR, P. and BILGEN, E., 1995, "Convective heat transfer in a vertical anisotropic porous layer". *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 1975-1987.
- DEGAN, G. and VASSEUR, P., 1996, "Natural convection in a vertical slot filled with an anisotropic porous medium with oblique principal axes". *Numerical Heat Transfer*, Vol. A30, pp. 397-412.
- DEGAN, G. and VASSEUR, P., (1997) "Boundary-layer regime in a vertical porous layer with anisotropic permeability and boundary effects", *Int J. Heat and Fluid flow*, Vol. 18, pp.334-343.
- DEGAN, G., AKOWANOU, C., AWANOU, C. N., 2007, "Transient natural convection of non-Newtonian fluids about a vertical surface embedded in an anisotropic porous medium", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50 , pp.4629-4639.
- DEGAN, G., GIBIGAYE, M., AKOWANOU, C. and AWANOU, C. N., 2007, "The similarity regime for natural convection in a vertical cylindrical well filled with an anisotropic porous medium", Article sous presse.
- EL-HAKIEM, 2001, "Combined convection in non-newtonian fluids along a non-isothermal vertical plate in a porous medium with lateral mass flux", *Heat and Mass transfer*, Vol. 37, pp. 379-385.
- EL-HAKIEM, 2001, "Thermal Dispersion Effects on Combined Convection in Non-Newtonian Fluids Along a Non-isothermal Vertical Plate in a Porous Medium", *Transport in Porous Media*, Vol. 45, pp. 29-40.

- ENE, H. I., 1991, " Effects of anisotropy on the free convection from a vertical plate embedded in a porous medium". *Trans. Porous Media*, Vol. 6, pp. 183-194.
- EPHERRE, J. F., 1975, " Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope", *Rev. Gen. Therm* 168: 949-950
- EVANS, G. H. and PLUMB, O. A., 1978, " Natural convection from a vertical isothermal surface embedded in a saturated porous medium", *ASME Paper*, Vol. 72, pp. HT-85.
- GORLA, R. S. R. and MAHESH, K., 1996, "Mixed convection in non-newtonian fluids along a vertical plate in porous medium". *Acta Mechanica*, Vol. 118, pp. 55-64.
- GORLA, R. S. R., MAHESH, K., 1998, "Mixed convection in non-newtonian fluids along a non-isothermal horizontal surface in porous media". *Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, pp. 281-286.
- GORLA, R. S. R., MAHESH, K., 1999, " Mixed convection in non-newtonian fluids along a vertical plate with variable surface heat flux a in porous medium". *Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 221-227.
- GORLA, R. S. R., MAHESH, K., 2003, " Free convection in non-newtonian fluids along a horizontal plate in porous medium". *Heat and Mass Transfer* 39: 101-106.
- HADY, F. M. and IBRAHIM, F. S., 1997, "Forced Convection Heat Transfert on a Flat Plate Embedded in Porous Media for Power-Law Fluids". *Transport in Porous Media*, Vol. 28, pp.125-134.

- HONG, J. T., TIEN, C. L. and KAVIANY, M., 1985, "Non-Darcy effects on vertical-plate natural convection in a porous medium with high porosities". *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 2149-2157.
- HOSSIAN, M. A., NAKAYAMA, A. and IOAN, P., 1995, "Conjugate free convection of non-Newtonian fluids about a vertical cylindrical fin in porous media". *Heat and Mass Transfer*, Vol. 30, pp. 149-153.
- HSU, C. T. and CHENG, P., 1985, "The Brinkman model for natural convection about a semi-infinite vertical flat plate in a porous medium". *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 663-697.
- IBRAHIM, F. S., MANSOUR, M. A. and ABDEL-GAIED, 2005, "Radiative and Thermal Dispersion Effects on Non-Darcy Natural Convection with Lateral Mass Flux for Non-Newtonian Fluid from a Vertical Flat Plate in a Saturated Porous", *Transport Porous Media*, Vol. 61, pp. 45-57.
- J. PADET, 1991, "Fluides en écoulement: méthodes et modèles" *MASSON*
- JOHNSON, C. and CHENG, P., 1978, "Possible similarity solutions for free convection boundary layers adjacent to flat plates in porous media". *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 21, pp. 709-718
- KAVIANY, M. and MITTAL, M., 1987, "Natural convection heat transfer from a vertical plate to high permeability porous media: an experiment and an approximate solution", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 30, pp. : 967-977
- KUMARI, S., MASUDA, Y. and KAZUO, H. T., 1993, "Natural convection in an anisotropic porous medium heated from the side (effects

of anisotropic properties of porous matrix) ”, *Heat transfer Jpn. Res*, Vol. 22, pp. 139-153.

- KVERNOLD, O. and TYVAND, P. A., 1979, ” Non-linear thermal convection in anisotropic porous media” *J. Fluid Mech*, Vol. 90, pp. 609-624.
- LIGHTHILL, M. J., 1953, ” Theoretical considerations of free convection in tubes”, *Q J. Mech Appl Math*, Vol. 6, pp. 398-439.
- MAHESH, K., and GORLA, R., 1996, ”Combined Convection in Power-Law Along a Non-isothermal Vertical Plate in Porous Medium”. *Transport in Porous Media*, Vol. 24, pp. 157-166.
- MAGYARI, E., IOAN, P. and ADRIAN, P., 2007, ”Effet of the source term on steady free convection boundary layer flows over a vertical plate in a porous medium”, Part II. *Trans Porous Medium*, Vol. 67, pp. 119-201.
- MANSOUR, A., EL-HAKIEM, EL-GAID and GORLA, R., 1997, ”Mixed convection in Non-Newtonian Fluids Along an isothermal Vertical Cylinder in a porous Medium”, *Transport in porous Media*, Vol. 28, pp. 307-317.
- Mc KIBBIN, R., 1984, ”Thermal convection in a porous layer: Effects of Anisotropy and Surface Boundary conditions” *Transport Porous Media*, Vol. 1, pp. 271-292.
- MIDOUX, N., 1993, ”Mécanique et Rhéologie des fluides en génie chimique”, *Génie des procédés de l'école de Nancy. TEC & DOC-LAVOISIER, 1993.*

- NAKYAMA, A. and KOYAMA, H., 1987, "An Integral Method for Free Convection From a Vertical Heated Surface in a Thermally Stratified Porous Medium", *Wärme-und-Stoffübertragung*, Vol. 21, pp. 297-300
- NEALE, G., 1977, "Degrees of Anisotropy for Fluid Flow and Diffusion (Electrical Conduction) Through Anisotropic Porous Medium", *AIChE J* Vol. 23, pp. 56-62.
- NI, J. and BECKERMANN, C., 1991, "Natural Convection in a Vertical Enclosure Filled With Anisotropic Porous Media", *J. Heat Transfer*, Vol. 113, pp. 1033-1037.
- NIELD, D. A. and KUZNETSOV, A. V., 2007, "The effect of combined vertical of horizontal heterogeneity on the onset of convection in a bidisperse porous medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 50, pp. 3329-3339.
- NIELD, D. A. and KUZNETSOV, A. V., 2007, "The onset of convection in a shallow box occupied by heterogeneous porous medium with constant flux boundaries", *Trans. Porous Media*, Vol. 67, pp.441-451.
- PASCAL, H., 1983, "Rheological Behaviour Effect of Non-Newtonian Fluids on Steady and Unsteady flow Through Porous Media", *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 7, pp. 207-224.
- PASCAL, H., 1986, "Rheological Effects of Non-Newtonian Behaviour of Displacing Fluids on Stability of a Moving Interface in Radial Oil Displacement Mechanism in Porous Media", *Int. J. Engin. Science*, Vol 24, pp. 1465-1476.

- PLUMB, O. A. and HUENEFELD, J. C., 1981, "Non-Darcy Natural Convection From Heated Surfaces in a Saturated Porous Medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 24, pp. 765-778.
- POULIKAKOS, D., SPATZ, T. L., 1988, "Non-Newtonian Natural Convection at a Melting Front in a Permeable Solid Matrix", *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, Vol.15, pp. 593-603.
- RAPTIS, A., 1983, "Unsteady free convection flow through a porous medium ", *Int. J. Eng. Sci*, Vol. 21, pp. 345-348.
- RAPTIS, A., PERDIKIS, C., 1985, " Unsteady convection flow through a porous medium in the presence of free convection", *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, Vol. 12, pp. 697-705.
- RASTOGI, S. K. and POULIKAKOS, D., 1995, "Double-diffusion From a Vertical Surface in a Porous Region Saturated With a Non-Newtonian fluid", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 935-946.
- SEETHARAMU, K. N. and DUTTA, P., 1990, "Free Convection in a Saturated Porous Medium Adjacent to a Non-isothermal Vertical Impermeable Wall. Effects of Anisotropy on the Free Convection From a Concentrated Source in a Porous Medium", *Wärme-und-Stoffübertragung*, Vol. 25, pp. 9-15.
- SHIH-CHIEH, W., CHAO-KUANG, C. and YUE-TZU Y., 2002," Natural Convection of Non-Newtonian Fluids Through Permeable Axisymmetric and Two-dimensional Bodies in a Porous Medium", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 393-408.

- VASSEUR, P. and DEGAN, G., 1998, "Free convection along a vertical heated plate in a porous medium with anisotropic permeability", *Int. J. of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, Vol. 8, pp. 43-63.
- VASANTHA, R. and NATH, G., 1987, "Forced convection along a longitudinal cylinder embedded in saturated porous medium", *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 14, pp. 639-646.
- WANG, C., TU, C. and ZHANG, X., 1990, "Mixed Convection of Non-Newtonian Fluids From a Vertical Plate Embedded in a Porous Medium", *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 6, No.3.
- YUE-TZU, Y., SAE-JAN W., 1996, "Free Convection Heat Transfer of Non-Newtonian Fluids over Axisymmetric and Two-dimensional Bodies of Arbitrary Shape Embedded in a Fluid-saturated Porous Medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, No 1, pp: 203-210.
- ZHANG, X., 1993, "Convective Heat Transfer in a Vertical Porous Layer With Anisotropic Permeability ", *Proceedings 14th Canadian Congress of Applied Mechanics*. Vol. 2, pp. 579-580.

Annexes



Transient natural convection of non-Newtonian fluids about a vertical surface embedded in an anisotropic porous medium

G. Degan^{a,*}, C. Akowanou^a, N.C. Awanou^b

^a *Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Appliquées, LEMA EPAC, Université d'Abomey-Calavi, B.P. 2009, Cotonou, Bénin*

^b *LPR-FAST, Université d'Abomey-Calavi, B.P. 526, Cotonou, Bénin*

Received 27 October 2006; received in revised form 2 February 2007

Available online 7 June 2007

Abstract

An analytical method is carried out to investigate transient free convection boundary layer flow along a vertical surface embedded in an anisotropic porous medium saturated by a non-Newtonian fluid. The porous medium is anisotropic in permeability with its principal axes oriented in a direction that is non-coincident with the gravity force. A step increase in wall temperature or in surface heat flux is considered. On the basis of the modified Darcy power-law model proposed by Pascal [H. Pascal, Rheological behaviour effect of non-Newtonian fluids on steady and unsteady flow through porous media, *Int. J. Numer. Anal. Methods in Geomech.* 7 (1983) 207–224] and the generalized Darcy's law described by Bear [J. Bear, *Dynamics of fluids in porous media*. Dover Publications, Elsevier, New York (1972)], boundary-layer equations are solved exactly by the method of characteristics. Scale analysis is applied to predict the order-of-magnitudes involved in the boundary layer regime. Analytical expressions are obtained for the limiting time required to reach steady-state, the boundary-layer thickness and the local Nusselt number in terms of the modified-Darcy Rayleigh number, the power-law index, the anisotropic permeability ratio, and the orientation angle of the principal axes. It is demonstrated that both the power-law index and the anisotropic properties have a strong influence on the heat transfer rate.

© 2007 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

The flow through a porous medium under the influence of temperature differences, is one of most considerable and contemporary subjects, because it finds great applications in geothermy, geophysics and technology. The practical interest in convective heat transfer in porous medium is expanded rapidly, due to the wide range of applications in engineering fields. These important applications include such areas as geothermal energy utilization, thermal energy storage and recoverable systems, petroleum reservoirs, insulation of high temperature gas–solid reaction vessels, chemical catalytic convectors, storage of grain, fruits and vegetables, pollutant dispersion in aquifers, industrial and agricultural water distribution, buried electrical cables,

combustion in situ in underground reservoirs for the enhancement of oil recovery, ceramic radiant porous burners used in industrial firms as efficient heat transfer devices and the reduction of hazardous combustion products using catalytic porous beds. In a review article, Cheng [1] has discussed various works done in this field as applied to geothermal.

A cursory inspection of the existing references on convective external flow in porous media reveals that, in general, steady-state phenomena have been extensively studied, whereas unsteady phenomena have received relatively much less attention. The mechanism causing an unsteady flow may either act at the boundaries, and this may be through a change in one or more of the dependent variables, or it may be present within the fluid volume. Examples of the former include unsteadiness resulting from the movement of the system boundaries relative to the fluid and changing the upstream or the inlet conditions. Unsteadiness of the latter type results from changing the

* Corresponding author. Tel.: +229 95 95 52 51; fax: +229 21 36 01 99.
E-mail address: ger_degan@yahoo.fr (G. Degan).

materials industry) the fluid saturating the porous matrix is not necessarily Newtonian. For example, in the literature, the number of existing works in the limit of thermal convection in a porous medium saturated with a non-Newtonian fluid driven by temperature gradients alone is very limited. To this end, Chen and Chen [9] studied numerically the problem of boundary layer free convection about an isothermal vertical plate in a porous medium saturated by a power-law index fluid. Poulikakos and Spatz [10] investigated the effect of non-Newtonian natural convection at a melting front in a permeable matrix. Their results documented the dependence of the local heat transfer rate at the melting front on the type of power-law fluid saturating the porous matrix. Recently, Rastogi and Poulikakos [11] studied the double diffusion from a vertical surface embedded in a porous medium saturated by a non-Newtonian fluid. These authors have found that the variation of the wall temperature and concentration necessary to yield a constant heat and species flux at the wall, depended strongly on the power-law index.

Moreover, in all the above studies, the porous medium is assumed to be isotropic whereas, in the several applications, the porous materials are anisotropic. Despite this fact, natural convection in such anisotropic porous media has received relatively little attention. The effects of an anisotropic permeability on thermal convection in a porous medium began with the investigation of Castinel and Combarrous [12], concerning the onset of motion in a horizontal layer heated from below, and continued with the works of Epherre [13], of Kvernfold and Tyvand [14] and of Kibbin [15]. Natural convection within enclosures heated from the side was investigated by Kimura et al. [16] and Ni and Beckermann [17], for the case when one of the principal axes of anisotropy of permeability is aligned with gravity and by Zhang [18], Degan et al. [19] and Degan and Vasseur [20] when the principal axes are inclined with respect to gravity. It was demonstrated by these authors that the effects of the anisotropy considerably modify the convective heat transfer. Recently, the effects of anisotropy on the boundary-layer free convection over an impermeable vertical plate, were investigated by Ene [21], using the method of integral relations, for the case when the principal axes of anisotropy of permeability are coincident with coordinate axes, and by Vasseur and Degan [22] when the principal axes are arbitrary oriented. It was concluded that, if the permeability in the direction normal to the plate is greater than the permeability along the plate, then there is an increase in the temperature field.

The present paper describes an analytical procedure for obtaining an exact solution for transient natural convection from a vertical plate embedded in an anisotropic porous medium saturated by a non-Newtonian fluid. A step increase in wall temperature or in surface heat flux is considered. The porous medium is anisotropic in permeability with its principal axes oriented in a direction that is oblique to the gravity vector. Combining the modified Darcy

power-law model proposed by Pascal [23,24] and the generalized Darcy's law proposed by Bear [25], a characterization of the saturating flow through the porous matrix is used to describe the non-Newtonian fluid behavior. In the large Rayleigh number limit, the boundary layer equations are solved analytically upon introducing a scale analysis to predict the order-of-magnitudes involved in the boundary layer regime.

2. Mathematical formulation

We consider here the problem of unsteady heating of a vertical impermeable plate embedded in a saturated porous medium characterized by an anisotropic permeability. The x and y axes are aligned with the vertical and the horizontal coordinates, respectively. The saturating fluid is a non-Newtonian fluid of power-law behaviour and the porous medium is at a uniform temperature T^∞ . At $t=0$, the temperature of the plate or the heat flux at the plate, is suddenly increased to the constant value T_w or q_w , respectively. The anisotropy of the porous medium is characterized by the anisotropy ratio $K^* = K_1/K_2$ and the orientation angle θ , defined as the angle between the horizontal direction and the principal axis with the permeability K_2 . It is assumed that the fluid and the porous medium are everywhere in local thermodynamic equilibrium. The pressure and the temperature are such that the fluid remains in the liquid phase. The thermophysical properties of the fluid are assumed constant, except for the density in the buoyancy term in the momentum equation (i.e., the Boussinesq approximation).

In accordance with previous reports given by Pascal [23,24] and following Bear [25], the model of laminar flow of a non-Newtonian power-law fluid through the porous medium, describing the generalized Darcy's law, can be written as follows

$$\vec{V} = -\frac{\bar{K}}{\mu_a} \nabla p, \quad (1)$$

$$\mu_a = \epsilon(u^2 + v^2)^{(n-1)/2}, \quad (2)$$

$$\epsilon = \frac{2\bar{h}}{8^{(n+1)/2} (\sqrt{K_1 K_2} \gamma)^{(n-1)/2} (1 + 3n)^n}. \quad (3)$$

Many of the inelastic non-Newtonian fluids encountered in engineering processes are known to follow a power-law model in which the pressure drop is proportional to the mass flow rate.

In the above equations, \vec{V} is the superficial velocity, γ the porosity of the porous medium, μ_a the apparent viscosity, \bar{h} the consistency index and n the power-law index. In the above model, the rheological parameters \bar{h} and n are assumed to be temperature independent.

The equations describing conservation of mass, momentum and energy for the present problem are, respectively

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (4)$$

$$\vec{V} = -\frac{\bar{K}}{\mu_a} (\nabla p + \rho \vec{g}), \quad (5)$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} T - \alpha \nabla T) = 0, \quad (6)$$

$$\rho = \rho_\infty [1 - \beta(T - T_\infty)]. \quad (7)$$

In the above equations T is the local equilibrium temperature of the fluid and the porous matrix, \vec{g} the gravitational acceleration, p the pressure, t the time, $\alpha = k/(\rho c_p)_f$ the thermal diffusivity (k the thermal conductivity of fluid/porous matrix combination, $(\rho c_p)_f$ the heat capacity of the fluid), $\sigma = (\rho c_p)_p/(\rho c_p)_f$ the heat capacity ratio, β the coefficient of thermal expansion of the fluid and ρ the density. The symmetrical second-order permeability tensor \bar{K} is defined as

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_1 \cos^2 \theta + K_2 \sin^2 \theta & (K_1 - K_2) \sin \theta \cos \theta \\ (K_1 - K_2) \sin \theta \cos \theta & K_2 \cos^2 \theta + K_1 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Eliminating the pressure term by taking the curl of Eq. (5) and making use of Eq. (4), we obtain a single momentum, which reads

$$a \frac{\partial u}{\partial y} + c \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - b \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu_a} \left\{ \frac{\partial \mu_a}{\partial x} (-cu + bv) + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} (-au + cv) + K_1 \rho_\infty \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \right\}, \quad (9)$$

where

$$\begin{cases} a = \cos^2 \theta + K^* \sin^2 \theta \\ b = \sin^2 \theta + K^* \cos^2 \theta \\ c = \frac{1}{2}(1 - K^*) \sin 2\theta \end{cases} \quad (10)$$

3. Scale analysis

In this section, as t increases, the convection effect increases and we consider the boundary layer regime for which most of the fluid motion is restricted to a thin layer δ along the vertical plate. From the momentum equation (9), it is clear that we may use the boundary-layer hypothesis only when the following conditions:

$$a \frac{\partial u}{\partial y} \gg c \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (11)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial y} \gg c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (12)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial y} \gg b \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (13)$$

$$K_1 \rho_\infty \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial \mu_a}{\partial x} (-cu + bv), \quad (14)$$

$$K_1 \rho_\infty \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial \mu_a}{\partial y} (-au + cv), \quad (15)$$

are satisfied. So, under the boundary-layer approximations, at large modified Darcy–Rayleigh number, the governing equations become:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (u^n) = \frac{n}{a} \frac{K_1 \rho_\infty \beta g}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (17)$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (18)$$

which are to be solved subject to the following initial condition:

$$t = 0: \quad T(x, y, 0) = 0. \quad (19)$$

The boundary conditions associated with previous governing equations are:

$$y = 0: \quad v = 0, \quad T(x, 0, t) = T_w \quad (a) \quad (20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, 0, t) = -\frac{q_w}{k} \quad (b) \quad (20)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u = 0, \quad T(x, \infty, t) = T_\infty. \quad (21)$$

Following Bejan [26] and recognizing H and δ as the x and y scales, respectively, in the boundary layer of interest ($\delta \ll H$), the conservation Eqs. (16)–(18) and (20) require the following balances:

$$\frac{u}{H} \sim \frac{v}{\delta}, \quad (22)$$

$$a \frac{u}{\delta} \sim \frac{1}{\epsilon u^{n-1}} K_1 \rho_\infty \beta g \frac{\Delta T}{\delta}, \quad (23)$$

$$\sigma \frac{\Delta T}{t}, \quad u \frac{\Delta T}{H}, \quad v \frac{\Delta T}{\delta} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta^2}, \quad (24)$$

where $\Delta T = (T_w - T_\infty)$ for constant wall temperature, $\Delta T \sim q_w \delta / k$ for constant wall heat flux, is the characteristic scale of temperature. It is noticed that the temperature drop across the boundary layer is of the order of one. In the next subsections, it will distinguish the result of the scale analysis for two cases, according to the heating process of the wall.

3.1. Isothermal wall

Solving the balances between Eqs. (22)–(24) for δ , u , v and t , we obtain the following results:

$$\delta \sim HRa_H^{-1/(2n)} a^{1/(2n)}, \quad (25)$$

$$u \sim \frac{\alpha}{H} Ra_H^{1/n} a^{-1/n}, \quad (26)$$

$$v \sim \frac{\alpha}{H} Ra_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)}, \quad (27)$$

$$t \sim \frac{\sigma H^2}{\alpha} Ra_H^{-1/n} a^{1/n}, \quad (28)$$

where the modified Darcy–Rayleigh number Ra_H , based on the height of the plate, is defined as

$$Ra_H = \frac{K_1 \rho_\infty \beta g \Delta T H^n}{\epsilon \alpha^n}. \quad (29)$$

Defining the stream function ψ related to the velocity components by

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{30}$$

such that the continuity equation, Eq. (4), is automatically satisfied, the scale for the stream function can be obtained as follows:

$$\psi \sim \alpha Ra_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \tag{31}$$

The local Nusselt number, Nu_H defined as the heat transfer over the pure heat conduction through the vertical plate, has the following scale:

$$Nu_H = \frac{hH}{k} \sim Ra_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \tag{32}$$

where $h = q/(T_w - T_\infty)$ is the local heat transfer coefficient, $q = -k(\partial T/\partial y)|_{y=0}$ the local heat flux at the heated surface.

For the special case of an isotropic porous medium ($K^* = 1$, i.e., $a = 1$), the scales above reduce to those predicted by Rastoghi and Poulikakos [11] while studying the double diffusion boundary layer regime over a vertical surface embedded in a porous region saturated by a non-Newtonian fluid.

The conditions of validity of the present boundary layer analysis now will be discussed. These results are expected to be valid only when the vertical boundary-layer is slender ($\delta \ll H$), i.e., for $Ra_H \gg a$. Furthermore, from Eqs. (11)–(15), (25)–(27), and making use of the results of the above order-of-magnitude analysis developed in this section, the boundary layer hypothesis is valid only when the conditions

$$b \ll Ra_H^{1/n} a^{(n-1)/n} \tag{33}$$

and

$$c \ll Ra_H^{1/(2n)} a^{(2n-1)/(2n)} \tag{34}$$

are satisfied.

3.2. Wall with uniform heat flux

Solving the balances of quantities of interest from previous equations, using the same calculus procedure when the plate is heated by a constant heat flux, one can have:

$$\delta \sim H Ra_H^{-1/(2n+1)} a^{1/(2n+1)} \tag{35}$$

$$u \sim \frac{\alpha}{H} Ra_H^{2/(2n+1)} a^{-1/(2n+1)} \tag{36}$$

$$v \sim \frac{\alpha}{H} Ra_H^{1/(2n+1)} a^{-1/(2n+1)} \tag{37}$$

$$\Delta T \sim \frac{q_w H}{k} Ra_H^{-1/(2n+1)} a^{1/(2n+1)} \tag{38}$$

$$t \sim \frac{\sigma H^2}{\alpha} Ra_H^{-2/(2n+1)} a^{2/(2n+1)} \tag{39}$$

$$\psi \sim \alpha Ra_H^{1/(2n+1)} a^{-1/(2n+1)} \tag{40}$$

$$Nu_H \sim Ra_H^{1/(2n+1)} a^{-1/(2n+1)} \tag{41}$$

where the modified Darcy–Rayleigh number R_H , based on heat flux, is defined as

$$R_H = \frac{K_1 q_\infty g \beta H^{n+1} q_w}{\epsilon \alpha^n k} \tag{42}$$

Taking into account the previous scales obtained in this case, the condition of existence of the vertical boundary-layer hypothesis formulated by ($\delta \ll H$) becomes $R_H \gg a$. Moreover, making use of Eqs. (11)–(14), (15), (36)–(38), the boundary-layer hypothesis is valid only when the conditions:

$$b \ll Ra_H^{2/(2n+1)} a^{(2n-1)/(2n+1)} \tag{43}$$

and

$$c \ll Ra_H^{1/(2n+1)} a^{(2n-1)/(2n+1)} \tag{44}$$

are satisfied.

4. Resolution

On the one hand, taking H , $H/Ra_H^{1/(2n)}$, $\alpha Ra_H^{1/n}/H$, $\alpha Ra_H^{1/(2n)}/H$, ΔT and $\sigma H^2/(\alpha Ra_H^{1/n})$ as respective dimensional scales for length, velocities in x and y directions, temperature and time, concerning the case of isothermal wall and on the other hand, setting H , $H/Ra_H^{1/(2n+1)}$, $\alpha Ra_H^{2/(2n+1)}/H$, $\alpha Ra_H^{1/(2n+1)}/H$, ΔT and $\sigma H^2/(\alpha Ra_H^{2/(2n+1)})$ as respective dimensional scales for length, velocities in x and y directions, temperature and time, for the case of wall with uniform heat flux, it is found that the dimensionless boundary-layer equations are

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \tag{45}$$

$$\frac{\partial}{\partial Y}(U^n) = \frac{n}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial Y}, \tag{46}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}. \tag{47}$$

Integrating Eq. (46) from $Y = 0$ to $Y = \infty$ (region situated in the free stream), one can have

$$U = \left(\frac{n\Theta}{a}\right)^{1/n}. \tag{48}$$

Making use of the continuity Eq. (45), the integration of equation of energy (47) yields:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty \Theta dY + \frac{\partial}{\partial X} \int_0^\infty U \Theta dY = -\left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y}\right)_{Y=0}. \tag{49}$$

Substituting Eq. (48) into Eq. (49) and rearranging the resulting expression, we obtain finally:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty \Theta dY + \left(\frac{n}{a}\right)^{1/n} \frac{\partial}{\partial X} \int_0^\infty \Theta^{(n+1)/n} dY = -\left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y}\right)_{Y=0} \quad (50)$$

The problem of transient natural convection in a porous medium about a vertical, semi-infinite flat plate with a step increase in wall temperature or surface heat flux, considered here, gives rise, as the classical problem of a viscous boundary layer in a free fluid, to the singularity problem in passing from the initial stage when the leading edge is not felt to the steady state defined for large time. For small values of time, the solutions for velocity and temperature are independent of X ; for large values of time the solutions are independent of time. The singularity value of time depends on the vertical distance X . As pointed out by Ene and Polisevski [27], the heat transfer characteristics change suddenly from transient, one-dimensional heat conduction to steady two-dimensional natural convection. So, Eq. (50) is to be solved subject to the initial condition (19) which becomes

$$\tau = 0: \quad \Theta(X, Y, 0) = 0 \quad (51)$$

and the dimensionless boundary conditions prevailing at the vertical surface are:

$$\begin{cases} Y = 0: \Theta(X, 0, \tau) = 1 & \text{(a),} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial Y}(X, 0, \tau) = -1 & \text{(b),} \end{cases} \quad (52)$$

In the following subsections, Eq. (50) will be differentially solved by considering the two kinds of boundary conditions (52) imposed in the present analysis.

4.1. Isothermal wall

Following Cheng and Pop [6], with the boundary condition (52a), we assume a temperature profile of the form

$$\Theta = \operatorname{erfc}(\eta), \quad (53)$$

where erfc is the complementary error function and η is expressed by

$$\eta = \frac{Y}{A} Ra_H^{-1/(2n)}, \quad (54)$$

where $A = \delta/H$ is the dimensionless boundary-layer thickness. Substituting Eqs. (53) and (54) into Eq. (50) and after integrating yields

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + \zeta \left(\frac{n}{a}\right)^{1/n} \frac{\partial A}{\partial X} = 2 \frac{Ra_H^{-1/n}}{A} \quad (55)$$

subject to the initial and boundary conditions

$$\begin{cases} \tau = 0: & A(X, 0) = 0 & \text{(a),} \\ \tau \geq 0: & A(X, \tau) = 0 \text{ at } X = 0 & \text{(b),} \end{cases} \quad (56)$$

where the constant ζ depending on the power-law index of the non-Newtonian fluids is expressed as follows

$$\zeta = \sqrt{\pi} \int_0^\infty [\operatorname{erfc}(x)]^{(n+1)/n} dx. \quad (57)$$

Eq. (55) is a first-order, linear, partial differential equation of the hyperbolic type and it has been solved exactly by the method of characteristics and approximately by the Karman–Polhausen integral-method. Solving by the method of characteristics, the differential system equivalent to Eq. (55) is expressed as

$$\frac{dX}{\zeta \left(\frac{n}{a}\right)^{1/n}} = d\tau = Ra_H^{1/n} \frac{A dA}{2}, \quad (58)$$

which has the characteristics

$$dX = \zeta \left(\frac{n}{a}\right)^{1/n} d\tau. \quad (59)$$

On each characteristic, A is related by:

$$Ra_H^{1/n} A dA = 2 d\tau \quad (60)$$

or

$$Ra_H^{1/n} \zeta \left(\frac{n}{a}\right)^{1/n} A dA = 2 dX, \quad (61)$$

depending on whether the characteristic intercepts the τ - or X -axis. Integrating Eq. (60) with the initial condition (56(a)) gives

$$A = 2 \sqrt{\frac{\tau}{Ra_H^{1/n}}} \quad (62)$$

and solving Eq. (61) subject to the boundary condition (56(b)) yields

$$A = \frac{2}{\sqrt{\zeta}} \left(\frac{a}{n Ra_H}\right)^{1/(2n)} \sqrt{X}. \quad (63)$$

As shown by Cheng and Pop [6] and revisited by Ene and Polisevki [27] in their analyses when studying the same problem in the case of Newtonian fluid saturating an isotropic porous medium, the expression for A changes from Eqs. (62),(63) along the limiting line characteristic

$$\tau = \tau_s = \left(\frac{a}{n}\right)^{1/n} \frac{X}{\zeta}, \quad (64)$$

so that, Eq. (64) is a straight line which divides the $X - \tau$ plane into two regions: a lower region for which A is given by Eq. (62) and an upper region for which A is given by Eq. (63). That limiting line characteristic provides the limit time reached in steady-state regime τ_s expressed by Eq. (64).

Under these considerations, we have two expressions of temperature profile corresponding to the two regions. For $\tau < \tau_s$ (in the lower region), one can find

$$\Theta = \operatorname{erfc}\left(\frac{Y}{2\sqrt{\tau}}\right) \quad (65)$$

and for $\tau > \tau_s$ (in the upper region), the temperature distribution is expressed as

$$\Theta = \operatorname{erfc}\left\{\frac{Y}{2} \sqrt{\frac{\zeta}{X}} \left(\frac{n}{a}\right)^{1/n}\right\} \quad (66)$$

As expected, Eq. (65) is independent of X , and the solution represents the transient heat conduction in a semi-infinite porous medium while Eq. (66), however, is independent of τ , and its solution represents steady-state natural convection.

The local Nusselt number for the region where $\tau > \tau_s$, Nu_x through the vertical surface is defined, in physical variables, by

$$Nu_x = \frac{qx}{k(T_w - T_\infty)}. \tag{67}$$

Making use of Eqs. (53), (54), (62) and (65), one can rewrite q as

$$q = \frac{2k(T_w - T_\infty)}{AH\sqrt{\pi}}, \tag{68}$$

which becomes, after substitution of Eq. (62) valid in the lower region where transient heat conduction is predominant, what follows

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}, \tag{69}$$

where $Q = q/[k\Delta TRa_H^{1/(2n)} / H]$ is the dimensionless local surface heat flux.

Taking into account Eqs. (53), (54), (63) and (66) and Eq. (68) becomes

$$q = \frac{k(T_w - T_\infty)}{x} \sqrt{\frac{\zeta}{\pi} \left(\frac{nRa_x}{a}\right)^{1/n}}, \tag{70}$$

valid in the upper zone where convection heat transfer is predominant (i.e., for $\tau > \tau_s$). So, substituting Eq. (70) into Eq. (67), we can express the local Nusselt number Nu_x as

$$Nu_x = \sqrt{\frac{\zeta n^{1/n}}{\pi}} Ra_x^{1/(2n)} a^{-1/(2n)}, \tag{71}$$

where $Ra_x = K_1 \varrho_\infty g \beta (T_w - T_\infty) x^n / (\epsilon \alpha^n)$ is the modified Darcy–Rayleigh number, based on the distance x from the edge of the surface.

On the other hand, the convective flow is described by the stream function which can be expressed from Eqs. (30), (48), (53), (54) and (63) as

$$\Psi = \frac{2}{\sqrt{\zeta}} n^{1/(2n)} I_{1/n} Ra_x^{1/(2n)} a^{-1/(2n)}, \tag{72}$$

where $\Psi = \psi/\alpha$ and

$$I_{1/n} = \int_0^\infty [\operatorname{erfc}(x)]^{1/n} dx. \tag{73}$$

It is obvious that by setting $n = 1$ in the limit of a Newtonian fluid saturating the porous matrix assumed isotropic in permeability for which the value of the anisotropic parameter a equals to unity, the results presented in the present analysis are found to be in a good agreement with those obtained by Cheng and Pop [6] and by Ene and Polisevski [27].

4.2. Wall with constant heat flux

The problem given by Eq. (50) with the conditions (51) and (52(b)) may be treated for the case of constant plate heat flux in similar fashion. Seeking the analogous form as previously of the solution which satisfies conditions evoked in this case, one can find after algebraic manipulation what follows

$$\Theta = \left\{ \frac{A\sqrt{\pi}}{2} R_H^{1/(2n+1)} \right\} \operatorname{erfc}(\eta), \tag{74}$$

where

$$\eta = \frac{Y}{A} R_H^{-1/(2n+1)}. \tag{75}$$

Substituting Eqs. (74) and (75) into Eq. (50), the equation for the boundary-layer thickness is obtained by the relation:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + B \left\{ \frac{AR_H^{1/(2n+1)}}{a} \right\}^{1/n} \frac{\partial A}{\partial X} = \left[A(R_H)^{2/(2n+1)} \right]^{-1}, \tag{76}$$

where B is expressed by

$$B = \frac{\zeta(2n+1)}{2n} \left(\frac{n\sqrt{\pi}}{2} \right)^{1/n}. \tag{77}$$

The resolution of Eq. (76) subject to conditions (56(a)) and (56(b)) by the method of characteristics yields the following line expressed by

$$\frac{dX}{B \left[AR_H^{1/(2n+1)} / a \right]^{1/n}} = d\tau = R_H^{2/(2n+1)} A dA. \tag{78}$$

In this case, on each characteristic, A is related by:

$$(R_H)^{2/(2n+1)} A dA = d\tau \tag{79}$$

and

$$(R_H)^{1/n} B a^{-1/n} A^{(n+1)/n} dA = dX. \tag{80}$$

Integrating Eqs. (79) and (80) subject to conditions (56(a)) and (56(b)), respectively, A is evaluated by

$$A = \sqrt{2\tau} R_H^{-1/(2n+1)}, \tag{81}$$

and

$$A = \left\{ \frac{(2n+1)a^{1/n} X}{nB(R_H)^{1/n}} \right\}^{n/(2n+1)}, \tag{82}$$

such that, the expression of A changes from Eqs. (81) to (82) along the limiting line characteristic

$$\tau = \tau_s = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(2n+1)a^{1/n} X}{nB} \right\}^{2n/(2n+1)}. \tag{83}$$

As expected, the $X - \tau$ plane is divided into two regions, a lower one for which A is calculated by Eq. (81) and an upper one for which A is evaluated by Eq. (82). Then, the limit time τ_s , corresponding to the steady-state regime is predicted here by Eq. (83).

In the other terms, one can derive the temperature profile valid for each region considered as follows

in a lower region (for which $\tau < \tau_s$):

$$\Theta = \sqrt{\frac{\pi\tau}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{Y}{\sqrt{2\tau}}\right) \tag{84}$$

and in an upper region (for which $\tau > \tau_s$):

$$\Theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (CX)^{n/(2n+1)} \operatorname{erfc}\left\{Y(CX)^{-n/(2n+1)}\right\}, \tag{85}$$

where

$$C = \frac{(2n+1)a^{1/n}}{nB}. \tag{86}$$

As in the previous case, we have a solution for transient heat conduction in a semi-infinite plane with a step increase in surface heat which is in good agreement with the temperature obtained from Eqs. (84) and (74). The solution, Eq. (85), represents steady heat convection on the plate, and it is also in good agreement with the exact solution (see Cheng and Minkowycz [28]).

The heat flux over the vertical surface in the lower region for which the transient heat conduction prevails is then, after substitution of Eq. (81) into Eq. (68):

$$Q = \sqrt{\frac{2}{\pi\tau}}, \tag{87}$$

where $Q = q/[k\Delta TRa_H^{1/(2n+1)}/H]$ is the dimensionless local surface heat flux.

Considering the situation dominated by convection pattern, when $\tau > \tau_s$, and taking into account Eqs. (82) and (68), the local Nusselt number, Nu_x , defined by Eq. (67) is calculated here by the expression

$$Nu_x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\zeta \left(\frac{n\sqrt{\pi}}{2^{n+1}} \right)^{1/n} \right]^{n/(2n+1)} R_x^{1/(2n+1)} a^{-1/(2n+1)}. \tag{88}$$

In the same way, from Eqs. (30), (48), (74), (75) and (82) the stream function is calculated by the expression:

$$\Psi = \left[\left(\frac{2}{\zeta} \right)^{n+1} \left(\frac{n\sqrt{\pi}}{2} \right) \right]^{1/(2n+1)} I_{1/n} Ra_x^{1/(2n+1)} a^{-1/(2n+1)}, \tag{89}$$

where $R_x = K_1 \rho_\infty g \beta q x^{n+1} / (\epsilon \alpha^n k)$ is the modified Darcy–Rayleigh number, based on the distance x from the edge of the surface, for the case of a wall heated by a constant heat flux.

5. Results and discussion

In order to carry out subsequent analysis of the effects of anisotropic parameters and to investigate the influence of

power-law indexes of non-Newtonian fluids saturating the porous matrix on thermal convective flow in the neighborhood of the vertical surface with a sudden increase in the temperature, it is convenient to evaluate the constants ζ and $I_{1/n}$ expressed by Eqs. (57) and (73), respectively. These equations are solved numerically by Romberg procedure coupled with extrapolation Richardson method to have the best approximation of the exact solution. The results found here are presented in Table 1.

Moreover, Table 2 is presented here to prove the validity of the present analysis, when compared the result obtained for the parameter $Nu_x/(Ra_x)^{1/2}$ according Eq. (71), for the case of a Newtonian fluid (i.e., $n = 1$) and for isothermal wall, with that which has been found by Vasseur and Degan [22], solving the problem by a consistent numerical procedure coupled with similarity method in an anisotropic porous medium case, and by Cheng and Minkowycz [28], using the similarity transformation for isotropic porous medium situation. It is seen that the result found here by the method of characteristics is in excellent agreement with that obtained by Cheng and Pop [6] when the porous medium is hydrodynamically isotropic and saturated by a Newtonian fluid.

Fig. 1 shows the effect of the power-law index of non-Newtonian fluid on the limiting line characteristic given par Eq. (64) and expressed by the time taken to reach steady-state flow τ_s , when the transient free convection in the porous medium occurs as a result of a step increase in wall temperature. In Fig. 1, it is observed that, when the anisotropic parameters are held constant, for example, for $\theta = 45^\circ$ and $K^* = 0.1$, each limiting line characteristic corresponding to a fixed power-law index n is a straight line which divides, as expected, the $X - \tau$ plane into two regions, a lower one dominated by a pure conduction regime for $\tau < \tau_s$ and the upper one dominated by convective heat transfer for $\tau \geq \tau_s$. Moreover, it is seen that, as the power-law index increases from $n = 0.6$ (corresponding to a shear-thinning fluid) to $n = 1.4$ attributed to a shear-thickening fluid, the upper region becomes progressively larger. This behavior can be explained by the fact that in

Table 1
Evaluation of constants

n	ζ	$I_{1/n}$	n	ζ	$I_{1/n}$
0.5	0.41974	0.33049	1.	0.58578	0.56414
0.6	0.46311	0.38206	1.2	0.62799	0.64439
0.8	0.53254	0.47727	1.4	0.66232	0.71913

Table 2
Values of $Nu_x/Ra_x^{1/2}$ obtained by the different methods for $n = 1$ and isothermal wall situation

$a = K^* (\theta = 90^\circ)$	$Nu_x/Ra_x^{1/2}$	
	Similarity method [22]	Present study, Eq. (71)
0.1 (<1.0)	1.404	1.3653
1.0 (isotropic)	0.444[28]	0.4317[6]
10. (>1.0)	0.140	0.1365

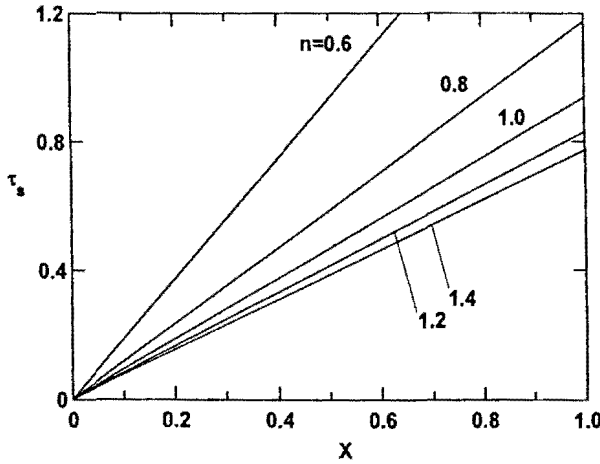


Fig. 1. Effect of the power-law index n on the limiting line characteristic for $\theta = 45^\circ$, $K^* = 0.1$ and for a step increase in wall temperature situation.

the upper region where convection effect is considerable over the limiting time, the local heat transfer rate calculated by Eq. (71) becomes $Nu_x/Ra_x^{0.83} = 0.4127$ when $n = 0.6$ and $Nu_x/Ra_x^{0.35} = 0.6408$ when $n = 1.4$. So, convection motion is enhanced, taking place in the upper region which becomes more and more important than the lower one, as the power-law n index is made higher.

The limiting steady-state time characteristic τ_s is presented in Fig. 2 as a function of the position X from the edge of the vertical surface to investigate the effect of the anisotropic permeability ratio K^* for $n = 1.2$ and $\theta = 30^\circ$, when the wall is heated isothermally. It is seen that, for a given value of the distance X considered from the edge of the wall, the time taken by the heating process transfer to reach steady-state pattern for which convection occurs increases with an increase in permeability ratio K^* . So, convection becomes more and more considerable and occupies upper regions which become more and more large than the lower regions, as K^* is made smaller. This trend comes

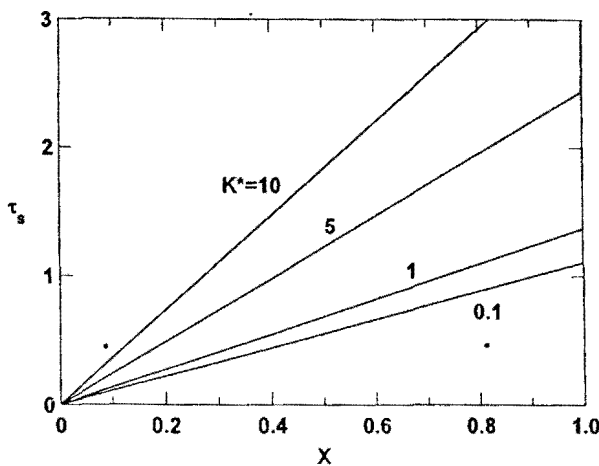


Fig. 2. Effect of the anisotropic permeability ratio K^* on the limiting line characteristic for $n = 1.2$, $\theta = 30^\circ$ and for isothermal wall case.

from the fact that, according to Eq. (64), when the parameters n , θ and X are held constant, τ_s depends solely on $(K^{*0.83})$ and is proportional to this latter. On the other hand, the same behavior is observed in Fig. 3 illustrating the variation of τ_s versus X , for different values of θ , $n = 0.8$ and $K^* = 10$, and when a step of increase in wall temperature is considered. Therefore, the limiting time to reach steady-state regime increases with an increase in orientation angle of the principal axes of the porous matrix, when other parameters are held constant.

Fig. 4 illustrates the effects of varying the modified Darcy-Rayleigh number Ra_H and the time τ (lower than the limiting time required to reach steady-state τ_s) on the boundary-layer thickness A for $n = 0.5$, when the surface is heated isothermally. As expected, the boundary-layer thickness A decreases drastically as Ra_H is made higher, giving rise to a channeling of convective heat flow near the vertical surface. Moreover, it is seen that, for a given

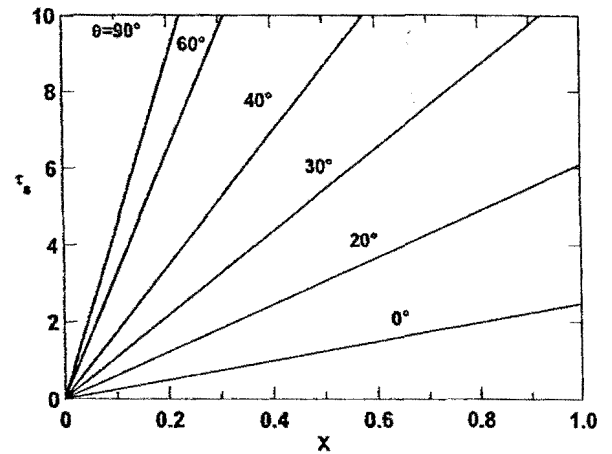


Fig. 3. Effect of the orientation angle θ of the principal axes on the limiting line characteristic for $n = 0.8$, $K^* = 10$ and for a step increase in wall temperature case.

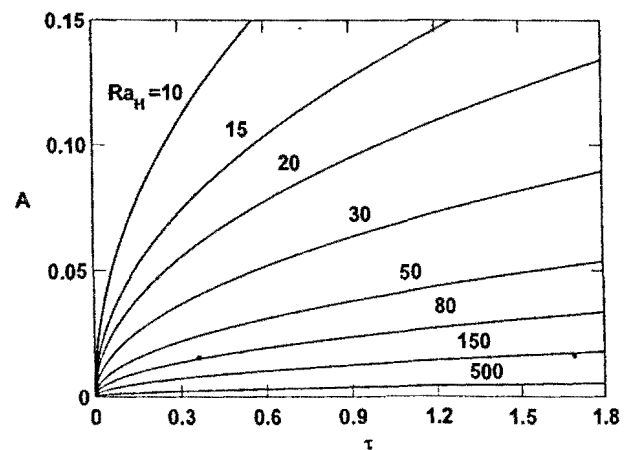


Fig. 4. Effect of the time τ ($<\tau_s$) on the boundary-layer thickness A for $n = 0.5$ and various values of Ra_H , when the surface is isothermally heated.

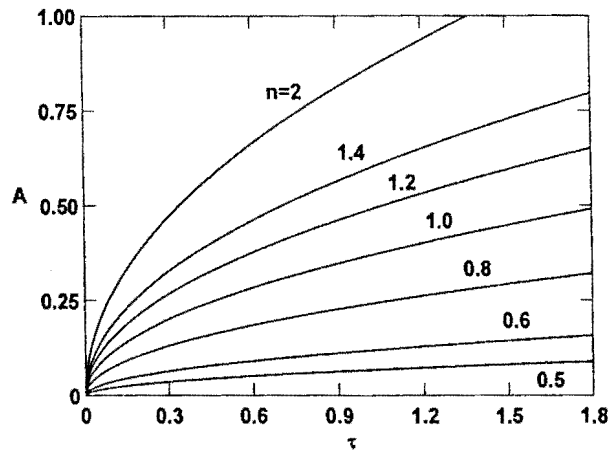


Fig. 5. Effect of the time τ ($<\tau_s$) on the boundary-layer thickness A for $Ra_H = 30$ and various values of n , when the surface is isothermally heated.

value of the time τ (lower than τ_s), the boundary-layer thickness A decreases with an increase in the modified Darcy–Rayleigh Ra_H . This trend follows from the fact that, according to Eq. (62), the boundary-layer thickness A is proportional to $\tau^{1/2}$ and inversely proportional to $Ra_H^{1/(2n)}$ such that, upon increasing Ra_H , A drops progressively and becomes less and less affected by τ .

Another view of the effects of the varying of the power-law index n and the time τ ($<\tau_s$) for $Ra_H = 30$ and for a step increase in wall temperature, is depicted in Fig. 5. It is observed that the boundary-layer thickness A increases with an increase in power-law index n of non-Newtonian fluids. This can be explained that for a fixed value of τ , according to Eq. (62), when $n \rightarrow 0$, $Ra_H^{-1/(2n)} \rightarrow 0$, and therefore $A \rightarrow 0$. So, in Fig. 5, the boundary-layer thickness A drops progressively as n is made weaker, independently of τ .

6. Conclusion

The problem of transient natural convection in a porous medium adjacent to a vertical, semi-infinite surface with a step increase in wall temperature or surface heat flux. The porous medium is anisotropic in permeability whose principal axes are non-coincident with the gravity vector. The porous matrix is saturated by non-Newtonian fluids. With the formulation of the problem on the basis of the modified Darcy power-law model of Pascal [23,24] and the generalized Darcy's law proposed by Bear [25], boundary-layer equations are solved analytically by the method of characteristics, as time is taken into account in equation of energy. From the results, the following remarks are

- (1) The problem considered gives rise to the singularity problem in passing from the initial stage when the leading edge effect is not felt to the steady state defined for large times. The limiting line characteristic represents the time required to reach the steady state

τ_s and the singularity value of time for which the heat transfer characteristics change suddenly from transient one-dimensional heat conduction to steady two-dimensional natural convection.

- (2) For small values of time ($\tau < \tau_s$), the solutions for flow and temperature fields are dependent solely of time and the heat transfer due by pure conduction in transient regime are independent on the anisotropic parameters of the porous matrix and the power-law indexes of non-Newtonian fluids.
- (3) For large values of time ($\tau > \tau_s$), the solutions for velocity, temperature and heat transfer rate valid in steady regime are independent of time, and depend strongly on anisotropic parameters, on the power-law indexes, and on the vertical distance from the edge of the surface.
- (4) At steady regime from the limiting line characteristic, the convection heat transfer is enhanced when the power-law index n of non-Newtonian fluids is increased.
- (5) The limiting time to reach steady-state increases with an increase in anisotropic permeability ratio and with an increase in orientation angle of the principal axes of the porous medium, and that, independently of the heating process of the vertical surface.

References

- [1] P. Cheng, Heat transfer in geothermal systems, *Adv. Heat Transfer* 15 (1978) 1–105.
- [2] C. Johnson, P. Cheng, Possible similarity solutions for free convection boundary layers adjacent to flat plates in porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer* 21 (1978) 709–718.
- [3] A. Raptis, Unsteady free convection flow through a porous medium, *Int. J. Eng. Sci.* 21 (1983) 345–348.
- [4] A. Raptis, C. Perdikis, Unsteady flow through a porous medium in the presence of free convection, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 12 (1985) 697–704.
- [5] P. Singh, J.K. Misra, K.A. Narayan, A mathematical analysis of unsteady flow and heat transfer in a porous medium, *Int. J. Eng. Sci.* 24 (1986) 277–287.
- [6] P. Cheng, I. Pop, Transient free convection about a vertical flat plate embedded in a porous media, *Int. J. Eng. Sci.* 22 (1984) 253–264.
- [7] D.B. Ingham, S.N. Brown, Flow past a suddenly heated vertical plate in a porous medium, *Proc. Royal Soc. London A403* (1986) 51–80.
- [8] J.H. Merkin, G. Zhang, The boundary-layer flow past a suddenly heated vertical surface in a saturated porous medium, *Wärme-und-Stoffübertragung* 27 (1992) 299–304.
- [9] H.-T. Chen, C.K. Chen, Free convection flow of non-Newtonian fluids along a vertical plate embedded in a porous medium, *J. Heat Transfer* 110 (1988) 257–260.
- [10] D. Poulikakos, T.L. Spatz, Non-Newtonian natural convection at a melting front in a permeable solid matrix, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 15 (1988) 593–603.
- [11] S.K. Rastogi, D. Poulikakos, Double-diffusion from a vertical surface in a porous region saturated with a non-Newtonian fluid, *Int. J. Heat-Mass Transfer* 38 (1995) 935–946.
- [12] G. Castinel, M. Combarnous, Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope, *C.R. Hebd. Seanc. Acad. Sci. Paris B278* (1974) 701–704.
- [13] J.F. Epherre, Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope, *Rev. Gen. Therm* 168 (1975) 949–950.

- [14] O. Kvernfold, P.A. Tyvand, Nonlinear thermal convection in anisotropic porous media, *J. Fluid Mech* 90 (1979) 609–624.
- [15] R. McKibbin, Thermal convection in a porous layer: effects of anisotropy and surface boundary conditions, *Trans. Porous Media* 1 (1984) 271–292.
- [16] S. Kimura, Y. Masuda, T. Kazuo Hayashi, Natural convection in an anisotropic porous medium heated from the side (effects of anisotropic properties of porous matrix), *Heat Transfer Jpn. Res.* 22 (1993) 139–153.
- [17] J. Ni, C. Beckermann, Natural convection in a vertical enclosure filled with anisotropic permeability, *J. Heat Transfer* 113 (1993) 1033–1037.
- [18] X. Zhang, Convective heat transfer in a vertical porous layer with anisotropic permeability, in: *Proc. 14th Canadian Congr. Appl. Mech.* 2 (1993) 579–580.
- [19] G. Degan, P. Vasseur, E. Bilgen, Convective heat transfer in a vertical anisotropic porous layer, *Int. J. Heat Mass Transfer* 38 (1995) 1975–1987.
- [20] G. Degan, P. Vasseur, Natural convection in a vertical slot filled with an anisotropic porous medium with oblique principal axes, *Numer. Heat Transfer A* 30 (1996) 397–412.
- [21] I.H. Ene, Effects of anisotropy on the free convection from a vertical plate embedded in a porous medium, *Trans. Porous Media* 6 (1991) 183–194.
- [22] P. Vasseur, G. Degan, Free convection along a vertical heated plate in a porous medium with anisotropic permeability, *Int. J. Numer. Methods Heat and Fluid Flow* 8 (1998) 43–63.
- [23] H. Pascal, Rheological behaviour effect of non-Newtonian fluids on steady and unsteady flow through porous media, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech* 7 (1983) 207–224.
- [24] H. Pascal, Rheological effects of non-Newtonian behaviour of displacing fluids on stability of a moving interface in radial oil displacement mechanism in porous media, *Int. J. Eng. Sci.* 24 (1986) 1465–1476.
- [25] J. Bear, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Dover Publications, Elsevier, New York, 1972.
- [26] A. Bejan, *Convection Heat Transfer*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, 1984.
- [27] H.I. Ene, D. Polisevski, *Thermal Flow in Porous Media*, D. Reidel, Dordrecht, The Netherlands, 1987.
- [28] P. Cheng, W.J. Minkowycz, Free convection about a vertical flat plate embedded in a saturated porous medium with application to heat transfer from a dyke, *J. Geophys. Res.* 82 (1977) 2040–2044.

Etude en régime de couche limite de la convection naturelle sur une surface verticale plongée dans un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non-newtonien

Christian AKOWANOU*, Gérard DEGAN* & Norbert C. AWANOU**

*Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Appliquées (LEMA), Ecole Polytechnique d'Abomey-Calavi (EPAC), Université d'Abomey-Calavi (Bénin)

**Laboratoire de Physique de Rayonnement (FAST), Université d'Abomey-Calavi (Bénin)

RESUME

Une méthode intégrale est utilisée pour étudier l'écoulement convectif en régime de couche limite le long d'une surface verticale bordant un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non-Newtonien. Le milieu poreux est anisotrope en perméabilité dont les axes du tenseur de perméabilité sont orientés obliquement par rapport au champ gravitationnel. Une variation de la température de la surface en loi de puissance avec un exposant dépendant du type de chauffage est envisagée. Pour des nombres de Darcy-Rayleigh élevés, la solution au problème est obtenue en régime de couche limite basée sur une approche intégrale. Une analyse d'échelle est menée pour prédire les ordres de grandeur des variables d'intérêt. Il a été démontré que dans la matrice poreuse l'indice de viscosité du fluide non-Newtonien et les paramètres d'anisotropie affectent grandement le taux de transfert de chaleur.

Mots clés : milieux poreux, convection, anisotropie, fluide non-Newtonien

ABSTRACT

An integral method is used to study natural convection boundary layer flow along a vertical surface embedded in an anisotropic porous medium saturated by a non-Newtonian fluid. The porous medium is anisotropic in permeability with its principal axes oriented in a direction that is oblique to the gravity vector. A power-law variation of wall temperature is prescribed at the vertical plate. In the large modified Darcy-Rayleigh number limit a boundary layer solution based on the integral relations approach, is proposed. Scale analysis is applied to predict the order of magnitudes involved in the boundary layer regime. It is demonstrated that both the power law exponent and the anisotropic properties have a strong influence on the heat transfer rate.

Key words : porous media, convection, anisotropy, fluid non-Newtonian

INTRODUCTION

L'écoulement convectif le long d'une surface verticale bordant un milieu poreux saturé par un fluide est d'un intérêt considérable dans plusieurs domaines en ingénierie. On peut citer entre autres applications l'extraction du pétrole, l'extraction de l'énergie géothermique, la diffusion souterraine des contaminants, les procédés de transformation alimentaire, la dispersion des contaminants chimiques dans l'environnement, les procédés de transformation des matériaux dans l'industrie chimique, la migration de l'humidité en isolation thermique et dans les greniers de stockage de grains, la pollution de la nappe souterraine, le stockage des déchets nucléaires etc... Dans une revue de communication, Cheng (1978) a présenté plusieurs travaux en géothermie portant sur l'étude du phénomène évoqué ci-dessus. Cheng & Minkowycz (1977) ont étudié les mouvements convectifs sur une surface semi-infinie bordant un milieu poreux. Sur la base des approximations de Darcy en régime de couche limite, la solution affine a été obtenue pour un profil de température de surface bien défini. Une analyse systématique pour des possibilités de solutions affines pour différents profils de température a été entreprise par Johnson & Cheng (1978). Seetharamu & Dutta (1990) ont examiné le même problème pour une température de surface variant comme une fonction de puissance de la position comptée à partir du bord d'attaque. Nakayama & Kayoma

(1987) ont utilisé une méthode intégrale pour analyser le phénomène de convection naturelle sur une surface verticale chauffée plongée dans un milieu poreux thermique stratifié. Les effets de la stratification thermique sur les taux locaux de transfert de chaleur ont été discutés. Plusieurs investigations du problème de même importance ont été conduites pour rechercher les effets des forces inertielles et des forces de volume qui ne sont pas prise en compte par le modèle de Darcy, mais qui deviennent importants dans les milieux de grande perméabilité. Hong *et coll.* (1985) ont recherché les effets des forces de volume et des forces inertielles résultant dans le modèle qu'ils ont adopté lors de l'étude du phénomène de convection naturelle dans un milieu poreux à grande perméabilité. Kaviany & Mittal (1987) ont aussi étudié analytiquement et expérimentalement le taux de transfert de chaleur sur une surface verticale chauffée isothermiquement et adjacente à un milieu poreux de grande perméabilité. Il ressort de toutes ces investigations que, aussi bien les forces de volume que les forces inertielles réduisent considérablement le taux de transfert de chaleur.

Dans toutes les publications citées ci-dessus, le fluide saturant le milieu poreux est supposé Newtonien. Cependant, dans la plupart des applications en ingénierie citées ci-dessus le fluide saturant le milieu poreux n'est pas toujours Newtonien. Par exemple, dans la littérature, le nombre de travaux relatifs à la convection thermique induite par une variation de température en milieu poreux saturé par un fluide non Newtonien est très limité. A cet effet, Chen & Chen (1988) ont étudié numériquement la couche limite en convection naturelle le long d'une surface verticale chauffée isothermiquement et adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide non Newtonien. Récemment, Rastogi & Poulikakos (1995) ont étudié le phénomène de la double diffusion le long d'une surface verticale plongée dans un milieu poreux saturé par un fluide non-Newtonien. Il ressort de leur investigation que la variation de la température et la variation de la concentration, engendrent le long de la surface un flux constant de chaleur dont le transfert est grandement influencé par l'indice de viscosité du fluide.

De plus, dans les investigations précitées, le milieu poreux est supposé isotrope alors que dans plusieurs applications, les matériaux poreux sont anisotropes. L'étude des effets de l'anisotropie en perméabilité a été abordée pour la première fois par Castinel & Combarous (1974). Cette étude portant sur les critères d'apparition des mouvements thermoconvectifs dans une couche horizontale chauffée par le bas a été poursuivie par d'autres auteurs comme Epherre (1975), McKibbin (1984). La convection naturelle dans un milieu poreux chauffé par le côté dont l'un des axes principaux est parallèle au champ gravitationnel a été étudiée par Kimura *et coll.* (1993). Degan et Vasseur (1996) ont étudié le même phénomène en considérant des axes principaux de perméabilité inclinés par rapport au champ gravitationnel. Il a été démontré par ces auteurs que les paramètres d'anisotropie en perméabilité affectent grandement le transfert de chaleur par convection.

Récemment par une méthode intégrale Ene (1991) a analysé les effets de l'anisotropie en perméabilité sur la couche limite en convection libre le long d'une surface verticale. Cette étude a été menée dans le cas où les axes principaux de perméabilité coïncident avec les axes de coordonnées. Vasseur & Degan (1998) ont aussi mené les mêmes investigations mais pour des axes de perméabilité orientés arbitrairement par rapport aux axes de coordonnées. Il ressort de leur analyse que si la perméabilité dans la direction perpendiculaire à la surface est supérieure à

celle orientée le long de cette surface il résulte un accroissement du champ de température.

La présente étude s'intéresse à la couche limite en régime convectif permanent au voisinage d'une surface verticale bordant un milieu poreux saturé par un fluide non-Newtonien. Par une méthode intégrale, la solution approchée du problème considéré a été obtenue dans le cas où la température le long de la surface varie comme une fonction de puissance de la distance comptée à partir du bord d'attaque de celle-ci. Le milieu poreux est anisotrope en perméabilité avec des axes principaux de perméabilité orientés dans une direction oblique par rapport au champ gravitationnel. Se basant sur le modèle de Darcy modifié et proposé par Pascal (1983, 1986) et la loi de Darcy généralisée proposée par Bear (1972), l'écoulement du fluide non-Newtonien à travers la matrice du milieu poreux a été caractérisé. Dans la limite des nombres de Darcy-Rayleigh de valeurs élevées les équations de la couche limite ont été résolues analytiquement. Une analyse d'échelle a été menée précédemment à la résolution des équations. Cette analyse d'échelle prédit les ordres de grandeurs des variables d'intérêt du phénomène d'écoulement.

FORMULATION MATHEMATIQUE

Dans la présente étude nous avons considéré une surface verticale adjacente à un milieu poreux anisotrope en perméabilité, chauffée en régime permanent. Le milieu poreux est saturé par un fluide à caractéristique rhéologique en loi de puissance. L'anisotropie du milieu poreux est caractérisée par le rapport d'anisotropie $\kappa^* = \kappa_1/\kappa_2$ et l'angle θ que forme l'axe principal de perméabilité κ_2 avec l'horizontale. Les axes de coordonnées x et y sont respectivement orientés dans les directions verticale et horizontale. Nous supposons qu'en tout point, le fluide et le milieu poreux sont en équilibre thermodynamique local. Les propriétés thermophysiques du fluide sont considérées constantes, indépendantes de la température à l'exception de l'approximation de Boussinesq.

En se basant sur le modèle de l'écoulement laminaire du fluide non Newtonien à travers le milieu poreux, la loi de Darcy généralisé s'écrit (Pascal, 1983 ; 1986) ; Bear (1972) :

$$\vec{v} = -\frac{\bar{K}}{\mu_a} \nabla p \tag{1}$$

$$\mu_a = \epsilon \left(u^2 + v^2 \right)^{(n-1)/2} \tag{2}$$

$$\epsilon = \frac{2\mu}{g^{(n+1)/2} \left(\sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \gamma \right)^{(n-1)/2} (1+3n)^n} \tag{3}$$

La plupart des fluides intervenants dans les applications citées ci-dessus obéissent à un modèle rhéologique à caractéristique en loi de puissance dans laquelle le gradient de pression reste proportionnel au taux massique de fluide en écoulement.

Dans le modèle ci-dessus les paramètres rhéologiques μ et n sont supposés indépendants de la température. Les équations traduisant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour le problème considéré s'écrivent respectivement :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{4}$$

$$\bar{v} = -\frac{\bar{K}}{\mu_a} (\nabla p + \rho \bar{g}) \quad (5)$$

$$\nabla \cdot (\bar{v} T - \alpha \nabla T) = 0 \quad (6)$$

$$\rho = \rho_\infty [1 - \beta(T - T_\infty)] \quad (7)$$

Dans les équations ci-dessus $\alpha = k/(\rho c_p)_f$ est la diffusivité thermique et \bar{K} le tenseur de perméabilité du milieu poreux. C'est un tenseur du second ordre qui se définit comme suit :

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_1 \cos^2 \theta + K_2 \sin^2 \theta & (K_1 - K_2) \cos \theta \sin \theta \\ (K_1 - K_2) \cos \theta \sin \theta & K_2 \cos^2 \theta + K_1 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

En prenant le rotationnel de la relation (5) et en utilisant l'équation (4) on élimine le terme de pression et l'on aboutit à l'équation du mouvement qui s'écrit :

$$a \frac{\partial u}{\partial y} + c \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - b \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu_a} \left\{ \frac{\partial \mu_a}{\partial x} (-cu + bv) + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} (-au + cv) + K_1 \rho_\infty \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \right\} \quad (9)$$

où

$$a = \cos^2 \theta + K^* \sin^2 \theta ; b = \sin^2 \theta + K^* \cos^2 \theta ; c = \frac{1}{2} (1 - K^*) \sin 2\theta \quad (10)$$

ANALYSE D'ECHELLE

Dans ce paragraphe nous considérons le régime de couche limite pour lequel tout le mouvement du fluide est restreint à celui d'une mince couche d'épaisseur δ existant le long de la surface verticale. Dans l'équation du mouvement (9) nous pouvons donc utiliser les hypothèses de couche limite qui ne sont valides que lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

$$a \frac{\partial u}{\partial y} \gg c \frac{\partial v}{\partial y} \quad (11)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial y} \gg c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (12)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial y} \gg b \frac{\partial v}{\partial x} \quad (13)$$

$$K_1 \rho_\infty \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial \mu_a}{\partial x} (-cu + bv) \quad (14)$$

$$K_1 \rho_\infty \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial \mu_a}{\partial y} (-au + cv) \quad (15)$$

Ainsi sur la base des approximations de couche limite et pour des nombres de Raleigh de valeurs élevées les équations deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (u^n) = \frac{n}{a} \frac{K_1 \rho_\infty \beta g}{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (17)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (18)$$

Les conditions aux limites associées s'écrivent:

$$y = 0: \quad v = 0, \quad T = T_w = T_\infty + Ax^\lambda \quad (19)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u = 0, \quad T = T_\infty \quad (20)$$

où la température pariétale T_w prescrite est fonction de la position x comptée à partir du bord d'attaque de la surface, A et λ sont des constantes positives. T_∞ est la température dans le milieu poreux pour une position éloignée de la surface. Il a été démontré par Rastogi & Poulikakos (1995) que lorsque la surface est chauffée par un flux constant de chaleur $\lambda = n/(2n+1)$ et dans le cas d'un chauffage isotherme $\lambda = 0$.

S'inspirant des travaux de Bejan (1984) et en adoptant H et δ comme échelles caractéristiques de x et y dans les limites de la couche limite ($\delta \ll H$) les équivalences requises par les équations de conservation (16), (17), et (18) s'écrivent :

$$\frac{u}{H} \sim \frac{v}{\delta} \quad (22)$$

$$a \frac{u}{\delta} \sim \frac{1}{\epsilon u^{n-1}} K_1 \rho_\infty g \beta \frac{\Delta T}{\delta} \quad (23)$$

où $\Delta T (= T_w - T_\infty)$ représente l'échelle de température. On constate que le gradient de température à travers la couche limite est d'ordre 1.

En recherchant les équivalences pour δ , u et v on obtient les résultats suivants :

$$\delta \sim H Ra_H^{-1/(2n)} a^{1/(2n)} \quad (24)$$

$$u \sim \frac{\alpha}{H} Ra_H^{1/n} a^{-1/n} \quad (25)$$

$$v \sim \frac{\alpha}{H} Ra_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (26)$$

où le nombre de Darcy-Rayleigh Ra_H basé sur la hauteur de la plaque est défini par:

$$Ra_H = \frac{K_1 \rho g \beta \Delta T H^n}{\epsilon \alpha^n} \quad (27)$$

En définissant la fonction de courant ψ associée aux composantes de la vitesse de filtration par:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (28)$$

l'équation de continuité (16) est automatiquement satisfaite. L'échelle caractéristique pour la fonction de courant se définit comme suit :

$$\psi \sim \alpha Ra_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (29)$$

Le transfert de chaleur par pure conduction défini par le nombre de Nusselt local Nu_H a pour échelle caractéristique :

$$Nu_H = \frac{hH}{k} \sim Ra_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (30)$$

où $h = q / (T_w - T_\infty)$ est le coefficient de transfert de chaleur local, $q = -k / (\partial T / \partial y) \Big|_{y=0}$ le flux local de chaleur à travers la surface chauffée.

Dans le cas particulier d'un milieu isotrope ($\kappa^* = 1$, soit $a = 1$), les échelles caractéristiques définies ci-dessus sont conformes à celles prédites par Rastogi & Poulikakos (1995) qui ont étudié la couche limite dans le problème de double diffusion le long d'une surface verticale plongée dans un milieu poreux saturé par un fluide non Newtonien.

Discutons à présent de la validité de cette analyse de couche limite. Les résultats précédents ne sont valides que si la couche limite est assez étroite ($\delta \ll H$), soit $Ra_H \gg a$. Sur la base des équivalences (11)-(15) et (24)-(27), en utilisant les expressions établies dans l'analyse d'échelle conduite plus haut, les hypothèses de couche limite ne sont valides que si :

$$b \ll Ra_H^{1/n} a^{(n-1)/n} \quad (31)$$

$$c \ll Ra_H^{1/(2n)} a^{(2n-1)/(2n)} \quad (32)$$

RESOLUTION

La méthode utilisée pour la résolution des équations gouvernantes (16)-(18) avec les conditions aux limites (19) et (20) est celle de Karman-Polhausen. Dans le développement, l'expression analytique du taux de transfert de chaleur à travers la surface est recherchée en fonction des paramètres qui régissent l'écoulement thermique.

En intégrant l'équation (17) de la position $y = 0$ à $y = Y$ (lisière de la couche limite démarquant la couche limite de la zone de courant libre) et en tenant compte des équations aux limites (19) et (20) on obtient :

$$u^n = \frac{n K_1 \rho_\infty g \beta}{a \varepsilon} (T - T_\infty) \quad (33)$$

L'équation d'énergie (18) sur la base de l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} (uT) + \frac{\partial}{\partial y} (vT) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (34)$$

Le courant libre étant immobile à partir de la lisière de la couche limite, alors nous pouvons écrire la relation $(\partial / \partial y) \Big|_{y=\delta} = 0$. L'intégration de l'équation (34) dans le domaine d'intérêt ($\delta \times H$) donne :

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta uT dy = -\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (35)$$

Substituant l'équation (33) dans l'équation (35), on obtient après arrangement :

$$-\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{n K_1 \rho_\infty g \beta}{a \varepsilon} \right)^{1/n} \frac{d}{dx} \int_0^\delta \Phi^{(n+1)/n} dy \quad (36)$$

où

$$\Phi = T - T_\infty.$$

En introduisant les transformations découlant de la précédente analyse d'échelle,

$$\Theta(\eta) = \frac{\Phi}{\Phi_w} \quad (37)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta} \quad (38)$$

L'équation (36) devient après quelques transformations algébriques

$$\frac{\delta}{x} = \left\{ \frac{2n}{(2n+1)\lambda+n} \frac{J}{I} n^{-1/n} \right\}^{1/2} Ra_x^{-1/(2n)} a^{1/(2n)} \quad (39)$$

où

$$J = -\Theta'(0) \quad (40)$$

$$I = \int_0^1 \Theta^{(n+1)/n}(\eta) d\eta \quad (41)$$

avec

$$Ra_x = \frac{K_1 \rho_\infty g \beta A x^{\lambda+n}}{\varepsilon \alpha^n} \quad (42)$$

Ra_x est le nombre de Rayleigh-Darcy modifié, basé sur la perméabilité K_1 et x la distance comptée à partir du bord d'attaque de la surface. On observe que le résultat (39) est en accord celui prédit par l'analyse d'échelle.

Les expressions de I et de J dépendent du profil de température réduite $\Theta(\eta)$ qui demeure inconnu. Elles deviennent constantes dès que le profil de température est déterminé.

A cet effet le profil de température doit satisfaire les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \Theta(0) = 1 & (a) \\ \Theta(1) = 0 & (b) \end{cases} \quad (43)$$

La méthode de recherche de la solution au problème consiste à choisir un profil de température Θ avec les conditions aux limites (43) requises.

Il est évident que Θ décroît de 1 à 0 lorsque η croît à partir de 0 pour différentes valeurs du paramètre d'anisotropie a et de l'indice de viscosité du fluide saturant le milieu. En désignant par η_δ la valeur de η exprimée à $y' = \delta'$ (à la lisière de la couche limite), nous trouvons à partir de l'équation (39) que η_δ s'exprime de la façon suivante:

$$\eta_\delta = \left\{ \frac{2n}{(2n+1)\lambda+n} \frac{J}{I} n^{-1/n} \right\}^{1/2} a^{1/(2n)} \quad (44)$$

Le flux local de chaleur le long de la surface verticale devient:

$$q = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = k \frac{\Phi_w}{\delta} \left[-\Theta'(0) \right] = k \frac{\Phi_w}{\delta} J \quad (45)$$

Ainsi combinant les équations (30), (39), et (45), le nombre de Nusselt local peut être réécrit :

$$Nu_x = \left\{ \frac{(2n+1)\lambda + n}{2n} I J n^{1/n} \right\}^{1/2} Ra_x^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (46)$$

Le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu}_{0-H} le long de la surface verticale de hauteur H est défini par:

$$\overline{Nu}_{0-H} = \overline{h}_{0-H} \frac{H}{k} \quad (47)$$

où

$$\overline{h}_{0-H} = \frac{\int_0^H q dx}{H(\overline{T_w} - T_\infty)} \quad (48)$$

et $(\overline{T_w} - T_\infty)$ la moyenne de la différence de température le long de la surface.

Combinant les équations (39), (45) et (47), le nombre de Nusselt moyen peut se réécrire sous la forme :

$$\overline{Nu}_{0-H} = \left\{ \frac{2n \frac{(n+1)^{1/n} (1+\lambda)^{(2n+1)/n}}{(2n+1)\lambda + n} I J}{(2n+1)\lambda + n} \right\}^{1/2} R_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (49)$$

où

$$R_H = \frac{K_1 \rho_\infty g \beta (\overline{T_w} - T_\infty) H^n}{\alpha^n \varepsilon} \quad (50)$$

est le nombre de Darcy-Rayleigh basé sur la moyenne de la différence de température sur la surface verticale. Il est observé que les résultats obtenus sont conformes à ceux prédits par l'analyse d'échelle.

RESULTATS ET DISCUSSION

A cause des conditions asymptotiques imposées, le profil de température approprié choisi au cours de cette étude pour l'expression de la distribution de température s'écrit:

$$\Theta(\eta) = 1 - \frac{17}{5} \eta + \frac{12}{5} \eta^2 \quad (51)$$

qui satisfait aux conditions aux limites (43). D'une part il est évident qu'en posant $\lambda=0$ (cas de la surface chauffée isothermiquement), pour un milieu poreux saturé par un fluide Newtonien ($n=1$) la présente solution soit conforme à celle obtenue par Cheng & Minkowycz (1977) lors de la résolution du problème de même importance par la méthode de similitude. D'autre part la présente solution est conforme à celle obtenue par Vasseur & Degan (1998) qui ont résolu entièrement les équations de la

couche limite en utilisant successivement une procédure numérique et une méthode de similitude dans le cas où le milieu poreux est anisotrope en perméabilité. Considérant le cas d'une surface chauffée par un flux constant de chaleur, Rastogi & Poulidakos (1995) ont montré que la valeur de λ dépend de l'indice de viscosité du fluide saturant le milieu poreux par la relation $\lambda = n/(2n+1)$. Par conséquent pour les fluides Newtoniens ($n=1$) cette expression donne $\lambda=1/3$; valeur obtenue par Cheng & Minkowycz (1997).

La Figure 1 présente le nombre de Nusselt à travers le paramètre $Nu_x/(Ra_x)^{1/(2n)}$ en fonction du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* , de l'angle d'inclinaison θ des axes principaux de perméabilité dans le cas où la surface est chauffée isothermiquement ($\lambda=0$) et pour différentes valeurs de l'indice n de viscosité. Les résultats obtenus dans le cas du fluide Newtonien ($n=1$) sont conformes à ceux obtenus par Vasseur & Degan (1998). En effet selon l'équation (46) on observe que $Nu_x/(Ra_x)^{1/(2n)}$ dépend du mode de chauffage c'est-à-dire du profil de température (à travers I et J) et des paramètres d'anisotropie K^*, θ à travers la constante $a = \cos^2\theta + K^* \sin^2\theta$. En général le même comportement est observé dans le cas où le milieu poreux est saturé par un fluide pseudoplastique ($n = 0.5$) ou un fluide dilatant ($n = 2$). Lorsque $\theta = 0^\circ$ ($a=1$), la figure 1 indique que pour chaque valeur de n , le paramètre $Nu_x/(Ra_x)^{1/(2n)}$ est constant et ne dépend pas de K^* . Dans cette situation, le nombre de Nusselt local en régime de couche limite dépend uniquement du nombre de Rayleigh local Ra_x basé sur la perméabilité K_I dont l'axe est parallèle à la direction de la surface.

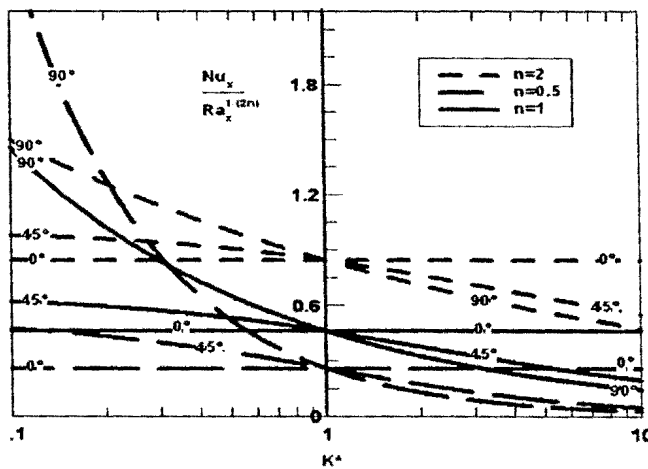


Figure 1. variation du nombre de Nusselt local en fonction de θ pour différents valeurs de K^*

Pour $\theta = 90^\circ$ ($a=K^*$), l'axe de perméabilité K_2 est aligné sur la direction de la surface pendant que celui K_1 lui est perpendiculaire. Sur la figure 1 on observe que le nombre de Nusselt dépend considérablement du rapport d'anisotropie K^* . Ce comportement découle du fait que le nombre de Rayleigh local Ra_x basé sur la perméabilité K_I , qui est maintenant perpendiculaire à la surface n'est pas le paramètre approprié pour décrire la situation. Ainsi selon l'équation (46) en utilisant un nombre de Rayleigh basé sur la perméabilité K_2 (dont l'axe est parallèle

à la direction de la surface) $Ra_x/a = K_2 \rho_\infty g \beta A x^{\lambda+n} / (\varepsilon \alpha^n)$ le nombre de Nusselt devient indépendant de K^* .

Pour $\theta = 45^\circ$ il a été observé que lorsque le rapport d'anisotropie K^* croît le nombre de Nusselt local décroît. Cette situation, expliquée par Vasseur & Degan (1998) résulte du fait que pour un nombre de Rayleigh donné (c'est-à-dire pour une valeur de K) une augmentation du rapport d'anisotropie K^* correspond à une diminution de la perméabilité K_2 affaiblissant ainsi l'écoulement convectif et le taux de transfert de chaleur.

Les effets de l'orientation θ des axes principaux de perméabilité du milieu poreux sur le nombre de Nusselt local Nu_x pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie sont présentés à la figure 2. La surface verticale chauffée isothermiquement est adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide dilatant ($n=2$). Dans le cas du milieu isotrope $K^*=1$ et $a=1$, le paramètre $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$ est indépendant de θ . En général une symétrie des résultats par rapport à $\theta=90^\circ$ est observée sur la figure 2. Il peut être montré à partir des équations gouvernantes (9) et (18) et des conditions aux limites (19) et (20) que si $\psi(x,y)$ et $T(x,y)$ sont solution pour Ra_H , K^* et θ alors $\psi(x,1-y)$ sont aussi solutions pour Ra_H , K^* et $(\pi-\theta)$. Nous pouvons donc limiter la discussion à $0 < \theta < 90^\circ$. Ainsi la Figure 2 indique que pour $K^* < 1$, $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$ est minimal à $\theta=0^\circ$, pour une perméabilité minimale dans la direction verticale mais maximal à $\theta=90^\circ$ pour une perméabilité maximale dans la direction verticale. La situation inverse est observée pour $K^* > 1$. Dans ce cas le transfert de chaleur par convection est maximale pour $\theta=0^\circ$ et minimal pour $\theta=90^\circ$. Ce comportement peut être démontré par le fait que l'on obtient $Nu_x / (Ra_x)^{1/4} = 0.8436 / a^{1/4}$ pour le cas étudié ici.

En prenant la dérivée première de $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$ par rapport à θ et en la posant égale à zéro on obtient l'équation $(K^*-1)\sin 2\theta=0$ qui donnent $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$ maximal et minimal respectivement pour $\theta=0^\circ$ et $\theta=90^\circ$. Ce comportement peut être démontré par le fait que l'on obtient $Nu_x / (Ra_x)^{1/4} = 0.8436 / a^{1/4}$ pour le cas étudié ici. En prenant la dérivée première de $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$ par rapport à θ et en la posant égale à zéro on obtient l'équation $(K^*-1)\sin 2\theta=0$ qui donnent $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$ maximal et minimal respectivement pour $\theta=0^\circ$ et $\theta=90^\circ$. De la dérivée seconde, on obtient respectivement lorsque $\theta=0^\circ$ $d^2 [Nu_x / (Ra_x)^{1/4}] / d\theta^2 = 1.6872(1-K^*)$ et $d^2 [Nu_x / (Ra_x)^{1/4}] / d\theta^2 = 1.6872(K^*-1)(K^*)^{-5/4}$ lorsque $\theta=90^\circ$.

Ainsi lorsque le rapport d'anisotropie est supérieure à l'unité ($K^* > 1$) respectivement inférieur à l'unité ($K^* < 1$), $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$ est maximal (minimal) à $\theta=0^\circ$ et minimal (maximal) à $\theta=90^\circ$. Il ressort de ces résultats qu'un transfert maximal de chaleur est atteint lorsque l'orientation de l'axe principal du milieu poreux anisotrope ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle (perpendiculaire) au champ gravitationnel. Des résultats similaires ont été rapportés dans le passé par Zhang (1993), Degan *et coll.* (1995), lorsqu'ils ont étudié les effets de l'anisotropie en perméabilité sur le transfert de chaleur par convection dans une cavité verticale confinée par un milieu poreux dont les axes de perméabilité sont orientés arbitrairement. Le milieu poreux étant chauffé isothermiquement par le côté.

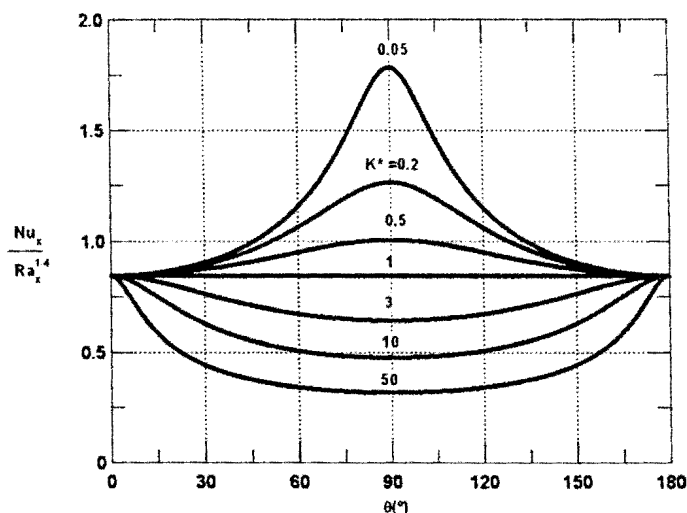


Figure 2. Effet de l'angle d'orientation des axes principaux sur le nombre de Nusselt local.

La Figure 3 montre les effets du nombre de Darcy-Rayleigh modifié R_H , sur le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu}_{0-H} pour $K^* = 10$, $\theta = 90^\circ$ et pour différents indices de viscosité n , lorsque la surface est chauffée par un flux constant de chaleur.

Comme il a été mentionné ci-dessus, l'exposant λ figurant dans la loi de puissance dépend de l'indice de viscosité par la relation $\lambda = n / (2n + 1)$. Sur la Figure 3 les courbes correspondantes à chaque valeur de n sont des droites. Les pentes de ces droites sont fonction de n . On peut observer que le transfert de chaleur n'est amorcé que pour des nombres de Darcy-Rayleigh de valeurs élevées. Ainsi pour un nombre de Darcy-Rayleigh fixé, le nombre de Nusselt moyen croît pour des indices de viscosité de plus en plus faibles. Ce résultat est conforme à celui obtenu par Bian *et coll.* (1994) lorsqu'ils ont étudié numériquement la couche limite en convection naturelle dans une cavité verticale confinant un milieu poreux saturé par un fluide non Newtonien.

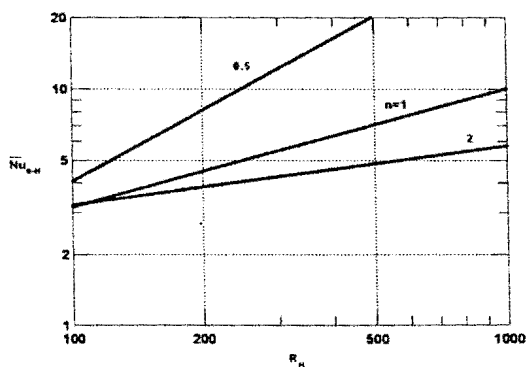


Figure 3. variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Darcy-Rayleigh modifié pour différentes valeurs de n

CONCLUSION

Le problème discuté dans la présente étude est relatif au régime de couche limite en régime convectif permanent le long d'une surface verticale bordant un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non Newtonien. De l'analyse des résultats, il se dégage les conclusions suivantes :

- L'écoulement convectif le long de la surface bordant le milieu poreux est considérablement affecté par les paramètres d'anisotropie que sont le rapport d'anisotropie et l'angle d'inclinaison des axes principaux de perméabilité
- Le transfert de chaleur le long de la surface est maximal (minimal) lorsque l'axe principal ayant la perméabilité élevée est orienté parallèlement (perpendiculairement) au champ gravitationnel.
- Lorsqu'on augmente le nombre de Darcy-Rayleigh modifié ou lorsque l'indice de viscosité du fluide devient de plus en plus faible, l'écoulement convectif le long de la surface devient de plus en plus important.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- CHENG P., 1978, Heat transfer in geothermal systems. *Adv. Heat Transfer* 15, 1-105
- CHENG P. & MINKOWYCZ W. J., 1977, Free convection about a vertical flat plate embedded in a saturated porous medium with application to heat transfer from a dyke. *J. Geophys. Res.* 82, 2040-2044
- JOHNSON C. & CHENG P., 1978, Possible similarity solutions for free convection boundary layers adjacent to flat plates in porous media. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 21: 709-718
- SEETHARAMU K. N. & DUTTA P., 1990, Free convection in a saturated porous medium adjacent to a non-isothermal vertical impermeable wall. Effects of anisotropy on the free convection from a concentrated source in a porous medium. *Wärme-und-Stoffübertragung* 25: 9-15
- NAKAYAMA A. & KOYAMA H., 1987, An integral method for free convection from a vertical heated surface in a thermally stratified porous medium. *Wärme-und-Stoffübertragung* 21: 297-300
- HONG J. T., TIEN C. L. & KAVIANY M., 1985, Non-Darcy effects on vertical-plate natural convection in a porous medium with high porosities. *Int. J. Heat Mass Transfer* 28: 2149-2157
- KAVIANY M. & MITTAL M., 1987, Natural convection heat transfer from a vertical plate to high permeability porous media: an experiment and an approximate solution. *Int. J. Heat Mass Transfer* 30: 967-977
- CHEN H. T. & CHEN C. K., 1988, Free convection flow of non-Newtonian fluids along a vertical plate embedded in a porous medium. *J. Heat Transfer* 110: 257-260
- RASTOGI S. K. & POULIKAKOS D., 1995, Double-diffusion from a vertical surface in a porous region saturated with a non-Newtonian fluid. *Int. J. Heat Mass Transfer* 38: 935-946
- CASTINEL G. & COMBARNOUS M., 1974, Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope. *C. R. Hebd. Seanc. Acad. Sci. Paris. B* 278 : 701-704
- EPHERRE J. F., 1975, Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope. *Rev. Gen. Therm* 168: 949-950
- MCKIBBIN R., 1984, Thermal convection in a porous layer: effects of anisotropy and surface boundary conditions. *Trans. Porous Media* 1: 271-292
- KIMURA S., MASUDA Y. & KAZUO HAYASHI T., 1993, Natural convection in an anisotropic porous medium heated from the side (effects of anisotropic properties of porous matrix). *Heat transfer Jpn. Res* 22: 139-153
- DEGAN G. & VASSEUR P., 1996, Natural convection in a vertical slot filled with an anisotropic porous medium with oblique principal axes. *Numerical Heat Transfer* A30: 397-412

- ENE H. I., 1991, Effects of anisotropy on the free convection from a vertical plate embedded in a porous medium. *Trans. Porous Media* 6: 183-194
- VASSEUR P. & DEGAN G., 1998, Free convection along a vertical heated plate in a porous medium with anisotropic permeability. *Int. J. of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow* 8: 43-63
- Pascal H., 1983, Rheological behaviour effect of non-Newtonian fluids on steady and unsteady flow through porous media. *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 7:207-224
- Pascal H., 1986, Rheological effects of non-Newtonian behaviour of displacing fluids on stability of a moving interface in radial oil displacement mechanism in porous media. *Int. J. Engin. Science* 24: 1465-1476
- Bear J., 1972, *Dynamics of fluids in porous media*. Dover Publications, Elsevier, New York
- Bejan A., 1984, *Convection heat transfer*. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons
- Bian W., Vasseur P., Bilgen E., 1994 Boundary-layer analysis for natural convection in a vertical porous layer filled a non-Newtonian fluid. *Int. J. Heat and Fluid Flow* 15: 384-391.

NOMENCLATURE

a, b, c	constantes, équation (10)
A	constante positive équation (19)
c_p	chaleur spécifique à pression constante
\bar{g}	accélération gravitationnelle
k	conductivité thermique
\bar{K}	tenseur de la perméabilité, équation (8)
κ, κ_1	perméabilités suivant les axes principaux
K^*	rapport d'anisotropie en perméabilité, κ_1/κ_2
H	hauteur de la surface
I	expression, équation (40)
J	expression, équation (41)
p	pression
n	indice de viscosité du fluide non-Newtonien
Nu_x	nombre de Nusselt local, équation (46)
Nu_H	nombre de Nusselt local, équation (30)
\bar{Nu}_{0-H}	nombre de Nusselt moyen, équation(49)
Ra_x	nombre de Darcy-Rayleigh, équation(42)
Ra_H	nombre de Darcy-Raleigh modifié, équation (27)
R_H	nombre de Darcy-Rayleigh modifié, équation(50)
T	température
\bar{V}	vitesse de filtration du fluide
u, v	composantes de la vitesse dans les directions x et y
x, y	coordonnées cartésiennes
Lettres grecques	
α	diffusivité thermique
β	coefficient d'expansion thermique du fluide
δ	épaisseur de la couche limite
ΔT	échelle caractéristique de la température
ε	constante, équation (3)
η	variable, équation (38)
γ	porosité du milieu poreux
λ	exposant dans la loi de variation de la température de la surface
μ	viscosité dynamique du fluide
μ_a	viscosité apparente du fluide

ψ fonction de courant
 θ angle d'orientation des directions principales du tenseur de perméabilité
 Θ profil de température
 ρ densité du fluide
(ρc_p) capacité calorifique du fluide

Exposants

' dérivée partielle par rapport à η

Indices

∞ relatif au courant libre, loin de la surface verticale

The similarity regime for natural convection in a vertical cylindrical well filled with an anisotropic porous medium

G. Degan · M. Gibigaye · C. Akowanou ·
N. C. Awanou

Received: 6 October 2006 / Accepted: 19 December 2007 / Published online: 15 January 2008
© Springer Science+Business Media B.V. 2008

Abstract An integral method based on Lighthill's analysis (Q J Mech Appl Math 6 (1953) 398–439) is carried out to study the similarity regime for penetration of convective heat transfer in a vertical cylindrical well filled with an anisotropic porous medium. The porous medium is anisotropic in permeability with its principal axes oriented in a direction that is oblique to the gravity vector. In the limit of the slenderness of the porous matrix, the penetration length of the convective flow and the heat-transfer rate are expressed in terms of the anisotropic properties of the porous medium, the modified Darcy–Rayleigh number and the aspect ratio of the geometrical configuration. A scale analysis is applied to predict the order of magnitudes involved in the similarity regime of the phenomenon. The conditions of existence of the similarity pattern is found to be dependent on the anisotropic parameters. It is demonstrated that both the anisotropic permeability ratio and the orientation angle of the principal axes have a strong influence on the heat-transfer rate and on the vertical penetration length into the well.

Keywords Anisotropic porous medium · Convection · Darcy–Rayleigh number · Penetrative flows

1 Introduction

Natural convection in fluid-saturated porous media is of considerable importance in engineering. Applications include convection in the Earth's crust, flows in soils, aquifers, petroleum extraction, storage of agriculture products, insulation techniques, and geothermal energy extraction. The state of the art has been reviewed by Cheng [1].

A few studies have been made on convective heat transfer about a vertical cylinder embedded in a porous medium. Minkowycz and Cheng [2] have done an analysis on natural convective flow about a vertical cylinder embedded in a saturated porous medium, where the surface temperature of the cylinder varies as a power function of distance from the leading edge. Exact and approximate solutions based on local similarity and local non-similarity models were obtained within the framework of boundary-layer approximations. Vasantha and Nath [3] have studied numerically, by a finite-difference scheme and using also the method of extended perturbation series, the thermal boundary

G. Degan (✉) · M. Gibigaye · C. Akowanou
Ecole Polytechnique d'Abomey-Calavi, LEMA, B.P. 2009, Cotonou, Bénin
e-mail: ger_degan@yahoo.fr

N. C. Awanou
Faculté des Sciences et Techniques, LPR, B.P. 526, Cotonou, Bénin

layer along an isothermal cylinder in a porous medium. They have found that the thermal boundary-layer thickness increases as the transverse curvature parameter of the cylinder increases. Bejan ([4], [5, pp. 403–407]) has studied analytically natural convection in a vertical cylindrical well filled with a porous medium, when the impermeable surface may have concavities filled by the neighboring porous material. That author was the first to demonstrate that an important feature of the similarity flow is that the depth to which the free-convection pattern penetrates the well is proportional to the temperature difference driving the flow.

All previous studies have usually been concerned with homogeneous isotropic porous structures. The inclusion of more physical realism in the matrix properties of the medium is important for the accurate modeling of anisotropic media. Anisotropy, which is generally a consequence of a preferential orientation or asymmetric geometry of the grain of fibers, is in fact encountered in numerous systems in industry and nature. Natural soils of river beds are considered as geological systems with anisotropic sediments and rocks. Following Bear [6, Sect. 5.2], sediments are commonly deposited such that their permeability in the horizontal directions (unless tilting of the formation occurs) is greater than in other directions. River beds can be idealized as an anisotropic porous medium underlying the fluid layer exposed to atmosphere and whose upper free boundary is permeable and thermally heated by solar radiation. According to Neale [7], many porous media are encountered in practice, especially those formed as a result of industrial geological sedimentation processes are anisotropic in constitution, for example, filter beds, river beds, drilling mud cakes, underground rock formations, and soil sands. That is to say, their measured macroscopic transport properties, such as permeability, diffusivity, and electrical conductivity, are direction-dependent. Anisotropy is generally a consequence of the preferential orientation and asymmetric geometry of the grains which constitute the porous medium. Despite this, natural convection in such anisotropic porous media has received relatively little attention. The critical Rayleigh number for the onset of convection was first considered by Castinel and Combarous [8] who conducted an experimental and theoretical investigation for a layer with impermeable boundaries. The effect of thermal anisotropy on the onset of motion was studied by Epherre [9]. Kvernfold and Tyvand [10] extended these analyses to supercritical finite-amplitude convection. McKibbin [11] conducted an extensive study on the effects of anisotropy on the convective stability of a porous layer. At the upper surface of the porous medium, he considered boundary conditions sufficiently general to allow both impermeable and constant-pressure boundaries. Tyvand and Storesletten [12] investigated the problem concerning the onset of convection in an anisotropic porous layer in which the principal axes were obliquely oriented to the gravity vector. As a result, new flow patterns with a titled plane of motion or titled lateral cell walls were obtained. Convective heat transfer in a vertical anisotropic porous cavity heated from the side with various thermal boundary conditions have been investigated by Zhang [13], Degan et al. [14] and Degan and Vasseur [15, 16]. It was demonstrated that the heat transfer was maximum when the principal axis with higher permeability is parallel to the vertical direction, and minimum when it is perpendicular. Recently, Nield and Kuznetsov [17–20] have investigated the effects of combined vertical and horizontal heterogeneity on the onset of convection in a bidisperse porous medium and the results obtained for the physical problem are of significant importance to many geophysical and engineering-related applications.

The objective of the present paper is to outline an analysis of the anisotropic influence on the natural-convection phenomenon in a vertical cylindrical well filled with an anisotropic porous medium. The porous medium is anisotropic in permeability with its principal axes oriented in a direction that is oblique to the gravity vector. Also, anisotropy in thermal conductivity is considered with its principal axes coincident with the coordinate directions. For the similarity regime, the governing equations in the limit of the slenderness of the cavity are solved analytically.

2 Mathematical formulation

The physical model considered here in Fig. 1 consists of a two-dimensional vertical cylindrical well of elongated shape filled with a porous medium composed of a sparse distribution of particles completely surrounded by a saturating fluid. The well opens into a semi-infinite reservoir filled with the same porous medium. As considered in nature in fact, the porous medium is anisotropic in flow permeability. The permeabilities along the two principal axes of the porous matrix are denoted by K_1 and K_2 . The anisotropy in flow permeability of the porous medium is

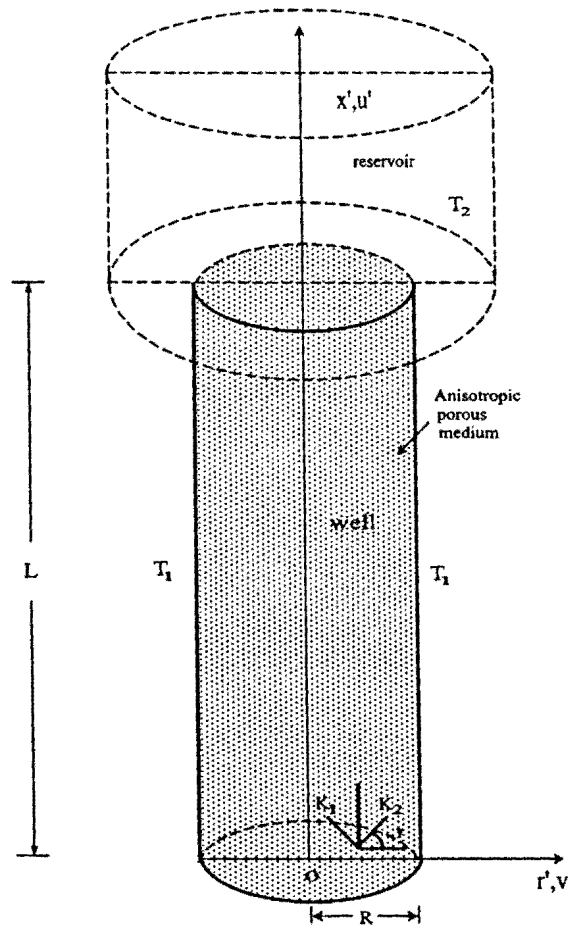


Fig. 1 Schematic of a cylindrical porous well and coordinate system

characterized by the permeability ratio $K^* = K_1/K_2$ and the orientation angle γ , defined as the angle between the horizontal direction and the principal axis with permeability K_2 . The rotation takes place about the horizontal line (i.e., the r -axis) from which the anisotropic rotation angle γ is encountered. Consequently, the cylindrical polar coordinates (r, x) identified as the Cartesian coordinate system (r, x) are used in the present analysis as the framework and then the flowfield will be axisymmetric. The porous vertical cylinder is bounded by two rigid vertical side walls heated at the constant temperature T_1 , while the semi-infinite reservoir situated above the well is relatively colder ($T_2 < T_1$). This is a potentially unstable configuration which leads to fluid motion, cold fluid falling into the well through the middle of the circular cross-section and warmer fluid rising along the heated cylindrical wall. The saturating fluid is viscous, incompressible and assumed to be in local thermodynamic equilibrium with the porous medium everywhere. The thermophysical properties of the fluid are assumed constant, except for the density in the buoyancy term in the momentum equation (Boussinesq approximation).

Under the above approximations, the equations describing the laminar and two-dimensional steady convective flow in an anisotropic porous medium can be written as follows (see Bear [6])

$$\nabla \cdot \vec{V}' = 0, \tag{1}$$

$$\vec{V}' = \frac{\overline{\overline{K}}}{\mu} (-\nabla p' + \rho \vec{g}), \tag{2}$$

$$(\rho c_p)_f \nabla \cdot (\vec{V}' T') = k \nabla^2 T', \tag{3}$$

where \vec{V}' in the superficial flow velocity, T' the temperature, p' the pressure, \vec{g} the gravitational acceleration, $(\rho c)_f$ the heat capacity of the saturating fluid, μ the dynamic viscosity, ρ the density and k the thermal conductivity. The symmetrical second-order permeability tensor $\overline{\overline{K}}$ is defined as

$$\overline{\overline{K}} = \begin{bmatrix} K_1 \cos^2 \gamma + K_2 \sin^2 \gamma & (K_1 - K_2) \sin \gamma \cos \gamma \\ (K_1 - K_2) \sin \gamma \cos \gamma & K_2 \cos^2 \gamma + K_1 \sin^2 \gamma \end{bmatrix}. \quad (4)$$

In physical variables, the previous governing equations 1–3 and the equation of state (expressed by the Boussinesq approximation) can be rewritten as follows

$$\frac{\partial}{\partial r'}(r'v') + \frac{\partial}{\partial x'}(r'u') = 0, \quad (5)$$

$$au' - cv' = -\frac{K_1}{\mu} \left(\frac{\partial p'}{\partial x'} + \rho g \right), \quad (6)$$

$$-cu' + bv' = -\frac{K_1}{\mu} \left(\frac{\partial p'}{\partial r'} \right), \quad (7)$$

$$u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial r'} = \alpha \left\{ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} \right\}, \quad (8)$$

$$\rho = \rho_1 [1 - \beta(T' - T_1)], \quad (9)$$

where

$$a = \cos^2 \gamma + K^* \sin^2 \gamma, \quad b = \sin^2 \gamma + K^* \cos^2 \gamma, \quad c = \frac{1}{2}(1 - K^*) \sin 2\gamma \quad (10)$$

and u' and v' are the velocity components in the x' - and r' -directions; $\alpha = k/(\rho c_p)_f$ is the thermal diffusivity of the fluid.

Eliminating the pressure term by taking the curl of (6) and (7) and making use of (5), we obtain a single momentum equation, which reads as follows:

$$a \frac{\partial u'}{\partial r'} + c \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial r'} \right) - b \frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{K_1 g \beta}{\nu} \frac{\partial T'}{\partial r'}. \quad (11)$$

The appropriate boundary conditions prevailing at the solid cylindrical wall are

$$\begin{aligned} r' = R: \quad v' = 0, \quad T' = T_1, \quad (a) \\ x' = 0: \quad u' = 0, \quad T' = T_1, \quad (b) \end{aligned} \quad (12)$$

where R is the well radius.

It is convenient after a brief scale analysis to renormalize the governing equations by introducing the following transformations:

$$x = x'/L, \quad r = r'/R, \quad u = u'R^2/(\alpha L), \quad v = v'R/\alpha, \quad T = \frac{K_1 g \beta L (T' - T_1)}{\alpha \nu} \left(\frac{R}{L} \right)^2. \quad (13)$$

Substituting the above variables in (5), (8) and (11), we find that the dimensionless governing equations of conservation of mass, momentum and energy in steady-state are

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad (14)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial r} + c \left(\frac{R}{L} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) - b \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (15)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{16}$$

In dimensionless terms, the boundary conditions (12a) and (12b) at the wall become

$$\begin{aligned} r = 1: \quad & v = 0, \quad T = 0, \quad (a), \\ x = 0: \quad & u = 0, \quad T = 0, \quad (b). \end{aligned} \tag{17}$$

Because of the slenderness of the well, $(R/L) \ll 1$, (L being the well height) and therefore, in the dimensionless governing equations (14–16), the terms multiplied by the well aspect ratio (R/L) can be considered negligible. Consequently, using the scales of the variables of interest presented in (13), it is clear that the present analysis is valid if the conditions

$$\frac{a}{c} \gg \frac{R}{L} \tag{18}$$

and

$$\frac{a}{b} \gg \left(\frac{R}{L} \right)^2 \tag{19}$$

are satisfied.

Considering the boundary condition at the line where the well communicates with the semi-infinite and large porous reservoir, we assume that the centerline temperature at the mouth of the well equals the reservoir (see Bejan [4]),

$$x = 1: \quad r = 0, \quad T = -\text{Ra}_L \left(\frac{R}{L} \right)^2, \tag{20}$$

where Ra_L the Darcy–Rayleigh number based on the height L of the well, is defined by

$$\text{Ra}_L = \frac{K_1 g \beta L (T_1 - T_2)}{\alpha \nu}. \tag{21}$$

3 Solution

Following Lighthill [21] and Bejan [4], we observe that a similarity solution is possible upon examining the governing equations (14–16), for which a natural convection pattern exists when the velocity and temperature radial profiles have the same shape independent of vertical position. But, both the velocity and temperature longitudinal distributions u and T are proportional to x while v is a function of radial position only. So, the similarity regime observed is similar to that found by Lighthill [21] while studying natural convection in vertical tubes filled with fluid and revisited by Bejan [5, pp. 403–407] for the same problem in a well filled with an isotropic porous medium. Due to the nonlinearity associated with the convection terms in the energy equation (16), exact analytical solutions for u , v and T are impossible. So, following the previous analyses reported here, one can seek solutions satisfying the condition (20) without the $(R/L)^2$ term in an integral fashion and at specified locations, along the centerline $r = 0$ and the wall $r = 1$:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^1 r u T dr \right) = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=1}, \tag{22}$$

$$\left(u \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{r=0} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=0}, \tag{23}$$

$$0 = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=1}. \tag{24}$$

Moreover, from the continuity equation (14), the following condition has to be satisfied:

$$\int_0^1 ur \, dr = 0 \quad (25)$$

The next step is the selection of reasonable profiles for the velocity and temperature distributions that satisfy the momentum equation (15) identically. Generally, polynomial expressions for temperature and vertical velocity are more suitable. So, making use of the following expressions

$$T = x(m_0 + m_2r^2 + m_4r^4 + m_6r^6), \quad (26)$$

$$u = \frac{x}{a}(n_0 + m_2r^2 + m_4r^4 + m_6r^6), \quad (27)$$

we observe that (15) is identically satisfied and obtain five equations for five unknown coefficients appearing in the expressions (26) and (27). These unknown coefficients are determined from the conditions (17a) and (22–25). The results depending upon the anisotropic parameters are obtained after lengthy algebraic manipulations and are expressed as follows:

$$\begin{cases} m_2 = \frac{24m_0^2}{7m_0 + 240a}, & m_4 = -\frac{3m_0(17m_0 + 144a)}{7m_0 + 240a}, \\ m_6 = \frac{4m_0(5m_0 + 48a)}{7m_0 + 240a}, & n_0 = \frac{96am_0}{7m_0 + 240a}, \end{cases} \quad (28)$$

where $m_0 = -11.81038a$. It is obvious that in the limit of an isotropic porous medium for which $a = 1$, the result of (28) is in agreement with that obtained by Bejan [4].

The continuity equation is automatically satisfied by introducing the stream function ψ as

$$ru = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad rv = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (29)$$

As pointed out by Bejan [4], an important feature of the similarity flow is that the depth to which the free-convection pattern penetrates the well is proportional to the temperature difference driving the flow. It is convenient to predict an order of magnitude for this vertical penetration distance of convection into the well. To determine the scale of the vertical penetration length L_x , one can obtain from governing equations (5), (8) and (11) the following balances

$$\frac{u'}{L_x} \sim \frac{v'}{R}, \quad (30)$$

$$a \frac{u'}{R} \sim \frac{K_1 g \beta \Delta T}{\nu R}, \quad (31)$$

$$v' \frac{\Delta T}{R} \sim \alpha \frac{\Delta T}{R^2}. \quad (32)$$

Because of the slenderness of the well, we assume that the vertical penetration occurs over a distance L_x that is greater than R . Combining (30–32), we write the scales of the quantities of interest as follows:

$$u' \sim \alpha L^{-1} a^{-1} \text{Ra}_L, \quad (33)$$

$$v' \sim \alpha^{-1} R, \quad (34)$$

$$L_x \sim La^{-1} \text{Ra}_L \left(\frac{R}{L}\right)^2. \quad (35)$$

To express completely the physical length of the similarity pattern denoted here by ℓ_s , one can make use of the thermal condition (20) combined with the temperature distribution (26) to have

$$\frac{\ell_s}{L} = -\frac{1}{m_0} \text{Ra}_L \left(\frac{R}{L}\right)^2, \quad (36)$$

which becomes

$$\frac{\ell_s}{L} = 0.08467 \frac{\text{Ra}_L}{a} \left(\frac{R}{L}\right)^2. \quad (37)$$

It is clear from (37) that the physical length of the penetration of the convective flow into the well depends upon the anisotropic parameters of the porous matrix. So, as long as $\ell_s \leq L$, a similarity pattern will exist in the well [4] if the following condition

$$\text{Ra}_L \left(\frac{R}{L}\right)^2 \leq 11.81a \quad (38)$$

holds.

The net heat-transfer interaction between the wall of the vertical cylindrical well and the semi-infinite reservoir is defined by the Nusselt number Nu which can be expressed in physical variables as follows:

$$\text{Nu} = \frac{Q}{kL(T_1 - T_2)}, \quad (39)$$

where the heat flux upward through the mouth of the well is

$$Q = \int_0^R (\rho c_p)_f u' T' d(\pi r'^2) = 2\pi (\rho c_p)_f \left(\int_0^R r' u' T' dr' \right)_{x'=L}, \quad (40)$$

which represents the heat flux transferred through the mouth of the well situated at $x' = L$. Taking into account Eqs. (30) and (31), we have that the scale of the heat-transfer rate Nu is given by

$$\text{Nu} \sim a^{-1} \text{Ra}_L \left(\frac{R}{L}\right)^2 \quad (41)$$

Using equations (13) and (36), we can rewrite the heat-transfer rate in dimensionless terms as

$$\text{Nu} = \frac{2\pi}{\text{Ra}_L \left(\frac{R}{L}\right)^2} \left(\int_0^1 r u T dr \right)_{x=1}. \quad (42)$$

Substitution of (26), (27) and (37) in (42) yields the heat-transfer rate in the similarity regime:

$$\text{Nu} = \frac{0.255}{a} \text{Ra}_L \left(\frac{R}{L}\right)^2. \quad (43)$$

It is obvious that the results obtained for the penetration length of convection, Eq. (37), and for the Nusselt number, Eq. (43), are in agreement with those found by the scale-analysis prediction through (31) and (41), respectively.

4 Results and discussion

First, in order to test the validity of this study, a model of the flow pattern inside the vertical cylindrical well is presented, as shown before [4]. Therefore, Fig. 2 illustrates the streamline ($\psi = \text{constant}$) pattern in the similarity regime of the convective heat flow in the region of vertical penetration into the porous cavity, for $K^* = 1.0$ and $\gamma = 0^\circ$ (case corresponding to an isotropic porous medium for which $a = 1$). Indeed, combining Eqs. (27) and (29), one can obtain that the streamline pattern in the similarity regime is calculated by $\psi = (xr/a) * [n_0 + m_2(r^2/3) + m_4(r^4/5) + m_6(r^6/7)] = \text{constant}$ for given values of r and of x such that, when $K^* = 1.0$ (i.e., $a = 1$); the result obtained for this particular situation corresponding to the isotropic porous medium is in agreement with that found by Bejan [4]. Thus, choosing the same values of the streamlines presented by this author, Fig. 2 drawn for the values of $\psi/(-0.7215)$, indicates that the observed flow fields are the same as those obtained by Bejan [4]. As the vertical impermeable wall of the well is relatively cold ($T = 0$), comparing it to the centerline temperature, which is assumed to be coincident with that of the reservoir above and at the mouth of the well, cold fluid creeps down the

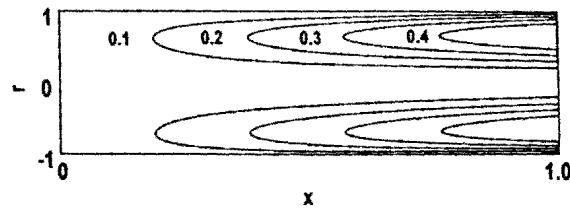


Fig. 2 Streamline pattern ($\psi/(-0.7215) = \text{constant}$) in the similarity regime

centerline, gradually warming up the further it reaches into the well. At the same time a layer of warmer fluid rises along the cylindrical wall, resulting in channeling the flow and hydrodynamic boundary-layer thickness along that wall.

Now, the effects of anisotropic permeability on the temperature field will be analyzed. Figure 3a–c illustrate the effects of the permeability ratio K^* on the isotherms [$T/(-0.7215) = \text{constant}$] presented for $\gamma = 45^\circ$. For $K^* = 1.0$, Fig. 3a shows the temperature fields in the isotropic porous situation. In general, as a result, counter-clockwise rotating cells penetrate into the cylindrical cavity at $x = 1.0$, by a side of the cross-section from the centerline and move out by the opposite half cross-section side at the mouth of the well. A symmetry of the cells with respect to the centerline ($r = 0$) and thermal boundary layers along the vertical isothermal wall is then observed. As the well is slender enough, apart from the penetration region inside the vertical cylinder, a stagnant fluid zone ahead of the penetration zone is observed. The temperature variation is seen to be large in the vertical boundary thermal regions along the cylindrical wall when the value of the isotherm is made weaker and, consequently, the isotherm whose value is weaker penetrates more and more into the well. Upon decreasing K^* from 1 to 0.25, it is seen from Fig. 3b that all the isotherms move out progressively from their penetration zone when compared with the isotropic situation. For example, the isotherm [$T/(-0.7215) = 1$] moves out from $x \approx 0.12$ – 0.18 on the centerline of the well, while the isotherm [$T/(-0.7215) = 3$] moves out from $x \approx 0.37$ – 0.93 and are found to be more concentrated in the core region, in the neighbourhood of the warmer centerline. This behavior can be explained by the fact that, for fixed values of γ and $[\text{Ra}_L(R/L)^2]$ (i.e., K_1), a decrease in K^* can be interpreted as an increase in the permeability K_2 , resulting in an enhancement of the temperature field. Naturally, the reverse is true when K^* is made greater than unity. Thus, Fig. 3c shows that for $K^* = 2.5$, all the isotherms are strongly channeled along the vertical boundary wall which is relatively cold, indicating that the resulting heat transfer is weak. It follows from these results that a large permeability ratio ($K^* > 1$) causes a weakness of the convective heat transfer inside the cylinder, while a small permeability ratio ($K^* < 1$) causes the strength of the temperature field. This is a logical consequence of the vertical penetration of the phenomenon to which attention has to be paid later on.

In Fig. 4, the average heat transfer, Nu , is given as a function of $[\text{Ra}_L/(R/L)^2]$ for selected values of the anisotropic orientation γ and for $K^* = 10$. The curves obtained here for different values of γ are seen as straight and parallel lines, because of the logarithmic scale adopted for the coordinate axes. They are all valid only for the similarity regime, according to the condition of existence of the similarity pattern predicted by Eq. (38) which depends on the anisotropic parameter, $a (= \cos^2 \gamma + K^* \sin^2 \gamma)$. Because of this condition, all the curves presented in Fig. 4 break off at a value of Nu which is independent of the anisotropic properties of the porous matrix. Indeed, making use of Eq. (43) and the condition (38), one can demonstrate that $\text{Nu} \leq 3.0115$; this is the limiting value of the convective heat-transfer rate penetrating the cylindrical well over which the similarity regime will cease to exist. For each curve corresponding to a given value of the anisotropic orientation γ , one can derive the condition of the existence of the similarity regime of the convective heat transfer. For example, for $\gamma = 15^\circ$, this condition is formulated by $[\text{Ra}_L(R/L)^2 \leq 18.93]$, while for $\gamma = 45^\circ$, $[\text{Ra}_L(R/L)^2 \leq 65.95]$. These limits are drawn as dotted lines in the figure.

Figure 5 shows the influence of the anisotropic permeability ratio K^* on the penetration length (ℓ_s/L) of the convective heat transfer into the cylindrical well for $\gamma = 45^\circ$. It is seen that, for a given value of K^* , the penetration length increases progressively, as the parameter $[\text{Ra}_L/(R/L)^2]$ depending on the heating process increases, to reach a value which depends upon the anisotropic properties of the porous medium. As expected, in the Eq. (37), (ℓ_s/L)

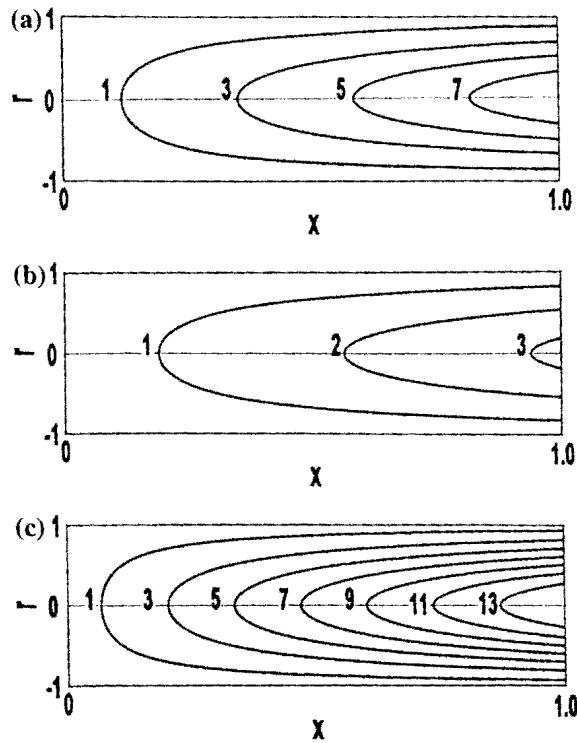


Fig. 3 Isotherm pattern ($T/(-0.7215) = \text{constant}$) in the similarity regime for (a) $K^* = 1$ and for $\gamma = 45^\circ$, (b) $K^* = 0.25$ and for $\gamma = 45^\circ$, (c) $K^* = 2.5$ and for $\gamma = 45^\circ$

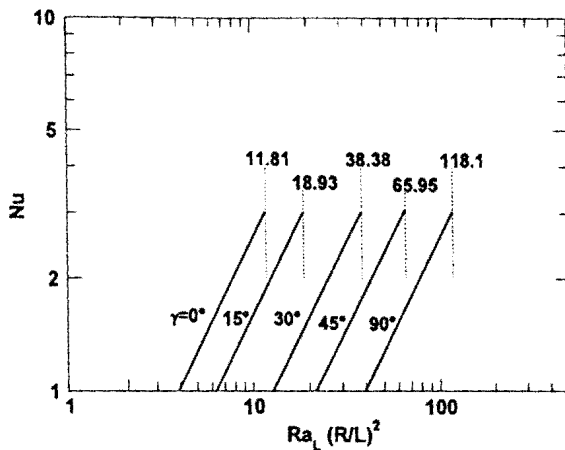


Fig. 4 Effect of the orientation angle of principal axes γ and the parameter $Ra_L (R/L)^2$ on the heat-transfer rate, in the similarity regime

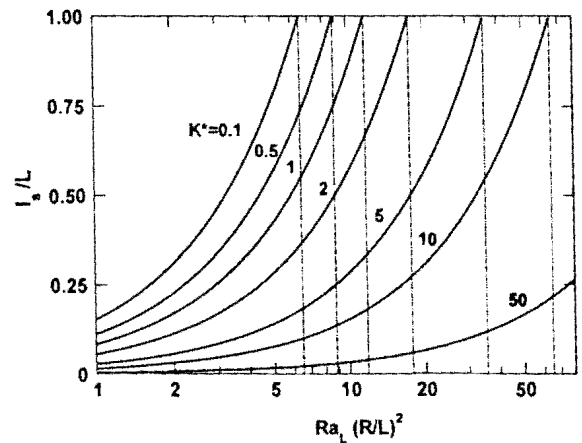


Fig. 5 Effect of the anisotropic permeability ratio K^* and the parameter $Ra_L (R/L)^2$ on the vertical penetration of convection into the well, in the similarity regime

does depend on the parameter a , a function of K^* and γ . Moreover, the limiting value of $[Ra_L/(R/L)^2]$ presented as a dotted line for each selected value of K^* , providing the condition of existence of the similarity regime is predicted by Eq. (38). It is observed that, for a fixed value of $[Ra_L/(R/L)^2]$, the penetration length of the buoyancy-induced flow decreases more and more when $K^* > 1$ and increases more and more for the situations where $K^* < 1$. This behavior can be explained by the fact that, for a given value of $[Ra_L/(R/L)^2]$, (i.e., of K_1), an increase in K^* can be interpreted by an increase of the parameter a , and as the latter is inversely proportional to the penetration length

(see Eq. (37)), therefore (ℓ_s/L) has to be decreasing. Naturally, the reverse trend is achieved when $K^* < 1$. For $K^* = 1$, we have $a = 1$ and the result is found to be in excellent agreement with that obtained by Bejan [4].

5 Conclusions

A study has been made of the penetration phenomenon of natural convective heat transfer in a vertical cylindrical well filled with a porous medium. The porous medium is assumed to be hydrodynamically anisotropic with the principal axes of anisotropic permeability inclined with respect to the gravity force. An analytical solution, valid for flow in slender enclosures, is derived on the basis of an integral method used by Lighthill [21] in his analysis of natural convection in vertical tubes filled with fluid. Detailed results for the flow field, temperature distribution, penetration length of convection into the well and heat-transfer rate have been presented and analyzed. From these results, the following remarks can be made:

1. Both the permeability ratio and inclination angle of the principal axes have a strong influence on the vertical penetration of thermal convection in the anisotropic porous cylindrical well.
2. A large permeability ratio ($K^* > 1$) causes a weakness of the convective heat transfer inside the cylinder and a large penetration length of convection, while a small permeability ratio ($K^* < 1$) determines the strength of the temperature field and the weakness of the penetration length of the convective flow.

The interaction of finite-size, heated, porous layers with a localized source of heat constitutes a class of buoyancy-induced flows through anisotropic porous media which is encountered in practice in groundwater hydrology, oil reservoirs, soil science, chemical engineering and many other branches of engineering and science. The penetrative-flow problems considered in confined porous layers with one side permeable, communicating with a fluid reservoir heated differentially are new research subjects which have to be tackled on the basis of different orientations of the physical configurations in order to investigate influences of the physical properties of the porous solid matrix on the buoyancy-induced flow.

Appendix: Nomenclature

a, b, c	Constants, Eq. (10)
c_p	Specific heat of fluid at constant pressure
\bar{g}	Gravitational acceleration
k	Thermal conductivity
\bar{K}	Flow permeability tensor, Eq. (4)
K_1, K_2	Flow permeability along the principal axes
K^*	Anisotropic permeability ratio, K_1/K_2
L	Height of the well
L_x	Vertical penetration length
ℓ_s	Physical length of the similarity pattern
Nu	Nusselt number, Eq. (43)
p	Pressure
Q	Heat flux, Eq. (40)
R	Radius of the well
Ra_L	Darcy–Rayleigh number, Eq. (21)
T	Temperature
\bar{V}	Seepage velocity
u, v	Velocity components in x, r -directions
x, r	Cylindrical coordinates

Greek symbols

α	Thermal diffusivity
β	Thermal expansion coefficient of the fluid
ΔT	Characteristic scale of temperature
μ	Dynamic viscosity of the fluid
ψ	Stream function
γ	Inclination angle of principal axes
ρ	Density of the fluid
(ρc_p)	Heat capacity of the fluid

Superscript

'	Physical variables
---	--------------------

References

1. Cheng P (1978) Heat transfer in geothermal systems. *Adv Heat Transfer* 15:1–105
2. Minkowycz WJ, Cheng P (1976) Free convection about a vertical cylinder embedded in a porous medium. *Int J Heat Mass Transfer* 19:805–813
3. Vasantha R, Nath G (1987) Forced convection along a longitudinal cylinder embedded in a saturated porous medium. *Int Comm Heat Mass Transfer* 14:639–646
4. Bejan A (1980) Natural convection in a vertical cylindrical well filled with porous medium. *Int J Heat Mass Transfer* 23:726–729
5. Bejan A (1984) *Convection heat transfer*. Wiley-Interscience Publication
6. Bear J (1972) *Dynamics of fluids in porous media*. Dover Publications, New York
7. Neale G (1977) Degrees of anisotropy for fluid flow and diffusion (electrical conduction) through anisotropic porous media. *AIChE J* 23:56–62
8. Castinel G, Combarous M (1974) Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope. *C R Hebd Seanc Acad Sci Paris B* 278:701–704
9. Epherre J F (1975) Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope. *Rev Gen Therm* 168: 949–950
10. Kvernfold O, Tyvand PA (1979) Nonlinear thermal convection in anisotropic porous media. *J Fluid Mech* 90:609–624
11. McKibbin R (1984) Thermal convection in a porous layer: effects of anisotropy and surface boundary conditions. *Trans Porous Media* 1:271–292
12. Tyvand P, Storesletten L (1991) Onset of convection in an anisotropic porous medium with oblique principal axes. *Heat transfer Jpn Res* 22:139–153
13. Zhang X (1993) Convective heat transfer in a vertical porous layer with anisotropic permeability. In: *Proc 14th Canadian congr appl mech Vol 2*, pp 579–580
14. Degan G, Vasseur P, Bilgen E (1995) Convective heat transfer in a vertical anisotropic porous layer. *Int J Heat Mass Transfer* 38:1975–1987
15. Degan G, Vasseur P (1996) Natural convection in a vertical slot filled with an anisotropic porous medium with oblique principal axes. *Numer Heat Transfer A* 30:397–412
16. Degan G, Vasseur P (1997) Boundary-layer regime in a vertical porous layer with anisotropic permeability and boundary effects. *Int J Heat Fluid Flow* 18:334–343
17. Nield DA, Kuznetsov AV (2007) The effect of combined vertical and horizontal heterogeneity on the onset of convection in a bidisperse porous medium. *Int J Heat Mass Transfer* 50:3329–3339
18. Nield DA, Kuznetsov AV (2007) The onset of convection in a shallow box occupied by a heterogeneous porous medium with constant flux boundaries. *Trans Porous Media* 67:441–451
19. Nield DA, Kuznetsov AV (2007) The effects of combined horizontal and vertical heterogeneity on the onset of convection in a porous medium. *Int J Heat Mass Transfer* 50:1909–1915
20. Nield DA, Kuznetsov AV (2006) The onset of convection in a bidisperse porous medium. *Int J Heat Mass Transfer* 49:3068–3074
21. Lighthill MJ (1953) Theoretical considerations on free convection in tubes. *Q J Mech Appl Math* 6:398–439

Résumé

Dans cette thèse, l'écoulement convectif naturel et le transfert de chaleur en milieu poreux hydrodynamiquement anisotrope ont été modélisés analytiquement. Les axes principaux du tenseur de perméabilité sont orientés dans une direction oblique par rapport au champ gravitationnel. En général, le milieu poreux est saturé par un fluide non-newtonien. A travers deux essais, chacun en rapport avec la configuration géométrique du modèle physique étudié, les effets des paramètres anisotropes, l'indice d'écoulement du fluide et l'influence du nombre de Rayleigh sur le phénomène de convection ont été étudiés analytiquement.

Le premier essai consacré à l'écoulement externe, étudie les mouvements thermoconvectifs sur une surface verticale adjacente à un milieu poreux saturé. Cet essai regroupe deux investigations dont la première caractérise le régime transitoire de convection et la seconde, l'écoulement en régime permanent. Les résultats obtenus ont été validés par leur comparaison à ceux concernant les milieux poreux isotropes saturés par les fluides newtonien et non-newtonien discutés dans la littérature. Il a été montré que l'indice d'écoulement du fluide et les paramètres anisotropes ont un impact déterminant sur l'écoulement convectif dans le milieu poreux.

Le deuxième essai réparti en deux études, fait l'objet du transfert de chaleur par convection pénétrante dans un milieu poreux confiné par un puits cylindrique débouchant dans un large réservoir. Sur la base des approximations en régime de couche limite, les champs de température et le transfert de chaleur ont été déterminés. Un bon accord est observé entre les résultats obtenus et ceux existant dans la littérature pour des situations particulières. Il ressort de cette étude que la profondeur de pénétration des courants de convection et le taux de transfert de chaleur dans le puits sont grandement influencés par les paramètres d'anisotropie du milieu poreux.

Mots clés : milieu poreux, convection, anisotropie, écoulements pénétrants.

Abstract

In this thesis, natural convective flow and heat transfer in anisotropic porous medium are modelled analytically. The principal directions of the permeability are oriented in a direction that is oblique to the gravity vector. In general, the porous medium is saturated by a non-newtonian fluid. Through two studies, each of them with respect to geometrical configuration, anisotropic parameters, power-law index and Rayleigh number effects on the convective phenomenon are investigated analytically.

The first essay combines the transient and the steady-state convective flow along a vertical plate adjacent to the porous medium. In order to valid the solutions obtained for the flow field, temperature distribution and Nusselt number, a comparison is made with results corresponding to an isotopic porous medium saturated by newtonian or non-newtonian fluid. It is found that the rheological index of the fluid and the anisotropic parameters have a determinative impact on the flow and heat transfer.

In the second essay, through two investigations, the penetrative convective flow in a vertical cylindrical well filled with an anisotropic porous medium saturated by a newtonian fluid is studied. Based on boundary-layer regime approximations, solutions for flow field and the heat transfer are obtained. A good agreement of results obtained is observed when comparing to particular porous situations. It is demonstrated that, the anisotropic parameters have a strong influence on the heat transfer and on the vertical penetrative length into the well.

Key words: porous medium, convection, anisotropy, penetrative flows