SITE D'ABOMEY CALAVI
(BENIN)

INSTITUT DE MATHEMATIQUES
ET DE SCIENCES PHYSIQUES

DUS SALAM INTERNATIONAL
TRE FOR THEORETICAL
PHYSICS (ITALY)

N° d'ordre :

THESE PRESENTEE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITE D'ABOMEY-CALAVI DU BENIN

Option : Mathématiques

Par

Mouhamadou HASSIROU

Application de la technique de Bochner et les sous-variétés dégénérées d'ue variété semi-riemannienne

Président : **Prof. Jean-Pierre EZIN** (Université d'Abomey-Calavi, Bénin)

Rapporteurs :
- **Prof. Jean-Pierre EZIN** (Université d'Abomey-Calavi, Bénin)
- **Prof. Miguel SANCHEZ** (Departemento de Geometria y Topologia, Univer. Granada, Espagne)
- **Prof. Joël TOSSA** (Université d'Abomey-Calavi, Bénin)

Examinateur : **Prof. Nourou ISSA** (Université d'Abomey-Calavi, Bénin)

Co-Directeurs :
- **Prof. Jean –Pierre EZIN** (Université d'Abomey-Calavi, Bénin)
- **Prof. Joël TOSSA** (Université d'Abomey-Calavi, Bénin)

B.P. : 613
Tél / Fax : (229) 22 -24-55
PORTO-NOVO
e-mail:hkimsp@syfed.bj.refer.org
REPUBLIQUE DU BENIN

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACES

A ma fille Faïssolath O. A. A. HASSIROU.

A mon épouse Chiarath HASSIROU née BADAROU.

A ma Maman née Aïssatou SALAOU.

REMERCIEMENTS

C'est pour moi un réel plaisir d'exprimer sur cette page toute ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé tout au long de cette formation doctorale et tous ceux qui ont accepté de juger ce travail.
Je suis reconnaissant aux professeurs Jean-Pierre EZIN et Joël TOSSA qui ont proposé et co-dirigé cette thèse. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaisance. Je tiens également à les remercier pour leurs différentes contributions dans la rédaction de cette thèse leurs suggessions et corrections apportées au texte.
Je tiens à exprimer également ma gratitude aux professeurs Abdelghani ZEGHIB et Miguel SANCHEZ pour leurs disponibilités aux différents E-mails auxquels ils ont toujours su répondre avec précisions et en fournissant de reférences necessaires. Le professeur Miguel SANCHEZ m'honore en acceptant d'examiner cette thèse. Qu'il reçoit ici mes remerciements.
Mes remerciements vont également aux membres de jury pour avoir acceptés de juger ce travail.
Ce travail ne serait être réalisé sans soutien financier. Je tiens alors à adresser mes reconnaissances aux institutions qui ont financié ma formation. Il s'agit de l'ICTP-Trieste à travers l'IMSP-UAC, du département de Mathématiques de l' ICTP, de l'UNESCO-ANTSI, et de CIMPA, pour le financement de mon voyage Cotonou- El oued (Algérie)- Cotonou. Que les dirigeants de ces différentes institutions trouvent ici mes mots de reconnaissances pour leurs soutiens en faveur de la recherche scientifique en Afrique.
J'adresse ma profonde gratitude aux personnels enseignants, administratifs et aux camarades étudiants pour la collaboration paisible observée durant tout mon séjour à l'IMSP. Un remerciement special au Dr Carlos OGOUYANDJOU pour les divers soutiens qu'il m'apporté.
Je ne saurai terminé sans adresser une mention spéciale à mon épouse, Chiarath BADAROU ma famille et à ma belle famille pour leurs soutiens tout au long de ce travail.
Mes remerciements aux enseignants de l'université Abdou Moumouni de Niamey; particulièrement à ceux du département de Mathématiques pour leurs disponibilités pendant mon séjour dans cette université.

RÉSUMÉ

Résumé

Cette thèse traite de la technique de Bochner et de quelques résultats sur les sous-variétés dégénérées d'une variété semi-riemannienne. Pour le cas des variétés riemanniennes (cas particulier d'une variété semi-riemannienne), la technique de Bochner donne lieu à des théorèmes de caractérisations des champs de vecteurs particuliers (conformes, Killing, harmoniques ...) et des formes harmoniques. Dans cette thèse nous étudions cette technique dans le cas général des variétés semi-riemanniennes. Nous revisitons les différentes formules liées à cette technique en semi-riemannien et donnons des résultats caractérisant certains champs de vecteurs et formes harmoniques. Nous appliquons cette technique aux sous-variétés maximales de type espace.

Nous généralisons ces formules aux hypersurfaces dégénérées. L'élément de volume sur l'hypersurface dégénérée d'une variété semi-riemannienne orientée a été déterminé. Ainsi nous établissons sur ces hypersurfaces l'opérateur de type star de Hodge, la codifférentielle et l'opérateur de Laplace Beltrami. Un produit de dualité a été défini. Nous obtenons ainsi des résultats de caractérisations des formes harmoniques semblables au cas des variétés riemanniennes. La détermination de cet élément de volume sur l'hypersurface dégénérée a permis de faire le calcul intégral et d'établir le théorème de la divergence pour les variétés semi-riemanniennes avec bord (spécialement avec un bord dégénéré). Enfin nous classifions les sous-variétés dégénérées qui admettent la réduction de leurs codimensions.

Abstract

This thesis deals with the Bochner technique as well as some results on degenerate submanifolds of a semi-Riemannian manifold. For the Riemannian manifold (particular case of semi-Riemannian manifold), the Bochner technique gives rise to characterizing theorems of particular vectors fields (conformal, Killing, harmonic...) and harmonic forms. In this thesis, we study this technique in the general case of semi-Riemannian manifolds. We revisit different formulas of this technique into semi-Riemannian and we give some results of charac-

erizing of vectors field and harmonic forms. We apply this technique to maximal spacelike ubmanifolds.

We generalize these formulas to degenerate hypersurfaces. Indeed the volume element on degenerate hypersurface of oriented semi-Riemannian manifolds is determined. We establish on these hypersurfaces the Hodge star type operator, the coderivative and the Laplace Beltrami operator. A duality product was defined and we obtain results of characterizations of harmonic forms similar to Riemannian manifold ones. The determination of volume element on the degenerate hypersurface allows integral computation on this hypersurface and we establish divergence theorem on semi-Riemannian manifold with boundary (especially with a degenerate boundary). Finally we classify degenerate submanifolds which admit the reduction of their codimensions.

INTRODUCTION

Une structure pseudo-riemannienne sur une variété M de dimension n, consiste à la donnée d'un champs de $(0,2)$- tenseur symétrique g qui induit sur le fibré tangent TM les formes bilinéaires symétriques non dégénérées de signature $(s, n-s)$ et telle que l'application qui $m \longmapsto g_m$ soit de classe C^∞.
La signature de g_m ne dépend pas de la base choisie sur T_mM. Les cas les plus étudiés étant les signatures $(n,0)$ (le cas riemannien) et $(n-1,1)$ (le cas lorentzien). Ce dernier revêt un intérêt particulier en raison de la théorie de la relativité générale et de son interprétation pour décrire la mecanique quantique, les systèmes dynamiques etc... [37, 43, 56], mais aussi parce qu'il apparaît comme une légère pertubation de la géométrie riemannienne. Il a été prouvé que de nombreuses différences existent entre le cas riemannien et pseudo-riemannien, entrainant un intérêt grandissant à l'étude de la géométrie lorentzienne et pseudo-riemannienne de manière générale. A titre d'example on peut citer les faits suivants :

•**Fait1**

Si (M,g) est une variété riemannienne compacte, alors (M,g) est géodésiquement complet et son groupe d'isométries $Iso(M)$ est compact []. De plus si la courbure de Ricci de (M,g) est définie négative, le groupe d'isométries est discret[12, 13].

Dans le cas d'une métrique lorentzienne, ces propriétés ne sont pas assurées, la complétude dans ce cas est obtenue moyennant des hypothèses supplémentaires portant soit sur la constante de la courbure sectionnelle [?, ?], soit sur l'existence d'un champs de vecteurs conformes de type temps [?, ?]. De même une variété riemannienne homogène (M,g) est complète. En lorentzien cette propriété n'est pas vraie [10, p 206]. Rappelons qu'en lorentzien, une variété M est dite complète si toute géodésique peut-être définie sur $\mathbb{R}$ contrairement au théorème de Hopf-Rinow qui en riemannien fait un lien entre la complétude des géodésiques et la connexité par des géodésiques.

Exemple 1 [10, p.206]

On considère la surface $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, /x+y>0\}$ munie de la métrique $g = dx^2 - dy^2$ et G un groupe de Lie dont le produit est donné par

$$(a,t)(a',t') = (a + a'e^t, t+t').$$

Le groupe G agit transitivement sur M par

$$(a,t)(x,y) = (x\cosh t + y\sinh t + a, x\sinh t + y\cosh t - a).$$

La variété M est homogène, mais elle n'est pas complète. En effet la suite $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in M$ la limite $(0,0) \notin M$. De plus si M est une variété lorentzienne compacte, le groupe d'isométrie, $Iso(M)$ n'est pas toujours compact.

Exemple 2

Le tore (T^2, h) muni de la métrique $h = dx_1^2 + dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1 - dx_2^2$ alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

est une isométrie pour h de T^2.

On note A^{-1} l'inverse de A et $A^k = A.A^{k-1}$ pour $k > 0$. On peut constater que le sous-groupe fermé $\{A^n, \ n \in_f \mathbb{Z}\}$ est contenu dans $Iso(T^2, h)$, mais il n'est pas compact (les coefficients de A^n tendent vers infini quand n tend vers infini).

Cependant, si (M, g) est une variété compacte lorentzienne admettant un champ de Killing qui en un point est de type temps et que $Iso(M, g)$ est de dimension un, alors $Iso(M, g)$ est compact [17]. Ainsi la caractérisation des champs de vecteurs de Killing de type temps est alors nécessaire. Il en ait de même pour les champs de vecteurs conformes de type temps.

Fait 2

L'ensemble des métriques riemanniennes $Rem(M)$ sur une variété M est un cône convexe dont on sait caractériser parfaitement la structure. Il n'en est pas de même de l'ensemble des métriques lorentziennes $L(M)$ sur une variété. Il convient même à noter que toute variété paracompacte peut-être munie d'une métrique riemannienne alors que l'existence d'une métrique lorentzienne sur une variété connexe et fermée est subordonnée à la nullité de la classe d'Euler $\chi(M)$ [41].

Ainsi la proximité de la géométrie lorentzienne par simple pertubation de la signature n'est pas en rapport avec la profondeur des changements que l'on peut noter sur les résultats connus en géométrie riemannienne. Un autre aspect interessant qui apparait en lorentzien est l'existence de trois types de sous-variétés. Ainsi en lorentzien (semi-riemannien) on peut noter des sous-variété de type espace, de type temps et de type lumière. Les deux premières sous-variétés sont respectivement des models des variétés riemanniennes et semi-riemanniennes. La dernière est une hypersurface qui hérite d'une métrique induite dégénérée.

Loin d'être une curiosité mathématique les hypersurfaces dégénérées sont d'une grande importance dans le dévéloppement de la relativité générale et de la physique gravitationnelle. L'étude de leur géométrie donne une base mathématique pour étudier les objets de masses nulles. En relativité elles sont les modèles de différents types d'horizons : l'horizon évenement et l'horizon de Killing. Une bonne présentation de ces horizons est donnée par Carter [16].

Une autre curosité mathématique est l'étude des sous-variétés dégénérées d'une variété semi-riemanienne quelconque.
On appelle sous-variété r-dégénérée d'une vraiété semi-riemannienne de dimension $m+n$ $(\overline{M}, \overline{g})$, la sous-variété (M, g) de $\overline{M}$ et de dimension m pour laquelle

$$Rad(TM) = TM \cap TM^{\perp} \neq \{0\}$$

et l'application $x \longmapsto Rad(T_x M)$ définie une distribution de rang r.

Il existe quatre types de sous-variétés dégénérées

- cas 1 ($0 < r < min(m, n)$), la sous-variété M est dite proprement dégénérée. Le fibré $Rad(TM)$ est strictement inclus dans TM et dans $TM^{\perp}$.
- cas 2 ($1 \leq r = n < m$), la sous-variété M est dite coisotrope . Le fibré $Rad(TM) = TM^{\perp}$ et strictement inclus dans TM.
- cas 3 ($1 \leq r = m < n$) la sous-variété M est dite isotrope. Le fibré $Rad(TM) = TM$ et strictement inclus dans $TM^{\perp}$.
- cas 4($1 < r = m = n$), la sous-variété M est dite complètement dégénérée. Le fibré $Rad(TM) = TM = TM^{\perp}$

L'objectif de cette thèse est de comtribuer à la compréhension de la géométrie des sous-variétés dégénérées.

Avant d'en arriver à ces objectifs nous allons, dans le **premier chapitre** de ce texte donner un bref apperçu des éléments géométriques des variétés semi-riemanniennes. Nous rappelons les formules, les équations et les théorèmes classiques à étudier dans ce texte.

CHAPITRE 1

PRELIMINAIRES

Dans ce chapitre nous donnons quelques notions de base (élémentaires) de la géométrie semi-riemannienne qui seront utilisées dans ce texte. En fait elles vont permettre de fixer les notations et de donner quelques définitions. Les résultats énoncés dans cette partie ne seront pas tous démontrés. Toutefois des indications ou des démonstrations partielles seront fournies pour certains d'entre eux.

1.1 Rappel sur la géométrie semi-riemannienne

On suppose que les variétés, les tenseurs, les champs de vecteurs, les fonctions et les formes sont tous de classe C^∞.
Soit M une variété semi-riemannienne. On désigne par $C^\infty(M)$ les fonctions de classe C^∞, $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M, $T^r_s M$ l'ensemble des (r, s)-tenseurs, TM le fibré tangent, T^*M le fibré cotangent et $\Gamma(TM)$ l'ensemble des sections sur M.

1.1.1 Métrique semi-riemannienne

Définition 1.1.1 .
Soit M une variété différentielle de dimension m et g un $(0,2)$-tenseur défini sur M. Le tenseur g est dit métrique semi-riemannienne si pour $p \in M$,

$$\begin{aligned} g_p : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto g_p(X, Y) \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de signature constante, $(s, m-s)$ où

$$sign(g) = (\underbrace{-\ldots,-}_{s},\underbrace{+\ldots,+}_{m-s})$$

et s un entier naturel tel que $(0 \leq s \leq m)$.

Soit U un voisinage ouvert de M. L'expression de g en coordonnées locales en un point $\in U$ est donnée par

$$g_p = g_{uv}(p)dx^u \otimes dx^v.$$

a matrice constituée des éléments $g_{uv}(p)$ est non dégénérée et sa forme diagonale est onstituée de s nombres réels négatifs et $(m - s)$ nombres réels positifs. Cette configuraon ne dépend ni du point p ni du voisinage coordonné. Pour $s = 0$, nous retrouvons le cas aturel du riemanien. Le cas $s = 1$ correspond au cas lorentzien.

Toute variété paracompacte, (comme c'est le cas pour les variétés étudiées dans ce texte). eut être munie d'une métrique riemannienne. Cette situation est totalement différente dans e cas des variétés lorentziennes. L'existence d'une métrique lorentzienne est liée à certaines onsidérations topologiques sur la variété. En effet pour qu'une variété fermée et connexe oit dotée d'une métrique lorentzienne il faut que sa classe d'Euler soit nulle [41]. Les seules urfaces lorentziennes fermées sont le tore et la bouteille de Klein. Plus généralement, si on ote la signature d'une métrique arbitraire par un triplet (l, p, q) où l est le nombre de zeros (nombre de dégénérescence), p le nombre de signe moins $(-)$ et q le nombre de signe plus $(+)$ $(l + p + q = m = \dim M)$. alors une variété fermée et connexe admet une métrique de signature $(1, 0, m - 1)$, $(1, m - 1, 0)$, $(0, m - 1, 1)$ ou $(0, 1, m - 1)$ si et seulement si sa classe caractéristique est nulle $(\chi(M) = 0)$. Mais une variété non fermée peut admettre une métrique quelconque.

On note $[g^{-1}] :\equiv (g^{uv})$ les éléments de la matrice inverse de g et on note g l'extension de g sur les tenseurs de M. Ainsi pour T et S respectivement un $(t, 0)-$ tenseur et $(0, r)-$ tenseur

$$\begin{aligned} g(T, T) &= g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_t j_t} T_{i_1 i_2 \dots i_t} T_{j_1 j_2 \dots j_t} \\ g(S, S) &= g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_r j_r} S_{i_1 i_2 \dots i_r} S_{j_1 j_2 \dots j_r} \end{aligned}$$

Si (M, g) est une variété riemannienne alors l'extension est aussi une métrique riemannienne et si g est semi-riemannienne d'indice (p, q) alors l'extension est aussi semi-riemannienne mais d'indice différent.

1.1.2 Connexion

Définition 1.1.2 .
Une connexion linéaire est un opérateur

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

fiant les propriétés suivantes :

$\nabla_{X_1+X_2}Y = \nabla_{X_1}Y + \nabla_{X_2}Y, \quad \nabla_X(Y_1+Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$

. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X.f)Y$

$_1, X_2, X, Y \in \mathcal{X}(M)$ *et* $\forall\ f \in C^\infty(M)$

Soit w une p-forme (ou un $(0,p)$-tenseur) sur M, ∇w est une $(p+1)-$ forme (ou un $+1)$-tenseur) sur M telle que pour $X_1, \ldots, X_p$ et X des champs de vecteurs sur M.

$$\begin{aligned}(\nabla w)(X, X_1, \ldots, X_p) &= (\nabla_X w)(X_1, \ldots, X_p) \\ &= \nabla_X(w(X_1, \ldots, X_p)) - w(\nabla_X X_1, \ldots, X_p) - \ldots - \\ &\quad -w(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_p) - \ldots - w(X_1, \ldots, \nabla_X X_p)\end{aligned}$$

oposition 1.1.1 .
t (M,g) une variété semi-riemannienne. Il existe une et une seule connexion linéaire pelée connexion de Levi-Civita sur M telle que pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$

$$\nabla_X g(Y,Z) = X.(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_X Z, Y) = 0$$

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_X Y$$

s formules expriment respectivement la compatibilté de la connexion avec la métrique et condition de nullité de la torsion.

Dans les cas des sous-variétés dégénérées les connexions linéaires ne sont pas toujours triques ni uniques (voir les relations (5.27) et (5.28) de ce texte). Pour plus détails sur métriques et connexions, on peut consulter les résultats de Hayden [28], de Bochner et no [13] et de Bitis [11].

1.3 Le tenseur de courbure de Riemann

Le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita ∇ est appelé tenseur de courbure Riemann et est défini par :

$$\begin{aligned} R: \quad \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ (X,Y,Z) &\longmapsto R(X,Y)Z \end{aligned}$$

$$R(X,Y)Z = R_{XY}Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

R peut être considéré comme un $(0,4)$-tenseur,

$$R(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z;V) \quad \text{où} \quad X,Y,Z,V \in \Gamma(TM).$$

Le tenseur de courbure vérifie les propriétés suivantes :

1. $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0$
2. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$
3. $R(X,Y,Z,V) + R(X,Y,V,Z) = 0$
4. $R(X,Y,Z,V) = R(Z,V,X,Y).$

La contraction C_2^1 de la courbure de Riemannan est un $(0,2)$-tenseur appelé tenseur de Ricci. Ric défini par :

$$Ric = C_2^1(R) = trace(Z \longrightarrow R(.Z).).$$

$$Ric(X,Y) = C_2^1(R)(X,Y) = g^{ij}R(X,\partial_i,Y,\partial_j).$$

On définit de même la courbure scalaire s de M par :

$$s = trace(Ric) = g^{ij}Ric(\partial_i,\partial_j).$$

Fixons p dans M et considérons deux vecteurs non colinéaires u,v dans T_pM. Notons σ le plan engendré par u et v. La courbure sectionnelle, K_σ de σ est donnée selon les cas par les expressions suivantes :

1. Si σ est non dégénéré

$$K_\sigma(u,v) = \frac{g(R(u,v)v,u)}{g(u,u)g(v,v) - (g(u,v))^2}. \tag{1.1}$$

2. si σ est dégénéré c'est à dire u isotrope et v non isotrope

$$K_\sigma(u.v) = \frac{g(R(u,v)v,u)}{g(v,v)}.. \tag{1.2}$$

La courbure sectionnelle K_σ ne dépend pas des vecteurs u et v mais du plan et du point p.

Théorème 1.1.1 *(F. Schur 1886)[63, p.240]*
Si la courbure sectionnelle K_σ d'une variété M de dimension $m \geq 3$ ne dépend que du point p (c'est à dire ne dépend pas de σ) alors K_σ est constante sur M.

1.2 Opérateurs différentiels

Dans cette partie, il s'agit de rappeler les définitions de quelques opérateurs différentiels semi-riemanniens tels que le gradient, le hessien, le laplacien et la divergence

.2.1 La différentielle extérieure

Soit (M,g), une variété semi-riemannienne. On considère les isomorphismes musicaux

$$\begin{aligned} \flat : \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}^*(M) \\ X &\longmapsto X^\flat \end{aligned}$$

el que pour $p \in M$, $X_p^\flat = g_p(X_p, .)$ et

$$\begin{aligned} \sharp : \mathcal{X}^*(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ W &\longmapsto W^\sharp \end{aligned}$$

el que pour $p \in M$, $\quad g_p(X_p, W_p^\sharp) = W_p(X_p)$

Définition 1.2.1 .

On définit sur les k-formes, l'opérateur différentiel donné par

$$\begin{aligned} d : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(M) \\ W &\longmapsto dW \end{aligned}$$

tel que pour tous $X^0, \ldots, X^k \in \mathcal{X}(M)$

$$\begin{aligned} dW(X^0, \ldots, X^k) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i W(X^0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X^k) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j} W([X_i, X_j], X^0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X^k). \end{aligned}$$

Pour $k = 0$

$$\begin{aligned} d : C^\infty(M) &\longrightarrow \mathcal{X}^*(M) \\ f &\longmapsto df \end{aligned}$$

où pour tout champ de vecteurs X, $df(X) = X.f = f_* X$ et f_* est la différentielle de f. Soit $f \in C^\infty(M)$, on appelle gradient de f le champs de vecteurs noté ∇f (*ou* $\overrightarrow{grad} f$) défini par $\overrightarrow{grad} f = (df)^\sharp$ Comme l'opérateur $\sharp$ est un isomorphisme, $\overrightarrow{grad} f$ est unique et en plus pour tout $X \in \mathcal{X}(M)$

$$X.f = df(X) = g(\nabla f, X).$$

En coordonnées locales on a :

$$\nabla f = g^{ij} \partial_i f \partial_j \tag{1.3}$$

où les g^{ij} sont les éléments de la matrice inverse de g en coordonnées locales. On note souvent la 1-forme df comme gradient de f. Avec la détermination de la métrique pseudo-inverse au sens de [3] sur les hypersurfaces dégénérées, ces différents opérateurs peuvent être définis sur les hypersurfaces dégénérées. Mais le cas où la dégénérescence est supérieure 1, reste non défini.

.2.2 La codifférentielle

Soit (M, g), une variété semi-riemannienne. Le produit intérieur d'une k-forme ($k \geq 1$) W ar un champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ est la $(k-1)-$ forme $i_X W$ telle que pour $X^1, \ldots, X^{k-1}$

$$i_X W(X^1, \ldots, X^{k-1}) = W(X, X^1, \ldots, X^{k-1}).$$

Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, $i_X f = 0$.

Soit X un champ de vecteurs sur M et $(\varphi_t)_{t\in I}$ le flot local de X. La dérivée de Lie d'un tenseur ϕ, par rapport à X est le tenseur $L_X\phi$ de même type que ϕ défini par :

1. Si ϕ est un $(0, r)$ tenseur

$$L_X\phi = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi_t^*\phi - \phi) \tag{1.4}$$

où φ_t^* est la transposée de φ_t.

2. Si ϕ est un $(s, 0)$-tenseur

$$L_X\phi = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi_{t*}\phi - \phi) \tag{1.5}$$

où φ_{t*} est la différentielle de φ_t.

Soient $X, Y, Z, X_1, \ldots, X_p \in \mathcal{X}(M)$. W une $p-$forme et B un $(0, 2)$-tenseur alors les équations (1.4) et (1.5) sont données sous forme tensorielle par

$$\begin{aligned}
L_X Y &= [X, Y] \\
(L_X W)(X_1, \ldots, X_p) &= X(W(X_1, \ldots, X_p)) - \\
&\quad - \sum_i W(X_1, \ldots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \ldots, X_p) \\
(L_X B)(Y, Z) &= X(B(Y, Z)) - B(L_X Y, Z) - B(Y, L_X Z)
\end{aligned}$$

Définition 1.2.2 .
Soit X un champ de vecteurs sur (M, g).

1. *Le champ X est dit conforme s'il existe une fonction $\lambda > 0$ telle que $L_X g = \lambda g$.*
2. *Le champ X est dit de Killing si $L_X g = 0$.*

Définition 1.2.3 .
L'opérateur star de Hodge est un opérateur de dualité qui associe a toute k-forme une $(m-k)$-forme définie par

$$\begin{aligned}
\star : \Omega^k &\longrightarrow \Omega^{m-k} \\
W &\longmapsto \star W
\end{aligned}$$

vec

$$\star W = \frac{\sqrt{(|g|)}}{k!(m-k)!} W_{i_1\ldots i_k} \varepsilon^{i_1\ldots i_k}{}_{j_{k+1}\ldots j_m} \theta^{j_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \theta^{j_m}, \tag{1.6}$$

ù

$$\varepsilon^{i_1\ldots i_k}{}_{j_{k+1}\ldots j_m} = g_{sj_{k+1}} \varepsilon^{i_1\ldots i_k s}{}_{j_{k+2}\ldots j_m}$$

t $|g|$ désigne le déterminant de la matrice associé à g.

Pour une métrique dégénérée g on a $|g| = 0$, donc la formule $(1,1)$ n'est plus vérifiée. Pour cette raison, nous avons besoin d'une autre formulation qui sera donné au chapitre 2.

Définition 1.2.4 .

Soit (M, g) une variété semi-riemannienne de dimension m et d'indice q. La codifférentielle δ est l'application définie

$$\begin{aligned} \delta : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \\ w &\longmapsto \delta w \end{aligned}$$

telle que pour toute k-forme différentielle sur M, $w = w_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$

$$\delta w = \delta^l_p \partial_l w_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{l-1}} \wedge \hat{dx^{i_p}} \wedge dx^{i_{l+1}} \wedge dx^{i_k}.\ 1 \leq l \leq k$$

$$où \quad \delta^k_p g_{lk} = \delta^l_p = \begin{cases} 1 & si \quad l = p \\ 0 & si \quad l \neq p \end{cases}$$

La codifférentielle est l'adjointe de la différentielle extérieure d et s'exprime en fonction de l'opérateur star de Hodge par :

$$\delta = \varepsilon \star d \star \quad \text{où} \quad \varepsilon = (-1)^{mk+n+1} sign(det(g)) \tag{1.7}$$

Contrairement à la différentielle extérieure, la codifférentielle est un opérateur métrique.qui dépend du déterminant de g.

La divergence des formes différentielles se définit à l'aide de la codifférentielle δ comme suit : pour toute 1-forme w sur M,

$$\delta w = div(w^\sharp).$$

En coordonnées locales, pour tout $X \in \Gamma(TM)$,

$$divX = g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_j) \tag{1.8}$$

On peut généraliser cette divergence sur un $(0,p)$-tenseur. Ainsi soit un $(0,2)$-tenseur A, on a :

$$(divA)(X) = g^{ij} (\nabla_{\partial_i} A)(X, \partial_j) \tag{1.9}$$

Remplaçons dans la relation (1.8), X par ∇f défini par la relation (1.3). On obtient alors

$$\begin{aligned} divX &= g^{ij}g(\nabla_{\partial_i}X, \partial_j) && (1.10)\\ div\nabla f &= g^{ij}g^{kl}g(\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_k}f\partial_l, \partial_j) && (1.11)\\ &= g^{ij}g^{kl}g_{lj}\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_k}f && (1.12)\\ &= g^{ki}\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_k}f && (1.13)\\ &= -\Delta f && (1.14) \end{aligned}$$

L'expression générale de l'opérateur de Laplace Beltrami sur les formes est donnée par

$$\Delta = \delta d + d\delta.$$

Ainsi pour toute k-forme w,

$$\Delta w = \nabla^{*}\nabla w + f(w) \tag{1.15}$$

où $\nabla^{*}\nabla = g^{ij}\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}$ et $f(w)$ est une fonction qui dépend de la courbure de la variété [12, 64, 65].

Définition 1.2.5 .
Les p-formes vérifiant l'équation $\Delta w = 0$ sont dites harmoniques.
De même un champ de vecteurs X est harmonique si la forme associée $X^{\flat}$ est harmonique.

Soient α et β deux $p-$formes sur M. On définit le produit de dualité par :

$$(\alpha, \beta) = \int_M g(\alpha, \beta)v_M. \tag{1.16}$$

Ce produit, dans le cas particulier des variétés riemanniennes, est défini positif et permet d'établir les résultats suivants qui ne sont plus vrais sur les variétés proprement semi-riemanniennes (le produit 1.16 n'est pas défini positif).
Si w est une p-forme harmonique d'une variété riemannienne compacte orientée sans bord, alors

$$dw = 0 \quad \text{et} \quad \delta w = 0.$$

En conséquence, l'ensemble des k-formes sur M, se décompose comme suit

$$\Omega^k(M) = \delta\Omega^{k+1}(M) \oplus d\Omega^{k-1}(M) \oplus Harm(M) \text{ (la décomposition de De Rham)} \tag{1.17}$$

où $Harm(M)$ est l'ensemble des formes harmoniques sur M.
De ces relations, vient un résultat qui a marqué la géométrie riemannienne. Il a permis d'établir un lien entre la géométrie et la topologie de la variété.

On note par $F^k(M)$ les k-formes fermées ($\alpha \in \Omega^k M$ et $d\alpha = 0$) sur M et $B^k(M)$ les k-formes exactes ($\alpha \in \Omega^k M$, $\exists \eta \in \Omega^{k-1}M$ et $d\eta = \alpha$)sur M. Puisque $d \circ d = 0$ alors on a $B^k(M) \subset F^k(M)$. L'espace quotient $H^k(M) = \dfrac{F^k(M)}{B^k(M)}$ est appelé groupe de cohomologie de de Rham d'ordre k de M.

Théorème 1.2.1 *(de Hodge)[65, p.11].*
Soit (M,g) une variété riemannienne orientée sans bord. La dimension de l'ensemble des p-formes harmoniques est égale à la dimension du p^{ieme} groupe de cohomologie $H^p(M)$ de M.

Définition 1.2.6 .
Soit (M,g) une variété semi-riemannienne et ∇ la connexion de Levi-Civita; le Hessien de f, dérivée seconde covariante de f, est un $(0,2)$-tenseur symétrique noté $Hessf = H_f$ et défini pour tous $X, Y \in T_pM$ par

$$\begin{aligned} Hessf(X,Y) &= \nabla_X(\nabla_Y f) - \nabla_{\nabla_X Y} f \\ &= g(\nabla_X(\nabla f), Y) \end{aligned}$$

Contrairement au gradient le Hessien n'est pas métrique. Par un calcul très simple on montre que le Hessien est une forme bilinéaire symétrique sur T_pM.

Proposition 1.2.1 .
Soient (M,g) une variété semi-riemannienne, ∇ la connexion de Levi-Civita sur M, $f \in C^\infty(M)$, $p \in M$, $v \in T_pM$ et γ une géodésique telle que $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$. Alors

$$Hessf(v,v) = \frac{d^2(f(\gamma(t)))}{dt^2}\Big|_{t=0} \tag{1.18}$$

Preuve
Soit γ une géodésique de classe C^∞ et $h(t) = f(\gamma(t))$ ainsi.

$$h'(t) = df_{\gamma(t)}\dot\gamma(t) = g(\nabla f(\dot\gamma(t)), \dot\gamma(t))$$
$$h''(t) = g(\nabla_t \nabla f(\dot\gamma(t)), \dot\gamma(t)) + g(\nabla f(\dot\gamma(t)), \nabla_t \dot\gamma(t)),$$

où $\nabla_t = \nabla_{\dot\gamma(t)}$
Comme γ est une géodésique $\nabla_t \dot\gamma(t) = 0$.
Ainsi $h''(t) = g(\nabla_t \nabla f(\dot\gamma(t)), \dot\gamma(t))$

$$h''(0) = Hessf(v,v)$$

Définition 1.2.7 .
La trace du Hessien par rapport à la métrique est égale au laplacien de f. On note $\Delta f = trace_g(Hessf)$.

1. *la sous-variété M est minimale si les vecteurs normaux de sont de type espace ou de type lumière,*

2. *la sous-variété M est mиximale si les vecteurs normaux de sont de type temps.*

Preuve

Pour faciliter les calculs nous allons supposer que (M, g) est une hypersurface de $(\overline{M}, \overline{g})$. Pour le cas général il suffit de faire une itération. On considère l'immersion isométrique, $\varphi : (M, g) \longrightarrow (\overline{M}, \overline{g})$ et φ_t la variation de φ suivant le vecteur normal, pseudo-unitaire N ($\overline{g}(N, N)$ prend respectivement la valeur -1, 0 ou 1 suivant que N soit de type temps, lumière ou espace) telle que $\varphi_0 = \varphi$ et $\varphi_t = \varphi$ sur le bord de M (∂M).

$$\varphi_t : (M_t, g_t) \longrightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$$

φ_t s'écrit alors localement

$$\varphi_t = \varphi + tkN \tag{1.23}$$

où k est une fonction sur M telle que $k|_{\partial M} = 0$.

Soit $\{x^i, i = 1, \ldots, m\}$ un système de coordonnées sur M alors

$$\partial_i \varphi_t := \frac{\partial \varphi_t}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + t\partial_i k N + tk\partial_i N$$

et

$$\begin{aligned} (g_{ij})_t &= < \partial_i \varphi_t, \partial_j \varphi_t > \\ &= g_{ij} + 2t < \partial_i \varphi_t, \partial_j N > + t^2((\partial_i k)^2 |N|^2 + k^2 |\partial_i N|^2) \end{aligned}$$

Considérons alors l'élément de volume, $vol_t(M_t)$ de (M_t, g_t) défini par :

$$vol_t(M_t) = \int_M (\sqrt{|det(g_t)|}) v_M$$

L'extrémun de cette variation est obtenu par

$$\frac{\partial vol_t(M_t)}{\partial t}|_{t=0} = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial vol_t(M_t)}{\partial t}|_{t=0} &= \int_M (\varepsilon \frac{1}{2} trace(\frac{\partial g_t}{\partial t}) det(g_t)^{-\frac{3}{2}})|_{t=0} v_M \\ &= \varepsilon \int (trace(< \partial_i \varphi, \partial_j N >)) v_M \\ &= \int \varepsilon (H.\varphi) v_M \end{aligned}$$

où ϵ représente le signe du déterminant.
A travers la dernière équation on a

$$\frac{\partial vol_t(M_t)}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad \text{si} \quad II = 0.$$

Alors la fonction volume admet en $t = 0$ un extremun si le vecteur courbure moyenne est nul ($H = 0$).
Déterminons la nature de l'extrémun. On a ·

$$\frac{\partial \partial vol_t(M_t)}{\partial t^2}|_{t=0} = \int \sum_i^n (\partial_i k)^2 |N|^2 v_M.$$

Comme $(\partial_i k)^2 > 0$

$$\frac{\partial \partial vol_t(M_t)}{\partial t^2}|_{t=0}$$

est alors de même signe que $|N|^2$ (car $|N|^2$ est de signe constant).
Ainsi l'extrémum est un minimum si le vecteur N est de type espace ou de type dégénéré et un maximum si le vecteur N est de type temps. □

Exemple 1.3.1 .
Exemples d'immersions maximales[44, 30].

1. Considérons la surface hyperbolique de Véronèse, $\mathbb{E}^2(\sqrt{3})$ immergée dans $\mathbb{H}_2^4(1)$ et définie par

$$\varphi : \mathbb{E}^2(\sqrt{3}) \subset \mathbb{R}_1^3 \longrightarrow \mathbb{E}_2^4(1) \subset \mathbb{R}_3^5 \tag{1.24}$$
$$(x, y, z) \longmapsto (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \tag{1.25}$$

   où $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}yz, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}zx, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}xy, \quad u_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - y^2),$
   $u_5 = \frac{1}{6}(x^2 + y^2 + 2z^2).$
   et

$$\mathbb{E}_p^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_{p+1}^{m+1}, g(x,x) = x_1^2 + \ldots + x_{m-p}^2 - x_{m-p+1}^2 - \ldots - x_{m+1}^2 = -r^2\}.$$

   L'immersion isométrique φ définie une immersion maximale de $\mathbb{H}^2(\sqrt{3})$ dans $\mathbb{H}_2^4(1)$.

2. L'image de la sphère de dimension 2 quotientée par la relation d'antipodie (plan projectif réel), obtenue de l'application :

$$\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^6$$
$$\overline{(u,v,w)} \longmapsto (au^2, av^2, aw^2, avw, awu, auv)$$

où $u^2+v^2+w^2=1$, définit une surface maximale de Véronèse sans singularité plongée dans $\mathbb{R}^5$ (puisque la somme des trois premières coordonnées donne une constante. $x_1+x_2+x_3=a$).

Pour d'autres exemples de surfaces minimales ou maximales, on peut citer les catenoïdes et les surfaces d' Ennerper [34, 62].

CHAPITRE 2

APPLICATIONS DE LA TECHNIQUE DE BOCHNER

Dans cette partie nous donnons des applications de la technique de Bochner sur les formes harmoniques, les champs conformes et sur les sous-variétés de types espaces.

Soit (M, g) une variété semi-riemannienne connexe et orientée de dimension m, où g est une métrique semi-riemannienne de signature $(m-q, q)$. Soit $(x^1, \ldots, x^m)$ un système de coordonnées sur M. On note $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $\theta^i = dx^i$. L'expression de l'opérateur de Laplace-Beltrami [25, 49, 64, 65] agissant sur les formes différentielles en coordonnées locales est donnée par

$$\Delta = -g^{kl}\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_l} + g^{kl}\theta^j i_{\partial_k} R_{\partial_j \partial_l} \tag{2.1}$$

2.1 Formule de Weitzenböck

La formule de Weitzenböck donne la différence entre le laplacien fort $(\nabla^*\nabla)$ et le laplacien faible (ordinaire).

Définition 2.1.1 *[10, p.47].*
On appelle produit de Kulkarni de deux $(0,2)$-tenseurs symétriques h et k le $(0,4)$-tenseur noté $h \owedge k$ et défini par

$$h \owedge k(X,Y,Z,T) = h(X,Z)k(Y,T) + h(Y,T)k(X,Z) - h(Y,Z)k(X,T) - h(X,T)k(Y,Z)$$

Définition 2.1.2 .
On appelle produit de composition $\circ$ l'application définie pour tout $k \in \{2, \ldots, m\}$ par

$$\circ \ : \Omega^k(M) \times \Omega^4(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$$

$$(\phi, R) \longmapsto \phi \circ R$$

telle que pour $X_1, \ldots, X_k \in \chi(M)$.

$$\phi \circ R(X_1, \ldots, X_k) = \frac{1}{2} g^{is} g^{jl} \sum_{\sigma \in A} sign(\sigma) \phi(\partial_i, \partial_j, X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k-2)}) R(\partial_s, \partial_l, X_{\sigma(k-1)}, X_{\sigma(k)})$$

où A *est l'ensemble des permutations verifiant :* $A = \{\sigma; \sigma(1) < \ldots < \sigma(k-2)$ *et* $\sigma(k-1) < \sigma(k)\}$.

L'application $\circ$ définit une action à gauche de $\Omega^4(M)$ sur $\Omega^k(M)$ pour tout $k \geq 2$. De même $\circ$ est une action de l'ensemble des courbures de M sur $\Omega^k(M)$.

Théorème 2.1.1 .
Soit ϕ *une* k*-forme sur* M $(1 < k < dimM)$ *alors*

$$\Delta\phi = \nabla^* \nabla \phi + \phi \circ (\frac{1}{k-1} Ric \circledwedge g - 2R). \tag{2.2}$$

Pour $k = 0, 1, m$, *on a*

$$\Delta\phi = \nabla^* \nabla \phi + g^{ij} \theta^k \wedge i_{\partial_j} R_{\partial_k \partial_i} \phi \tag{2.3}$$

où

$$\nabla^* \nabla \phi = -g^{ij} \nabla_i \nabla_j \phi$$

R *la courbure de Riemann.*

La décomposition du tenseur de courbure sur les sous espaces irréductibles de l'ensemble des courbures sur (M, g) [10, p.48 formule 1.116] est donnée par

$$R = \frac{s}{2m(m-1)} g \circledwedge g + \frac{1}{m-1}(Ric - \frac{s}{m} g) \circledwedge g + w \tag{2.4}$$

où w est le tenseur de Weyl.

Corollaire 2.1.1 .
Soit (M, g) *une variété semi-riemannienne et* ϕ *une* k*-forme sur* M. *Alors*

$$\Delta\phi = \nabla^* \nabla \phi + \frac{k(k-1)s}{(m-1)(m-2)} \phi + \frac{m-2k}{(k-1)(m-2)} \phi \circ (Ric \circledwedge g) - 2\phi \circ w \tag{2.5}$$

Cette formule de Weitzenböck donne l'expression globale de la partie contenant les courbures Comme conséquence directe de la formule (2.5), les formes harmoniques auto-duales ou anti-auto-duales, par l'opérateur star de Hodge, d'une variété de dimension $2m$, ne dépendent que de la courbure scalaire s et du tenseur de Weyl w. Ainsi,

$$\Delta\phi = \nabla^* \nabla \phi + \frac{ms}{2(2m-1)} \phi - 2\phi \circ w \tag{2.6}$$

Les conséquences directes de ces formules sont données par les résultats suivants

2.2 Les formes harmoniques

Définition 2.2.1 .
Soit (M^m, g) une variété semi-riemannienne de dimension m. On dit que (M^m, g) est conformément plate si tout point de M^m admet un voisinage ouvert conforme à un ouvert euclidien.

Cette définition est équivalente à :

1. (M^m, g) est conformément plate s'il existe localement une fonction u de classe C^∞ telle que $e^u g$ soit une métrique plate.
2. Si $m \geq 4$, (M^m, g) est conformément plate si et seulement si le tenseur de Weyl, obtenu de la décomposition du tenseur de courbure, est nul.

Pour les cas particuliers des variétés riemanniennes, nous avons

Théorème 2.2.1 .
Soit (M, g) une variété riemannienne compacte conformément plate de dimension $2m$ $(m \geq 2)$. Si M admet une courbure scalaire positive et non nulle en tout point, alors le m^{ieme} groupe de cohomologie $H^m(M)$, est trivial $(H^m(M) = 0)$.

Preuve
Soit ϕ une m-forme harmonique sur M^{2m}. En applicant ϕ à l' équation (2.6) on obtient

$$|\nabla\phi|^2 + \frac{ms}{2(2m-1)}|\phi|^2 = 0, \tag{2.7}$$

ce qui nous donne $\phi = 0$ □

Théorème 2.2.2 .
Soit (M, g) une variété riemannienne d'Einstein compacte de dimension $m(m \geq 2)$. Si M admet une courbure scalaire positive et non nulle en tout point, alors $H^k(M) = 0$ $(0 < k < m)$.

Preuve
Si M est une variété d'Einstein $(R = \frac{s}{2m(m-1)} g \owedge g)$ alors l'équation (2.2) devient

$$\Delta\phi = \nabla^*\nabla\phi + \frac{k(m-k)s}{2m(m-1)}\phi \tag{2.8}$$

pour tout k-forme $(0 < k < m)$.
On suppose que ϕ est harmonique sur M^m, le produit de ϕ par l' équation (2.8) donne

$$|\nabla\phi|^2 + \frac{k(m-k)s}{2m(m-1)}|\phi|^2 = 0. \tag{2.9}$$

Donc $\phi = 0$ □

Théorème 2.2.3 .
Soit (M,g) une variété semi-riemannienne compacte connexe et orientée. S'il existe sur (M,g) une 1-forme harmonique parallèle, alors la courbure de Ricci de (M,g) est indéfinie.

Preuve
De l' équation (2.3), on a

$$-\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = \frac{1}{2}div(\nabla|\phi|^2) = g^{ji} < \nabla_{\partial_j}\phi, \nabla_{\partial_i}\phi > + Ric(\phi^{\#}, \phi^{\#}).$$

En intégrant on obtient

$$-\frac{1}{2}\int_M div(\nabla|\phi|^2)v_M = \int_M g^{ji} < \nabla_{\partial_j}\phi, \nabla_{\partial_i}\phi > v_M + \int_M Ric(\phi^{\#}, \phi^{\#})v_M$$

où v_M est l'élément de volume sur (M,g). En applicant le théorème de Stokes on obtient

$$0 = \int_M g^{ji} < \nabla_{\partial_j}\phi, \nabla_{\partial_i}\phi > v_M + \int_M Ric(\phi^{\#}, \phi^{\#})v_M.$$

Si ϕ est parallèle ($\nabla_{\partial_i}\phi = 0 \ \forall i = 1, ..., m$). alors

$$\int_M Ric(\phi^{\#}, \phi^{\#})v_M = 0. \tag{2.10}$$

On en déduit le résultat. □

Corollaire 2.2.1 .
Soit (M,g) une variété semi-riemannienne compacte connexe et orientée
Si (M,g) est une variété d' Einstein avec $Ric = cg$ et $c \neq 0$, alors la 1-forme harmonique ϕ parallèle vérifie l'une des conditions suivantes :

a) ϕ est isotrope ($g(\phi^{\#}, \phi^{\#}) = 0$ avec $\phi \neq 0$)

b) Le signe de $g(\phi^{\#}, \phi^{\#})$ n'est pas constant.

La preuve vient de l'équation (2.10).

2.3 Champ de vecteurs conformes

L' étude de la technique de Bochner sur les champs de vecteurs a permis d'établir des théorèmes d'annulation et d'obstruction. Le résultat originel de cette théorie vient de S. Bochner[12]. Ce dernier montre qu'il n'existe pas de champ de Killing non nul sur une variété riemannienne connexe à courbure définie négative [13]. Une conséquence de ce résultat est que le groupe, $Iso(M)$ des isométries de la variété M, est fini. Rappelons que le groupe des isométries est le groupe de Lie dont l'algèbre s'identifie à l'algèbre des champs de vecteurs

de Killing complets.
Soit X un champ de vecteurs sur M. En posant $A_X v = -\nabla_v X$ et $A_X^2 v = \nabla_{\nabla_v X} X$ pour $v \in T_p M$ et $p \in M$. On montre que (voir [33]).

$$Xdiv(X) = -Ric(X,X) + div(\nabla_X X) - trace(A_X^2). \tag{2.11}$$

Cette relation est celle utilisée pour l'approche intégrale de la technique de Bochner en géométrie semi-riemannienne.
Soit X est un champ de vecteurs de Killing (voir définition 1.2.2), on a

$$div(X) = 0, \quad trace(A_X^2) = -|\nabla X|^2, \quad \text{et} \quad div(\nabla_X X) = \frac{1}{2}\Delta |X|^2,$$

ce qui donne finalement

$$-\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = -\sum_{i=1}^{q} |\nabla_{\partial_i} X|^2 + \sum_{i=q+1}^{m} |\nabla_{\partial_i} X|^2 - Ric(X,X), \tag{2.12}$$

où $|X|^2 = g(X,X)$

Proposition 2.3.1 .
Soit X un champ de vecteurs sur (M,g), alors on a

$$div(A_X X - Xdiv X) = Ric(X,X) + trace(A_X^2) - (trace(A_X))^2 \tag{2.13}$$

Preuve
Pour établir cette formule il suffit de voir que

$$div((div(X))X) = Xdiv(X) + (div X)^2 \quad \text{et} \quad div(X) = -trace(A_X)$$

On combine ces formules dans la relation (2.11), pour obtenir le résultat.

Théorème 2.3.1 .
Soit (M,g) une variété lorentzienne compacte et v_M son élément de volume. Soit X un champ de vecteurs de Killing sur M tel que

a) $\int_M Ric(X,X) v_M \leq 0$ *et*

b) $\nabla_{\partial_1} X = 0$ *(∂_1 est un vecteur unitaire de type temps)*

alors X est parallèle.
De plus si $Ric(X,X) < 0$, il n'existe pas de champ de vecteurs de Killing qui soit parallèle dans la direction d'un vecteur de type temps.

Preuve
Soit (M,g) une variété lorentzienne compacte. En applicant le théorème de la divergence à la relation (2.13), on a pour tout $X \in \Gamma(TM)$

$$\int_M \{Ric(X,X) + trace(A_X^2) - (trace(A_X))^2\} v_M = 0 \tag{2.14}$$

Si X est un champ de vecteurs de Killing alors $trace A_X = div X = 0$ et

$$\int_M \{Ric(X,X) + trace(A_X^2)\} v_M = 0 \tag{2.15}$$

En développant cette relation on a

$$0 = -2\sum_{i=2}^{m} \int_M (< \nabla_{\partial_1} X, \partial_i >)^2 v_M + \sum_{i,j=2}^{m} \int_M (< \nabla_{\partial_i} X, \partial_j >)^2 v_M$$

$$- \int_M Ric(X,X) v_M. \tag{2.16}$$

Si $\nabla_{\partial_1} X = 0$ alors

$$0 = \sum_{i,j=2}^{m} \int_M (< \nabla_{\partial_i} X. \partial_j >)^2 v_M - \int_M Ric(X,X) v_M.$$

Puisque $Ric(X.X) \leq 0$ donc $\nabla_{\partial_i} X = 0$ et $Ric(X,X) = 0$, d'où X est parallèle.
Si de plus $Ric(X,X) < 0$, on obtient une contradiction. □

Corollaire 2.3.1 .
Soit (M,g) une variété lorentzienne compacte d'Einstein avec $Ric = cg$.

1. *Si $c < o$, alors il n'existe pas de champ de vecteurs de Killing de type espace qui soit parallèle suivant un vecteur de type temps.*
2. *Si $c > 0$, alors il n'existe pas de champs de vecteurs de Killing de type temps parallèle suivant un vecteur de type temps.*
3. *Tout champ de vecteurs de Killing isotrope parallèle, dans la direction d'un vecteur de type temps, est parallèle.*

La preuve découle directement du théorème 2.3.1

Corollaire 2.3.2 *voir aussi [53, théorème].*
Soit (M,g) une variété lorentzienne compacte et soit Z un champ de vecteurs tel que $|Z| = -1$. Si $s_Z = trace(A_Z^2) - (trace(A_Z))^2 \leq 0$, alors

$$\int_M \{Ric(Z,Z)\} v_M \geq 0. \tag{2.17}$$

L'égalité est réalisée si Z est parallèle

La preuve découle de la relation (2.14).

Corollaire 2.3.3 .

Soient (M,g) une variété lorentzienne, et Z un champ de vecteurs de Killing tel que $|Z| = -1$ alors,

$$Ric(Z,Z) \geq 0 \tag{2.18}$$

De plus, il y a égalité si Z est parallèle.

Preuve

Si Z est un champ de vecteurs de Killing et $|Z| = -1$ alors l'équation (2.12) devient

$$0 = |\nabla Z|^2 - Ric(Z,Z) \tag{2.19}$$

et comme ∇Z est de type espace alors on a $Ric(Z,Z) \geq 0$ □

Remarque 2.3.1 .

Soient (M,g) une variété lorentzienne orientée et Z un champ de vecteurs tel que $|Z| = -1$ (champ de reférence). En relativité générale le flot engendré par un tel vecteur est appélé un observable. Dans le cas où Z est un champ de vecteur géodésique ($\nabla_Z Z = 0$). il est appélé champ de repère de chute libre, et il est considéré comme un observable qui n'influence pas le mouvement du système [7] rélativité générale .
Les champs de vecteurs de Killing (conforme) ne sont pas intéressants seulement qu'en physique. On peut noter contrairement au cas riemannien que si (M,g) est une variété lorentzienne (semi-riemannienne) compacte, le groupe des isométriques $Iso(M,g)$ n'est pas toujours compact comme nous l'avons énuméré. en exemple 2, à l'introduction.

Cependant, si (M,g) est une variété compacte lorentzienne admettant un champ de Killing qui en un point est de type temps et que $Iso(M,g)$ est de dimension un, alors $Iso(M,g)$ est compact [17]. Ainsi la caractérisation des champs de vecteurs de Killing de type temps est alors nécessaire. Il en ait de même pour les champs de vecteurs conformes de type temps. Il faut noter que si X est un champ de vecteurs conforme de type temps pour une variété lorentzienne (M,g) alors X est un champ de Killing unitaire de type temps pour la variété lorenzienne (M,g^*) où $g^* = \dfrac{-1}{g(X,X)}g$.

Théorème 2.3.2 .

Soit (M,g) une variété lorentzienne de dimension m et X un champ de vecteurs de Killing tel que $|X| = -1$. Si $Ric(X,X) \leq 0$ alors X est parallèle.

De plus, il n'existe pas de champ de Killing X tel que $|X| = -1$ et $Ric(X,X) < 0$.

Preuve
Considérons la relation (2.12), comme $|X|$ est constante on a,

$$0 = |\nabla X|^2 - Ric(X, X). \tag{2.20}$$

Si $Ric(X, X) \leq 0$, alors $\nabla X = 0$ car $|\nabla X|^2 = trace((A'_X)^2)$. Donc X est parallèle.
De plus si $Ric(X, X) < 0$, alors l'équation (2.20) n'admet pas de solution. □

Théorème 2.3.3 (Romero-Sànchez) *[51]*
Soit (M, g) une variété lorentzienne connexe et compacte à courbure de Ricci plate admettant un champ de vecteurs de Killing K, de type temps. Alors K est parallèle, le premier nombre de Betti de M est non nul et la connexion de Levi-Civita de g est riemannienne.
De plus, (M, g) est isométrique au m-tore plat,(ou à son revêtement), si l'une des trois conditions suivantes est réalisée.

(1) (M, g) est homogène.
(2) (M, g) est plat.
(3) $m \leq 4$

2.4 Sous-variétés maximales et compactes de type espace d'une variété semi-riemannienne à courbure constante

Une question intéressante qu'on se pose en géométrie des sous-variétés, est celle de la rigidité des sous-variétés minimales ou maximales, selon les cas (énumérés dans le premier chapitre). Ainsi, on montre que sous des conditions de pincement de la courbure, les sous-variétés minimales ou maximales deviennent totalement géodésiques. Dans les deux cas de nombreux travaux ont été effectués.

Deshmukh [19] a étudié les sous-variétés compactes et minimales des sphères riemanniennes, S^{m+p}, à courbure scalaire constante, $s > m(m-2)$. Pour $p \leq 2$ il montre que ces sous-variétés sont totalement géodésiques. Pour le cas $p \geq 2$ il obtient des résultats similaires en ajoutant des conditions sur la courbure normale. De même il montre que les sous-variétés minimales non totalement géodésiques, ont une courbure scalaire comprise entre $m(m-p-1)(>0)$ et $m(m-2)$.
D'autres études ont été faites sur ces sous-variétés minimales par Chern-Do Carmo-Kobayashi[15], Lawson[38]....

Cependant, sans aucune hypothèse sur la courbure, on montre que les sous-variétés compactes et maximales de type espace M^m, d'une variété pseudo-riemannienne M_p^{m+p}, à courbure constante, sont totalement géodésiques. T. Ishihara [30] va plus loins en montrant ce résultat pour les sous-variétés de type espace complètes. Ces résultats répresentent une généralisation des résultats de Cheng et Yau qui ont montré que les hypersurfaces complètes de type espace de l'espace de Minkowski de dimension $(m+1)$ sont totalement géodésiques.

On applique la technique de Bochner pour montrer que les sous-variétés maximales compactes de type espace de dimension m de la variété $M_p^{m+p}(c)$ à courbure constante $c \geq 0$ sont isométriques à la sphère S^m.
Soit (M^m, g) une sous-variété compacte (fermée) et maximale de dimension m, d'une variété semi-riemannienne $(\overline{M}_p^{m+p}(c), \overline{g})$ à courbure constante c, de dimension $(m+p)$ et d'indice p. On note $\overline{\nabla}$ et ∇ les connexions respectives de $(\overline{M}_p^{m+p}(c), \overline{g})$ et de (M^m, g).

Considérons les relations (1.20) et (1.21). L' opérateur de forme de Weingarten A_N correspondant au champ de vecteurs normal N satisfait

$$\overline{g}(A_N X, Y) = \overline{g}(h(X,Y), N) \quad X, Y \in \Gamma(TM), N \in \Gamma(TM^\perp)$$

où h est la seconde forme fondamentale.

Pour la sous-variété M, les relations de Gauss, Codazzi. et de Ricci sont respectivement.

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} - A_{h(Y,Z)}X - A_{h(X,Z)}Y && (2.21)\\ (\nabla h)(X,Y,Z) &= (\nabla h)(Y,Z,X)\text{et} && (2.22)\\ R^\perp(X,Y,N_1,N_2) &= g([A_{N_1}, A_{N_2}]X,Y) && (2.23) \end{aligned}$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ $N_1, N_2 \in \Gamma(TM^\perp)$ et où R et $R^\perp$ sont les tenseurs de courbure des connexions ∇ et ∇^t respectivement avec

$$\begin{aligned} (\nabla h)(X,Y,Z) &= \nabla_X^t h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)\\ (\nabla^2 h)(X,Y,Z,W) &= \nabla_X^t(\nabla h)(Y,Z,W) - (\nabla h)(\nabla_X Y, Z, W) -\\ &\quad -(\nabla h)(Y, \nabla_X Z, W) - (\nabla h)(Y, Z, \nabla_X W) \end{aligned}$$

où $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

L'identité de Ricci s' écrit alors

$$\begin{aligned} &(\nabla^2 h)(X,Y,Z,W) - (\nabla^2 h)(Y,X,Z,W) && (2.24)\\ &= R^\perp(X,Y)h(Z,W) - h(R(X,Y)Z,W) - h(Z,R(X,Y)W). \end{aligned}$$

On suppose que $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ est un système de coordonnées orthonormées de M.

Comme M est maximale alors,

$$g^{ij}h(\partial_i, \partial_j) = 0; \quad g^{ij}(\nabla h)(X, \partial_i, \partial_j) = 0; \quad g^{ij}(\nabla^2 h)(X, Y, \partial_i, \partial_j) = 0 \qquad (2.25)$$

Proposition 2.4.1 .
Soit (M^m, g) une sous-variété maximale de type espace de dimension m d'une variété semi-riemannienne à courbure constante c. Alors

$$\frac{1}{2}\Delta||h||^2 = ||\nabla h||^2 + g^{ij}g^{kl}g^{sn}[R^{\perp}(\partial_s, \partial_i, h(\partial_k, \partial_n), h(\partial_j, \partial_l)) - R(\partial_s, \partial_i, \partial_k, A_{h(\partial_j,\partial_l)}\partial_n)] + g^{ij}g^{kl}Ric(\partial_i, A_{h(\partial_j,\partial_k)}\partial_l) \tag{2.26}$$

où $||h|| = g^{ij}g^{kl}\overline{g}(h(\partial_i, \partial_k)h(\partial_j, \partial_l))$

Preuve

Soit f une fonction définie sur M par $f = \frac{1}{2}||h||^2$, alors

$$\Delta f = g^{il}g^{jn}g^{ks}\{\overline{g}((\nabla^2 h)(\partial_k, \partial_s, \partial_i, \partial_j), h(\partial_l, \partial_n))\} + ||\nabla h||^2.$$

En utilisant l'identité de Ricci (2.24), les équations (2.22) et (2.25), on obtient,

$$\begin{aligned}\Delta f &= ||\nabla h||^2 + g^{ij}g^{ki}g^{sn}[R^{\perp}(\partial_s, \partial_i, h(\partial_k, \partial_n), h(\partial_j, \partial_l)) - \\ &\quad R(\partial_s, \partial_i, \partial_k, A_{h(\partial_j,\partial_l)}\partial_n)] + g^{ij}g^{kl}Ric(\partial_i, A_{h(\partial_j,\partial_k)}\partial_l)\end{aligned} \quad \square$$

La relation (2.26) reste aussi vraie dans le cas des sous-variétés minimales. Soient maintenant $K^{\perp}$ et ϕ deux fonctions définies sur M par

$$\begin{aligned}K^{\perp} &= \sum_{i,j,\alpha,\beta}(R^{\perp}(\partial_i, \partial_j, N_\alpha, N_\beta))^2 \\ \phi &= 2\sum_{\alpha<\beta}||A_\alpha||^2||A_\beta||^2\end{aligned}$$

où $\{N_\alpha\}$ est un système de vecteurs normaux et $A_\alpha = A_{N_\alpha}$.

Proposition 2.4.2 .
Soit M^n une sous-variété compacte et maximale de dimension m d'une variété semi-Riemannienne de dimension $(m+p)$ à courbure constante. Alors,

$$\Delta(\frac{1}{2}||h||^2) = ||\nabla h||^2 + (mc - ||h||^2)||h||^2 + (\phi - K^{\perp}) \tag{2.27}$$

Cette équation est celle utilisée dans le cas des sous-variétés riemanniennes minimales [19].

Théorème 2.4.1 *[19, Sharief].*
Soit (M^m, g) une sous-variété riemannienne compacte et minimale de dimension m d'une variété riemannienne de dimension $(m-p)$ à courbure constante c. Si la courbure scalaire s et la courbure normale $K^{\perp}$ de M satisfont respectivement à $s \geq m(m-2)c$ et à $K^{\perp} \leq \phi$, alors M est totalement géodésique.

Preuve
Considérons les relations (5.11) et (2.27). Puisque $s > m(m-2)c$ alors $mc - ||h||^2 \geq 0$ et $K^{\perp} \leq \phi$. Donc $\Delta||h||^2 \geq 0$ d'après le principe de maximun de Hopf, la fonction $||h||^2$ est alors constante. Donc $\Delta||h||^2 = 0$. Ce qui donne $||\nabla h||^2 + (mc - ||h||^2)||h||^2 = 0$, par conséquent $h = 0$ □

Dans le cas des variétés semi-riemanniennes, on a considère le résultat suivant.

Proposition 2.4.3 .
Soit M une sous-variété compacte maximale de dimension m d'une variété semi-riemannienne de dimension $(m+p)$ à courbure constante c. Alors,

$$\Delta(\frac{1}{2}||h||^2) = ||\nabla h||^2 + mc||h||^2 - ||A_h||^2 - \sum_{\alpha\beta} ||A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha||^2 \tag{2.28}$$

Cette relation est très facile à manipuler en semi-riemannienne et elle se déduit facilement de (2.27)(et vice versa). Pour la preuve on peut voir [19, Sharief].

Théorème 2.4.2 .
Soit (M^n, g) une sous-variété compacte et maximale de type espace de dimension m d'une variété semi-Riemannienne $(\overline{M}_p^{m+p}(c), \overline{g})$ de dimension $(m+p)$ et à courbure constante positive c. Alors (M^m, g) est totalement géodésique.

Preuve
Considérons la relation (2.28), puisque nous avons par ailleurs

$$||\nabla h||^2 + n||h||^2 \leq 0$$

et

$$||A_h||^2 + \sum_{\alpha\beta} ||A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha||^2 \geq 0,$$

alors

$$-\Delta||h||^2 \geq 0.$$

D'après le principe de maximum $||h||$ est une fonction constante et par conséquent,

$$||\nabla h||^2 + m||h||^2 - ||A_h||^2 - \sum_{\alpha\beta} ||A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha||^2 = 0.$$

D' où $h = 0$ □

Théorème 2.4.3 .
Soit $\psi : M^m \longrightarrow S_p^{m+p}$ une immersion maximale d'une sous-variété compacte de type espace dans l'espace de de Sitter S_p^{m+p}.
Alors $\psi(M^m)$ est la sphère S^m.

La preuve découle du théorème 2.4.2.

Remarque 2.4.1 .
Dans le théorème précédent on avait considéré une variété semi-riemannienne dont l'indice est égale à la codimension de la sous-variété considérée. Dans le cas général , il n'est pas aisé d'utiliser les relations (2.27) et (2.28) pour obtenir le même résultat. Dans ce cas on peut introduire le premier espace normal N_1.

Définition 2.4.1 .
Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (\overline{M}_p^{m+p}(c), \overline{g})$ *une immersion isométrique, on appelle premier espace normal de* φ *en un point* x*, le sous-espace* $N_1(x)$ *de* $T_x^{\perp}M$ *engendré par la seconde forme fondamentale* h.

$$N_1(x) = \{h(X, Y) : \quad X, Y \in T_xM \ \} \tag{2.29}$$

Théorème 2.4.4 .
Soit (M^m, g) *une sous-variété compacte de type espace et de dimension* m*, d'une variété semi-riemannienne* $(\overline{M}_q^{m+p}(c), \overline{g})$ *de dimension* $(m+p)$ *et d'indice* $(q \leq p)$.
Supposons que N_1 *est une distribution parallèle de rang constant de type temps, si* (M^m, g) *est une sous-variété maximale alors* (M^m, g) *est totalement géodésique.*

Preuve
Considérons la distribution N_1 de type temps. De la relation (2.28), nous avons

$$||\nabla h||^2 + m||h||^2 \leq 0$$

et

$$||A_h||^2 + \sum_{\alpha\beta} ||A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha||^2 \geq 0,$$

ce qui nous donne

$$-\Delta||h||^2 \geq 0.$$

D'après le principe de maximum $||h||$ est une fonction constante. D'où $h = 0$.□
D'autres caractérisations des sous-variétés complètes et maximales de type espace des variétés semi-riemanniennes sont l'oeuvre de T. Ishihara [30] et Nishikawa [44]. En effet si on pose $S = ||h||$, alors on a

Théorème 2.4.5 .
Soit (M^m, g) *une sous-variété complète et maximale de type espace de la variété semi-riemannienne* $M_p^{m+p}(-c)$ *de dimension* $(m+p)$*, d'indice* p *et à courbure constante* $c > 0$.
Alors nous avons $0 \leq S \leq mp$

Corollaire 2.4.1 .
Les sous-variétés

$$\mathbb{H}_{m_1,\ldots,m_{p+1}} = \mathbb{H}^{m_1}(\sqrt{m_1/m}) \times \ldots \times \mathbb{H}^{m_{p+1}}(\sqrt{m_{p+1}/m})$$

sont les seules sous-variétés, de $\mathbb{H}_p^{m-p}$*, complètes, connexes et maximales de type espace, qui soient telles que* $S = mp$

CHAPITRE 3

OPÉRATEUR DE TYPE STAR DE HODGE SUR LES HYPERSURFACES DÉGÉNÉRÉES

Dans ce chapitre nous nous proposons de construire des opérateurs tels que le star de Hodge, la codifférentielle, le laplacien etc, pour les hypersurfaces dégénérées. Pour la construction de ces opérateurs il sera introduit l' élément de volume sur ces hypersurfaces en suivant Sach et Wu [56].

3.1 Quelques résultats de la géométrie des hypersurfaces dégénérées

Soit $(\overline{M}, \overline{g})$ une variété semi-riemannienne de dimension $(m+2)$ et d'indice $q \in \{1, \ldots m+1\}$ et M une hypersurface de $(\overline{M}, \overline{g})$.

Pour tout $x \in M$, on note

$$T_xM^{\perp} = \left\{X_x \in T_x\overline{M}, \overline{g}_x(X_x, Y_x) = 0, \quad \forall Y_x \in T_xM\right\},$$

et

$$Rad(T_xM) = T_xM \cap T_xM^{\perp}.$$

On dira que M est une hypersurface dégénérée si l'application $x \longmapsto Rad(T_xM)$ est une distribution de rang 1 sur M. Cette distribution est appelée distribution radicale du fibré tangent TM et on le note $Rad(TM)$.

La métrique semi-riemannienne $\overline{g}$ induit sur M une métrique dégénérée g telle que

$$g(X, \xi) = 0 \qquad \forall X \in T_xM, \xi \in Rad(T_xM) \qquad \text{pour tout} \quad x \in M.$$

Proposition 3.1.1 *[21].*

Soit (M, g) une hypersurface dégénérée d'une variété semi-riemannienne $(\overline{M}, \overline{g})$, de dimension $(m+2)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *M est une hypersurface dégénérée de $\overline{M}$*

2. *g est de rang constant m sur M*
3. *$TM^{\perp} = \cup_{x\in M} T_xM^{\perp}$ est une distribution sur M.*

On note $S(TM)$ le complémentaire de $Rad(TM)$ dans TM, on a

$$TM = S(TM) \perp TM^{\perp} \tag{3.1}$$

Pour tout x de M, $S(T_xM)$ est appelé le sous-espace écran ("screen") de T_xM et la distribution $S(TM)$ est appelée distribution écran. Elle existe toujours pour M paracompacte. Le fibré $S(TM)$ est non dégénéré. En particulier il est riemannien si $(\overline{M}, \overline{g})$ est lorentzienne.

Le fibré $S(TM)$ joue un rôle très important dans la géométrie des hypersurfaces dégénérées. Pour cela on les note $(M, g, S(TM))$, (vior [21, p.79]). Le principe de normalisation suivant dû à Duggal et Bejancu [21, p.79] est maintenant bien connu.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de M. On considère une section ξ, du fibré normal $TM^{\perp}$, définie sur $\mathcal{U}$. Il existe un unique fibré vectoriel $tr(TM)$ de rang 1 au dessus de M et une unique section N de $tr(TM)$ définie sur $\mathcal{U}$ tels que

$$\overline{g}(\xi, N) = 1, \quad \overline{g}(N, N) = \overline{g}(W, N) = 0, \quad \forall\ W \in \Gamma(S(TM)). \tag{3.2}$$

Soit $\mathcal{U}'$ un ouvert de M tel que $\mathcal{U}' \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. alors il existe une fonction $\alpha > 0$ de classe C^{∞} telle que la section ξ', du fibré normal $TM^{\perp}$, définie sur $\mathcal{U}'$ et la section N', du fibré transverse définie sur $\mathcal{U}'$ soient liées par les relations

$$\xi' = \alpha\xi \qquad \text{et} \qquad N' = \frac{1}{\alpha}N. \tag{3.3}$$

Le fibré $T\overline{M}$ se décompose comme suit

$$T\overline{M}|_{\mathcal{U}} = TM \oplus tr(TM) \tag{3.4}$$

et

$$T\overline{M}|_{\mathcal{U}} = S(TM) \perp (TM^{\perp} \oplus tr(TM)).$$

En général la distribution écran $S(TM)$ n'est pas unique et la géométrie des sous-variétés dégénérées dépend du son choix. En effet donnons nous un autre fibré écran $S(TM)'$. On considère $\{W_i\}$ un système orthonormal de $S(TM)$, $\{W_i'\}$ le système orthonormal associé à $S(TM)'$ et N' la section de normalisation dans $tr(TM)'$. Alors

$$N' = N + \frac{1}{2}\{\sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i (c_i)^2\}\xi + \sum_i c_i W_i \tag{3.5}$$

$$W_i' = \sum_{j=1}^{m-1} A_i^j (W_j - \varepsilon_j c_j \xi) \tag{3.6}$$

avec $\xi \in \Gamma(TM^{\perp}|_{\mathcal{U}})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ où c_i et A_i^j sont des fonctions définies sur $\mathcal{U}$ et $\varepsilon_i = g(W_i, W_i)$. Ce changement de coordonnées sera considéré toutes les fois qu'on serait amené à faire un changement de distribution écran.

3.2 Elément de volume sur une hypersurface dégénérée

Soient $(M, g, S(TM))$ une sous-variété dégénérée de dimension m d'une variété semi-riemannienne orientée $(\overline{M}, \overline{g})$ de dimension $(m+p)$ et $i : M \longrightarrow \overline{M}$ une immersion isométrique. On suppose qu'il existe une submersion. $f : \overline{M} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ (le rang du jacobien de f est constant en tout point de $\overline{M}$ et égal à p) telle qu'il existe un point $a \in \mathbb{R}^p$ qui donne $f^{-1}(a) = M$.

Posons $f = (f_1, \ldots, f_p)$ et $w = df_1 \wedge df_2 \wedge df_3 \wedge \ldots \wedge df_p$ une p-forme, puisque le jacobien est de rang constant p alors w est non nulle en tout point de M. De plus il existe sur $\overline{M}$ une m-forme η telle que

$$(w \wedge \eta)(x) = v_{\overline{M}}(x), \quad x \in M \tag{3.7}$$

où $v_{\overline{M}}$ est l' élément de volume sur $\overline{M}$

Proposition 3.2.1 .
S'il existe une m-forme η sur $\overline{M}$ telle que

$$(w \wedge \eta)(x) = v_{\overline{M}}(x), \quad x \in M,$$

alors la m-forme de volume v_M sur M est caractérisée par

$$v_M(x) = i^*(\eta)(x)$$

Preuve

1. Existence de η
   On peut prendre
   $$\eta = v_{\overline{M}}((df_1)^{\#}, \ldots, (df_p)^{\#})$$
   $(df_i)^{\#}$ est un champ de vecteurs tel que $df_i((df_j)^{\#}) = \delta_{ij}$. Le champ de vecteurs $(df_i)^{\#}$ est obtenu facilement (chapitre 1) pour le cas des métriques non dégénérées. Pour le cas considéré ici, des métriques dégénérées, on utilise la normalisation de Duggal et Bejancu donnée par la relation (3.2).

2. Unicté de v_M
   On suppose qu'il existe η et η' qui vérifient l' équation
   $$W \wedge \eta = W \wedge \eta' = v_{\overline{M}}$$

alors

$$W \wedge (\eta - \eta') = 0, \qquad \eta - \eta' = W \wedge \gamma$$

où γ est une $(m-p)$-forme sur M.

Soit X un champ de vecteurs sur M, $W(X) = 0$. Ainsi

$$i^*\eta = i^*\eta' = v_M.$$

L' élément de volume v_M est intrinsèque.

Exemple 3.2.1 .

On considère l' hypersurface dégénérée de Monge (M, g) définie par la relation

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{R}^4_1, \bar{g}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x^0, x^1, x^2, x^3) & \longmapsto & x^0 - F(x^1, x^2, x^3) \end{array}$$

où

$$(F_1')^2 - (F_2')^2 + (F_3')^2 = 1, \ F_i' = \frac{\partial F}{\partial x^i} \tag{3.8}$$

$M = f^{-1}(\{0\})$ alors

$$W = df = -dx^0 - F_1'dx^1 - F_2'dx^2 - F_3'dx^3$$

est non nulle en tout point $x \in M$. Soit η une 3-forme telle que $W \wedge \eta = v_{\bar{M}} = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. On suppose que $\eta = a_{ijk}\, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$, alors $a_{123} + F_1'a_{023} - F_2'a_{013} + F_3'a_{012} = 1$ et

$$i^*\eta = du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 = v_M$$

où

$$\begin{array}{rcl} i : (M, g & \longrightarrow & (\mathbb{R}^4_1, \bar{g}) \\ (u^1, u^2, u^3 & \longmapsto & (F(u^1, u^2, u^3), u^1, u^2, u^3) \end{array}$$

Comme cas particulier, si on prend

$$F(u^1, u^2, u^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^1 \cos t + u^2 \sin t + u^3) \quad t \in \mathbb{R}$$

alors

$$w = -dx^0 + \cos t dx^1 + \sin t dx^2 + dx^3$$

et

$$\eta = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \cos t dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \sin t dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$

Pour un exemple sur le cône de lumière (voir R. Sachs et H. Wu [56, pg 148]).

3.3 Algèbre des formes différentielles sur les hypersurfaces dégénérées

Soit $(M, g, S(TM))$ une hypersurface dégénérée d'une variété semi-riemannienne $(\overline{M}, \overline{g})$ de dimension $(m+2)$. Considérons la relation (3.2), on définit sur $\mathcal{U}$ une 1-forme θ par

$$\theta(X) = \overline{g}(N, X). \tag{3.9}$$

On montre que θ est une section de $Rad(TM)^*$, duale algébrique de $Rad(TM)$. C'est à dire $\theta(\xi) = 1$, $\theta(X) = 0$, pour tout autre $X \in \Gamma(TM)$. Si $\mathcal{U}'$ est un autre ouvert d'intersection avec $\mathcal{U}$ non vide, alors d'après la relation (3.3) on a $\theta' = \alpha^{-1}\theta$.

On a alors la décomposition duale de la relation (3.1)

$$T^*M = S(TM)^* \perp Rad(TM)^*.$$

Remarque 3.3.1 .
Puisque $S(TM)$ est non dégénérée, alors pour tout $x \in M$ la restriction h_x de g_x sur $S(T_xM)$ est non dégénérée. Ainsi pour tout $X \in \Gamma(S(TM))$, $h(X, X) \neq 0$.
On peut définir l'isomorphisme donnant la construction de $S(TM)^*$

$$\begin{array}{rccc} b: & S(T_xM) & \longrightarrow & S(T_xM)^* \\ & X & \longmapsto & X^b = h(X, .). \end{array}$$

On peut construire ainsi l'algèbre des formes différentielles sur $S(TM)$.

On note $\Omega^k(S(TM))$, l'ensemble des k-formes de $S(TM)$ définie sur M comme suit

$$\begin{array}{rcl} \overline{\pi}: \Omega^k M & \longrightarrow & \Omega^k S(TM) \\ \alpha & \longmapsto & \overline{\pi}\alpha = \alpha - \theta \wedge i_\xi \alpha. \end{array}$$

On désigne par $\Omega^* S(TM)$ l'algèbre graduée des formes differentielles sur $S(TM)$
$(\ \Omega^*(S(TM)) = \cup_{0 \leq k \leq n} \Omega^k(S(TM)))$.
L'algèbre graduée $\Omega^*(M)$ se décompose sur M comme suit

$$\Omega^* M = \Omega^* S(TM) \oplus \Omega^*_\theta Z \tag{3.10}$$

où $\Omega^k_\theta Z = \{\theta \wedge \beta : \quad \beta \in \Omega^{k-1} S(TM)\}$.
Alors $\qquad \Omega^k_\theta Z \equiv \Omega^{k-1} S(TM)$, et $\Omega^0_\theta Z := \{0\}$ $\forall k \geq 1$.
Notons aussi h l'extension de h sur l'algèbre graduée $\Omega^* S(TM)$ et définissons sur $\Omega^k_\theta Z$, une forme bilinéaire ρ par

$$\rho(\alpha, \beta) := h(i_\xi \alpha, i_\xi \beta) \qquad \alpha, \beta \in \Omega^k_\theta Z \quad k \geq 2. \tag{3.11}$$

$$\rho(\alpha, \beta) := i_\xi \alpha i_\xi \beta \qquad \alpha, \beta \in \Omega^1_\theta Z. \tag{3.12}$$

Sur les formes à support compact de $\Omega^*(M)$, nous définissons le produit scalaire,

$$(\alpha,\beta)=\int_M (h(\overline{\pi}\alpha.\overline{\pi}\beta)+\rho(\overline{\pi}'\alpha,\overline{\pi}'\beta))v_M \quad . \tag{3.13}$$

où $\overline{\pi}' : \Omega^k M \longrightarrow \Omega^k Z$. Si $S(TM)$ est riemannien alors le produit scalaire $(.,.)$ est défini positif.

Définissons sur $S(TM)$ l'opérateur différentiel. $d^{ST(M)}$ comme restriction de la différentielle extérieure d à $S(TM)$.

$$\begin{aligned} d^{S(TM)} : \Omega^k S(TM) &\longrightarrow \Omega^{k+1} S(TM) \\ \alpha &\longmapsto d\alpha - \theta\wedge i_\xi d\alpha \end{aligned} \tag{3.14}$$

Proposition 3.3.1 *Si $S(TM)$ est une distribution intégrable alors la différentielle extérieure $d^{ST(M)}$, vérifie*

$$d^{ST(M)}\circ d^{ST(M)}=0.$$

Lemme 3.3.1 .
La distribution $S(TM)$ est intégrable si et seulement si

$$d\theta=0. \quad ou \quad d\theta=\theta\wedge\gamma$$

où γ est une 1-forme sur $S(TM)$.

Preuve de la proposition 3.3.1
Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} d^{ST(M)}\circ d^{ST(M)}(\alpha) &= d^{ST(M)}\left(d^{ST(M)}\alpha\right) \\ &= -d\theta\wedge i_\xi d\alpha+\theta\wedge i_\xi d\theta\wedge i_\xi d\alpha \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.3.1, on a $d^{ST(M)}\circ d^{ST(M)}=0$.

Lemme 3.3.2 *[21].*
Toute hypersurface dégénérée de $\mathbb{R}^n_1$, admet une distribution écran intégrable.

Remarque 3.3.2 .
Si la distribution $S(TM)$ est intégrable. alors le couple $(\Omega^*(S(TM)),d^{S(TM)})$ constitue un complexe, nommé complexe "écran" de de Rham.

3.4 Opérateur de type star de Hodge sur une hypersurface dégénérée

Soit $(\overline{M}, \overline{g})$ une variété semi-riemannienne orientée de dimension $(m+2)$. On rappelle que l'opératur star de Hodge, $\star^H$ est un opérateur linéaire sur $\Omega^*(\overline{M})$ qui à toute p-forme de $\overline{M}$, associe une $(m+2-p)$-forme. Cet opérateur peut se définir localement. Mais il est indépendant du choix du système de coordonnées. Son carré,

$$\star^H \star^H = (-1)^{p(m+1)+q} I_{\Omega^p}$$

est plus ou moins l'identité. L'entier q est le nombre de signe négatif dans l'expression locale de la métrique $\overline{g}$.

Proposition 3.4.1 .
Soit $(\overline{M}, \overline{g})$ une variété semi-riemannienne orientée. Alors l'hypersurface dégénérée $(M, g, S(TM))$ de $(\overline{M}, \overline{g})$ est orientée. Si $v_{\overline{M}}$ est l'élément de volume sur $(\overline{M}, \overline{g})$ alors $v_M = i_N v_{\overline{M}}$ est l' élément de volume sur M.

Preuve
On considère un système de repère pseudo-orthonormé $\{N, \xi, V_1, \ldots, V_m\}$ sur $\overline{M}$ et son dual $\{\tilde{\theta}, \theta, \theta^1, \ldots, \theta^m\}$, où $\tilde{\theta}(N) = 1$, $\theta^k(V_j) = \delta_{kj}$ et tel que le système $\{V_1, \ldots, V_m\}$ soit orthonormal de $S(TM)$. Nous avons alors l' élément de volume sur $(\overline{M}, \overline{g})$ qui donne

$$v_{\overline{M}} = \tilde{\theta} \wedge \theta \wedge \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^m$$

et

$$i_N v_{\overline{M}} = \theta \wedge \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^m = \theta \wedge \theta^1 \wedge \star^s \theta^1.$$

Cette égalité est indépende du choix de la distribution écran $S(TM)$. □

La restriction h, de g sur la distribution écran étant non dégénérée et en tenant compte de l'orientation sur M, alors on pourra utiliser les éléments de l'inverse de h pour définir sur la distribution écran, un opérateur star noté $\star^s$ par

$$\begin{array}{rcl} \star^s : \Omega^k S(TM) & \longrightarrow & \Omega^{m-k} S(TM) \\ \alpha & \longmapsto & \star^s \alpha \end{array}$$

tel que $\theta \wedge \alpha \wedge \star^s \alpha$ soit élément de volume sur M : pour $\alpha, \beta \in \Omega^k(S(TM))$,

$$\theta \wedge \alpha \wedge \star^s \beta = h(\alpha, \beta) v_M. \tag{3.15}$$

Théorème 3.4.1 .
Soit $(M, g, S(TM))$ une hypersurface dégénérée d'une variété semi-riemannienne $\overline{M}$. L' opérateur de type star de Hodge $\star$, est donné sur M par

$$\begin{cases} \star\alpha = (-1)^k \theta \wedge \star^s \alpha & \forall \alpha \in \Omega^k M \quad et \quad i_\xi \alpha = 0 \\ \star\alpha = \star^s i_\xi \alpha & \forall \alpha \in \Omega^k M \quad et \quad \theta \wedge \alpha = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

Preuve

La relation (3.16) peut s' écrire sous la forme

$$\begin{cases} i_\xi(\star\alpha) = (-1)^k \star^s \alpha & \forall \alpha \in \Omega^k M \quad \text{et} \quad i_\xi\alpha = 0 \\ \star\alpha = \star^s i_\xi \alpha & \forall \alpha \in \Omega^k M \quad \text{et} \quad \theta \wedge \alpha = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Il suffit de montrer que

$$\alpha \wedge \star\beta = (h(\overline{\pi}\alpha, \overline{\pi}\beta) + \rho(\overline{\pi}'\alpha, \overline{\pi}'\beta))v_M \tag{3.18}$$

En effet

- Si α une k−forme de M telle que $\theta \wedge \alpha = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \star\alpha &= \alpha \wedge \star^s i_\xi \alpha \\ &= \theta \wedge i_\xi\alpha \wedge \star^s i_\xi \alpha \\ &= h(i_\xi\alpha, i_\xi\alpha)v_M \\ &= \rho(\alpha, \alpha)v_M \end{aligned}$$

- Si α une k−forme de M telle que $i_\xi\alpha = 0$ alors

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \star\alpha &= (-1)^k \alpha \wedge \theta \star^s \alpha \\ &= \theta \wedge \alpha \wedge \star^s \alpha \\ &= h(\alpha, \alpha)v_M \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Proposition 3.4.2 *Ces opérateurs vérifient les relations d'identités suivantes*

$$\star^s\star^s = (-1)^{k(m+1)} I_{\Omega^k(S(TM))} \tag{3.19}$$

$$\star\star = (-1)^{kn} I_{\Omega^k M}. \tag{3.20}$$

Preuve

La relation (3.19) est une conséquence directe de la définition de $\star^s$.

- Soit $\alpha \in \Omega^k M$ telle que $i_\xi\alpha = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \star\star\alpha &= (-1)^k \star (\theta \wedge \star^s \alpha) \\ &= (-1)^k \star^s \star^s \alpha \\ &= (-1)^{k+k(m-k)}\alpha. \end{aligned}$$

- Soit $\alpha \in \Omega^k M$ telle que $\theta \wedge \alpha = 0$, alors

$$\begin{aligned} \star\star\alpha &= \star(\star^s i_\xi(\alpha)) \\ &= (-1)^{m-k+1}\theta \wedge \star^s \star^s i_\xi(\alpha) \\ &= (-1)^{(m-k+1)+(k-1)(m-k+1)}\theta \wedge i_\xi(\alpha) \\ &= (-1)^{k(m-k+1)}(\alpha). \square \end{aligned}$$

L' opérateur de type star de Hodge ne dépend pas d'un système de coordonnées particulier. En effet, Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux voisinages ouverts tels que $\mathcal{U}' \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. On leur associe respectivement les bases de Duggal et Bejancu $\{N, \xi\}$ et $\{N', \xi'\}$ liées par les relations suivantes :

$$\xi' = \lambda\xi \qquad N' = \lambda^{-1}N \tag{3.21}$$

On note $\star^s$ et $\hat{\star}^s$ les opérateurs star sur $S(TM)$ associés à $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ respectivement. Soit $\alpha \in \Omega^k M$

$$\theta \wedge \alpha \wedge \star^s\alpha = \theta' \wedge \alpha \wedge \hat{\star}^s\alpha.$$

Alors $\quad \hat{\star}^s = \lambda\star^s$.

On suppose que $\quad i_\xi\alpha = i_{\xi'}\alpha = 0$, alors

$$\star\alpha = (-1)^k\theta' \wedge \hat{\star}^s\alpha = (-1)^k\theta' \wedge \lambda\star^s\alpha = (-1)^k\theta \wedge \star^s\alpha = \star\alpha.$$

Si $\quad \theta' \wedge \alpha = \lambda\theta \wedge \alpha = 0$, alors il existe une $(k-1)$-forme ν telle que

$$\alpha = \theta' \wedge \nu$$

ainsi

$$\star\alpha = \hat{\star}^s\nu = \lambda\star^s\nu = \lambda\star\theta \wedge \nu = \star\alpha.$$

Exemple 3.4.1

Soit M une hypersuface de Monge dégénérée de $\mathbb{R}^4_1$ donnée par l'équation : $x^0 = F(x^1, x^2, x^3)$, où F est définie dans l' exemple (3.2.1), précédent. Alors $TM^\perp = Rad(TM)$ est engendré par $\xi = \frac{\partial}{\partial x^0} + \sum_{\alpha=1}^{3} F'_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ où $F'_\alpha = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}$.
Puisque M est une hypersurface dégénérée, $(1-(F'_2)^2)^2 \neq 0$. Le fibré écran $S(TM)$ est alors engendré par $\{W_1, W_2\}$ avec

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{(1-(F'_2)^2)^{\frac{1}{2}}}\{F'_3\frac{\partial}{\partial x^1} - F'_1\frac{\partial}{\partial x^3}\} \\ W_2 &= \frac{1}{(1-(F'_2)^2)^{\frac{1}{2}}}\{-F'_1F'_2\frac{\partial}{\partial x^1} + (1-(F'_2)^2)\frac{\partial}{\partial x^2} - F'_3F'_2\frac{\partial}{\partial x^3}\} \end{aligned}$$

L'expression de θ est donnée par

$$\theta = F'_1du^1 + F'_2du^2 + F'_3du^3 \tag{3.22}$$

soit

$$\theta = \frac{1}{2}\{dx^0 + F'_1dx^1 + F'_2dx^2 + F'_3dx^3\}$$

et

$$\theta^1 = \frac{1}{(1-(F_2')^2)^{\frac{1}{2}}}\{F_3'du^1 - F_1'du^3\} \tag{3.23}$$

$$\theta^2 = \frac{1}{(1-(F_2')^2)^{\frac{1}{2}}}\{-F_1'F_2'du^1 + (1-(F_2')^2)du^2 - F_3'F_2'du^3\} \tag{3.24}$$

On montre facilement que

$$\theta \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 = du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$$

Ainsi,

$$\star\theta = \star^s i_\xi \theta = \star^s 1 = \theta^1 \wedge \theta^2$$

et en coordonnées locales on a

$$\begin{aligned}\star\theta &= \star\{F_1'du^1 + F_2'du^2 + F_3'du^3\}\\ &= F_1'du^2 \wedge du^3 + F_2'du^3 \wedge du^1 - F_1'du^1 \wedge du^2\\ &= \theta^1 \wedge \theta^2.\end{aligned}$$

De même,

$$\star\theta^1 = -\theta \wedge \star^s\theta^1 = -\theta \wedge \theta^2.$$

$$\begin{aligned}\star\theta^1 &= \star\frac{1}{(1-(F_2')^2)^{\frac{1}{2}}}\{F_3'du^1 - F_1'du^3\}\\ &= \frac{1}{(1-(F_2')^2)^{\frac{1}{2}}}\{F_3'du^2 \wedge du^3 - F_1'du^1 \wedge du^2\}\\ &= -\theta \wedge \theta^2\end{aligned}$$

et

$$\star\theta^2 = -\theta \wedge \star^s\theta^2 = \theta \wedge \theta^1.$$

En coordonnées locales on obtient

$$\begin{aligned}\star\theta^2 &= \star\frac{1}{(1-(F_2')^2)^{\frac{1}{2}}}\{-F_1'F_2'du^1 + (1-(F_2')^2)du^2 - F_3'F_2'du^3\}\\ &= \frac{1}{(1-(F_2')^2)^{\frac{1}{2}}}\{-F_1'F_2'du^2 \wedge du^3 + (1-(F_2')^2)du^3 \wedge du^1 - F_3'F_2'du^1 \wedge du^2\}\\ &= \theta \wedge \theta^1.\end{aligned}$$

Un calcul facile donne

$$\star\theta^1 \wedge \theta^2 = \theta \wedge \star^s(\theta^1 \wedge \theta^2) = \theta$$

5 La codifférentielle sur une hypersurface dégénérée

La codifférentielle δ est un opérateur linéaire du 1[er] ordre qui diminue le dégré de la forme différentielle d'une unité.

$$\begin{array}{rccl} \delta: & \Omega^p\mathcal{U} & \longrightarrow & \Omega^{(p-1)}\mathcal{U} \\ & \omega & \longrightarrow & \delta\omega = (-1)^{(m+2)(p+1)+s+1} \star d \star \omega \end{array}$$

Dans la suite, on supposera $S(TM)$ intégrable mais l'expression de la codifférentielle suivante est donnée pour un $S(TM)$ quelconque.

Proposition 3.5.1 .
On suppose que $(M, g, S(TM))$ est une hypersurface dégénérée et fermée. D'après le lemme 3.3.1, la codifférentielle sur $S(TM)$ est donnée par l'expression suivante

$$\delta_{S(TM)} = \begin{cases} \varepsilon \star^s \circ d^{S(TM)} \circ \star^s, & si \quad d\theta \in \Omega^*(S(TM)) \\ \varepsilon \star^s \circ d^{S(TM)} \circ \star^s + i_L & si \quad d\theta = \theta \wedge \gamma \end{cases} \tag{3.25}$$

où γ est 1-forme sur $S(TM)$ et L est un champ de vecteurs tel que $\gamma(L) = 1$

Preuve
Soient $\alpha \in \Omega^{k-1}M$ et $\beta \in \Omega^k M$. Nous avons

$$(d^{S(TM)}\alpha, \beta) = \int_M \theta \wedge d^{S(TM)}\alpha \wedge \star^s\beta \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} d(\theta \wedge \alpha \wedge \star^s\beta) &= d\theta \wedge \alpha \wedge \star^s\beta - \theta \wedge d^{S(TM)}(\alpha \wedge \star^s\beta) \\ &= d\theta \wedge \alpha \wedge \star^s\beta - \theta \wedge d^{S(TM)}\alpha \wedge \star^s\beta \\ &\quad + (-1)^{m(k-1)}\theta \wedge \alpha \wedge \star^s\star^s d^{S(TM)}\star^s\beta. \end{aligned}$$

La preuve va se faire en deux étapes :

1. Si $d\theta \in \Omega^* S(TM)$ alors

$$d(\theta \wedge \alpha \wedge \star^s\beta) = -\theta \wedge d^{S(TM)}\alpha \wedge \star^s\beta + (-1)^{m(k-1)}\theta \wedge \alpha \wedge \star^s\star^s d^{S(TM)}\star^s\beta$$

et

$$\begin{aligned} \int_M d(\theta \wedge \alpha \wedge \star^s\beta) &= -\int_M \theta \wedge d^{S(TM)}\alpha \wedge \star^s\beta \\ &\quad +(-1)^{m(k-1)} \int_M \theta \wedge \alpha \wedge \star^s\star^s d^{S(TM)}\star^s\beta. \end{aligned}$$

Si M est fermée, on a

$$\int_M \theta \wedge d^{S(TM)}\alpha \wedge \star^s\beta = +(-1)^{m(k-1)} \int_M \theta \wedge \alpha \wedge \star^s\star^s d^{S(TM)}\star^s\beta.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(d^{S(TM)}\alpha,\beta) &= (-1)^{m(k-1)}\int_M \theta\wedge\alpha\wedge\star^s\star^s d^{S(TM)}\star^s\beta \\ &= (\alpha,(-1)^{m(k-1)}\star^s d^{S(TM)}\star^s\beta).\end{aligned}$$

et

$$\delta_{S(TM)} = (-1)^{m(k-1)+1}\star^s d^{S(TM)}\star^s.$$

2. Si $d\theta\in\Omega^*Z$, alors $d\theta=\theta\wedge\gamma$ et

$$\begin{aligned}d(\theta\wedge\alpha\wedge\star^s\beta) &= d\theta\wedge\alpha\wedge\star^s\beta-\theta\wedge d^{S(TM)}\alpha\wedge\star^s\beta \\ &\quad +(-1)^{m(k-1)}\theta\wedge\alpha\wedge\star^s\star^s d^{S(TM)}\star^s\beta \\ &= -\theta\wedge d^{S(TM)}\alpha\wedge\star^s\beta+\theta\wedge\alpha\wedge\star^s(i_L\beta) \\ &\quad +(-1)^{m(k-1)}\theta\wedge\alpha\wedge\star^s\star^s d^{S(TM)}\star^s\beta.\end{aligned}$$

En intégrant, on a

$$(d^{S(TM)}\alpha,\beta) = (\alpha,\delta_{S(TM)}\beta)$$

où

$$\delta_{S(TM)} = (-1)^{m(k-1)+1}\star^s d^{S(TM)}\star^s + i_L$$

et

$$\gamma(L)=1,\quad \gamma\wedge\star^s\beta = (-1)^{(k-1)}\star^s i_L\beta \quad \square$$

Proposition 3.5.2 .
La codifférentielle, sur une hypersurface dégénérée et fermée $(M,g,S(TM))$, d'une variété lorentzienne, est donnée par

$$\delta = (-1)^{(k+1)(m+1)+1}\star d\star \tag{3.27}$$

pour toute k- forme de $\Omega^k(M)$.

Preuve

Soit $\alpha\in\Omega^{k-1}(M)$ et $\beta\in\Omega^k(M)$

$$(d\alpha,\beta)=\int d\alpha\wedge\star\beta.$$

Mais

$$\begin{aligned}d(\alpha\wedge\star\beta) &= d\alpha\wedge\star\beta+(-1)^{k-1}\alpha\wedge d\star\beta \\ &= d\alpha\wedge\star\beta+(-1)^{(m-1)(k-1)}\alpha\wedge\star\star d\star\beta\end{aligned}$$

et

$$\int_M d(\alpha \wedge \star\beta) = \int_M d\alpha \wedge \star\beta + (-1)^{(m-1)(k-1)} \int_M \alpha \wedge \star\star d \star \beta.$$

Ainsi,

$$\int_M d(\alpha) \wedge \star(\beta) = (-1)^{(m-1)(k-1)+1} \int_M \alpha \wedge \star\star d \star \beta$$

et

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta)$$

où

$$\delta\beta = (-1)^{(m-1)(k-1)+1} \star d \star \beta. \qquad \square$$

L'expression de la codifférentielle, sur une hypersurface dégénérée et fermée d'une variété semi-riemannienne $(\overline{M}, \overline{g})$ d'indice s, est donnée par

$$\delta = (-1)^{(m+1)(k+1)+s} \star d\star \tag{3.28}$$

Cette relation reste vraie dans le cas où la distribution écran est non intégrable.

Remarque 3.5.1 .
Il existe deux principaux intérêts à la détermination de la codifférentielle sur les hypersurfaces dégénérées. Le premier est qu'elle permet d'obtenir l'opérateur de Laplace Beltrami, $\Delta = d \circ \delta - \delta \circ d$. *Ce dernier permet en particulier d'établir un lien entre la topologie et la géométrie de l' hypersurface dégénérée comme dans le cas non dégénéré. Le second intérêt est son application en électromagnétique. On établit la seconde équation de Maxwell* $\delta F = 0$. *Duggal et Bejancu avaient déterminé la forme électromagnétique induite sur l' hypersurface dégénérée et ils établissent la première équation de Maxwell,* $dF = 0$ *[21, p.248] où* F *est la 2-forme électromagnétique induite.*

3.5.1 La codifférentielle en coordonnées locales

Soit $(M, g, S(TM))$ une hypersurface dégénérée d'une variété semi-riemannienne $(\overline{M}, \overline{g})$ de dimension $(m+2)$ et $\{V_i, i = 0, \dots, m\}$ un système de coordonnées pseudo-orthonormées adapté sur M tel que $V_0 = \xi$ et tel qu'il existe une connexion ∇ à torsion nulle, sur M vérifiant pour tout $p \in M$

$$\nabla_{V_i} V_j(p) = 0 \qquad \forall i, j = 0, \dots, m. \tag{3.29}$$

On associe au système $\{V_i, i = 0, \dots, m\}$, le système dual $\{\theta^i, i = 0, \dots, m\}$ avec $\theta^0 = \theta$.

Proposition 3.5.3 .

En coordonnées locales la différentielle extérieure et la codifférentielle sur $S(TM)$ et M sont respectivement données par les expressions suivantes.

$$d^{S(TM)} = \theta^i \wedge \nabla_{V_i} \quad i = 1, \ldots, m \tag{3.30}$$

$$\delta_{S(TM)} = -h^{kj} i_{V_j} \nabla_{V_k}, \quad si \quad d\theta = 0 \tag{3.31}$$

où $j, k = 1, \ldots, m$ et h^{kj} sont les éléments de la matrice inverse associée à h.

$$\begin{cases} d = \theta^k \wedge \nabla_{V_k}, & k = 0, \ldots, m \\ \delta = -i_{V_0} \nabla_{V_0} - h^{kj} i_{V_j} \nabla_{V_k} & j, k = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{3.32}$$

Preuve

Soit $\alpha \in \Omega^k(S(TM))$, alors $d^{S(TM)}\alpha \in \Omega^{k-1}(S(TM))$ et

$$d^{S(TM)}\alpha(V_{i_1}, \ldots, V_{i_k}) = \sum_{l}^{k} (-1)^l V_{i_l} \alpha(V_{i_1}, \ldots, V_{i_l}, \ldots V_{i_k})$$

où $V_{i_1}, \ldots, V_{i_k} \in \{V_1, \ldots, V_m\}$ et $d^{S(TM)}\alpha = \sum_{i=1}^{m} \theta^i \wedge \nabla_{V_i}$

La relation (3.31) vient du développement de la relation (3.25). Dans la relation (3.32) la première équation est équivalente à (3.30).

Pour la deuxième, supposons $\alpha \in \Omega^k(M)$. D' après la décomposition (3.10), deux cas se présentent :

- si $\alpha \in \Omega^k(S(TM))$ alors,

$$\begin{aligned}
\delta\alpha &= \varepsilon \star d \star \alpha \quad \varepsilon = (-1)^{(m+1)(k+1)} \\
&= \varepsilon \star d((-1)^k \theta \wedge \star^s \alpha \\
&= (-1)^k \varepsilon \star \theta \wedge d^{S(TM)} \star^s \alpha \\
&= (-1)^k \varepsilon \star^s d^{S(TM)} \star^s \alpha \\
&= (-1)^k (-1)^{(m+1)(k+1)} \star^s d^{S(TM)} \star^s \alpha \\
&= (-1)^{m(k-1)+1} \star^s d^{S(TM)} \star^s \alpha \\
&= \delta_{S(TM)}\alpha.
\end{aligned}$$

- Si $\alpha \in \Omega^k Z$ alors,

$$\begin{aligned}
\delta\alpha &= \varepsilon \star d \star \alpha \\
&= \varepsilon \star d \star^s i_{V_0}\alpha) \\
&= \varepsilon \star (d^{S(TM)} \star^s i_{V_0}\alpha) + \varepsilon \star (\theta \wedge i_{V_0} d \star^s i_{V_0}\alpha) \\
&= \varepsilon(-1)^{m-k} \theta \wedge \star^s d^{S(TM)} \star^s i_{V_0} + \varepsilon \star^s i_{V_0} d \star^s i_{V_0}\alpha.
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de d,

$$\begin{aligned}
\delta\alpha &= (-1)^{(m+1)(k+1)+(m-k)}\theta \wedge \star^s d^{S(TM)} \star^s \alpha i_{V_0} + \\
&+ (-1)^{(m+1)(k+1)} \star^s \nabla_{V_0} \star^s i_{V_0}\alpha \\
&= (-1)^{mk}\theta \wedge \star^s d^{S(TM)} \star^s i_{V_0} - (-1)^{(m+1)(k+1)+(m+1)(k+1)} i_{V_0}\nabla_{V_0}\alpha \\
&= -\theta \wedge \delta_{S(TM)} i_{V_0}\alpha - i_{V_0}\nabla_{V_0}\alpha
\end{aligned}$$

d'après la relation (3.31), on obtient

$$\delta = -i_{V_0}\nabla_{V_0} - h^{kj} i_{V_j}\nabla_{V_k} \qquad j,k = 1\dots,m.\square$$

Comme conséquence des relations (3.30), (3.31) et (3.31), on a

Proposition 3.5.4 .
Les expressions locales des opérateurs de Laplace Beltrami de la distribution écran et de l'hypersurface dégénérée sont données respectivement par

$$\Delta^{S(TM)} = -h^{kj}\nabla_{V_k}\nabla_{V_j} - h^{kj}\theta^i \wedge i_{V_j} R_{V_i V_K} \quad i,j,k = 1,\dots,m \tag{3.33}$$

et

$$\Delta^{M} = -g^{kj}\nabla_{V_k}\nabla_{V_j} - g^{kj}\theta^i \wedge i_{V_j} R_{V_i V_K} \quad i,j,k = 0,\dots,m \tag{3.34}$$

où $g^{00} = 1$ et $g^{0i} = 0$ pour $i = 1,\dots,m$ et $g^{kj} = h^{kj}$, $k,j = 1,\dots,m$

On en déduit facilement la métrique pseudo-inverse obtenue dans [3].

Remarque 3.5.2 .
L'opérateur Δ^M est un opérateur elliptique sur l' hypersurface dégénérée d'une variété lorentzienne. L'opérateur $\Delta^{S(TM)}$ est aussi elliptique. Si $S(TM)$ est une distribution intégrable alors $\Delta^{S(TM)}$ est un laplacien riemannien sur chaque feuille de $S(TM)$.

3.6 Application de l'opérateur de type star de Hodge en électromagnétisme

Dans cette section, on applique l'opérateur de type star de Hodge à travers la codifférentielle à certaines classes de champs électromagnétiques pour obtenir les équations de Maxwell qui viennent complèter celles obtenues par Duggal-Bejancu [21, p.248]. Ces derniers ont étudié les hypersurfaces dégénérées invariantes sur lesquelles les champs électromagnétiques singuliers et non singuliers induits existent. Ils montrent que ces champs, existent si et seulement si l'hypersurface dégénérée est totalement géodésique et que ces champs sont fermés. La deuxième équation à déterminer qui est la cofermeture du champ électromagnétique, vient de l'existence de l'opérateur de type star de Hodge sur les hypersurfaces dégénérées.

·Le champ électromagnétique non singulier induit est donné par l'expression

$$F = \lambda\theta^1 \wedge \theta^2 \tag{3.35}$$

où λ est une fonction lisse liée au champ scalaire de Maxwell [21].

Théorème 3.6.1 .
Soit $(M, g, S(TM), F)$ une hypersurface dégénérée d'une variété d'espace-temps $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$ de dimension 4 où $\overline{F}$ est un champ électromagnétique non singulier de $\overline{M}$ et F un champ électromagnétique non singulier induit sur M. On suppose que la distribution écran, $S(TM)$ est intégrable et que la connexion de Levi-civita ∇ induite sur M est métrique. Alors, il existe une 1-forme κ sur M telle que

1. $\nabla_X\theta^1 = \kappa(X)\theta^2$
2. $\nabla_X\theta^2 = -\kappa(X)\theta^1$
3. $\nabla_X\theta^0 = 0$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

Preuve
Soit $\{\xi, V_1, V_2\}$ un système de coordonnées pseudo-orthonormées sur M et $\{\theta^0, \theta^1, \theta^2\}$ le système dual. Alors pour tout $X \in \Gamma(TM)$ il existe une fonction lisse $\kappa(X)$ telle que

1. $\nabla_X V_1 = -\kappa(X)V_2$
2. $\nabla_X V_2 = \kappa(X)V_1$
3. $\nabla_X\xi = 0$

(Voir théorème 3.1 [21] p. 248). Ainsi en applicant ces relations au système dual, on a le résultat. □

Corollaire 3.6.1 .
Sous les conditions du théorème,

$$dF = 0 \quad si \quad \xi.(\lambda) = 0. \tag{3.36}$$

En particulier si $\lambda =$ constant alors l' équation de Maxwell est satisfaite.

Théorème 3.6.2 .
Soit $(M, g, S(TM), F)$ une hypersurface dégénérée d'un espace-temps $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{F})$ de dimension 4 où $\overline{F}$ est un champ électromagnétique non singulier de $\overline{M}$ et F un champ électromagnétique non singulier induit sur M. Alors

$$d \star F = 0 \quad (\delta_M F = 0) \quad \Longleftrightarrow \quad V_1.\lambda = 0 \quad et \quad V_2.\lambda = 0. \tag{3.37}$$

Preuve

Soit

$$F = \lambda\theta^1 \wedge \theta^2.$$

On a

$$\star F = \lambda\theta^0$$

et

$$d \star F = d\lambda\theta^0.$$

D'après le théorème 3.6.1

$$d \star F = 0 \iff V_1.(\lambda) = 0 \quad et \quad V_2.(lambda) = 0 \quad \square$$

Corollaire 3.6.2 .

Les équations de Maxwell, pour les champs éclctromagnétiques induits,

$$\begin{cases} dF = & 0 \\ d \star F = & 0 \quad (\delta F = 0) \end{cases} \tag{3.38}$$

sont obtenues pour les valeurs de λ constantes.

Duggal et Bejancu montrent que la condition λ constante est satisfaite pour la classe des variétés d'espace-temps homogènes qui admettent des champs électromagnétiques non singuliers.

3.7 Formes harmoniques

Nous voulons ici déterminer les formes harmoniques sur les hypersurfaces dégénérées $(M, g, S(TM))$ et son représentant dans la classe de cohomologie correspondante.
Rappelons le L^2- produit (3.13) défini sur les hypersurfaces dégénérées compactes.

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= \int_M (h(\overline{\pi}\alpha, \overline{\pi}\beta) + \rho(\overline{\pi}'\alpha, \overline{\pi}'\beta)) \star 1 \\ &= \int_M \alpha \wedge \star\beta \end{aligned}$$

où $\alpha,\ \beta \in \Omega^k(M)$

Théorème 3.7.1 .

Soit $(M, g, S(TM))$ une hypersurface compacte d'une variété lorentzienne orientée et α une k-forme sur M, alors

$$\Delta\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\alpha = 0 \quad et \quad \delta\alpha = 0 \tag{3.39}$$

Preuve

Soit α une k-forme harmonique, $\Delta\alpha = 0$ alors

$$\begin{aligned}(\Delta\alpha.\alpha) &= 0\\ ((d\delta+\delta d)\alpha.\alpha) &= 0\\ (d\delta\alpha,\alpha)+(\delta d\alpha.\alpha) &= 0\\ (\delta\alpha,\delta\alpha)+(d\alpha.d\alpha) &= 0.\end{aligned}$$

Puisque le produit $(.,.)$ est défini positif, on a $\delta\alpha = 0$ et $d\alpha = 0$. □

Corollaire 3.7.1 .

La 2-forme électromagnétique induite F est harmonique.

La preuve vient de la relation (3.38)

Remarque 3.7.1 .

Soit $(M, g, S(TM))$ une hypersurface compacte d'une variété lorentzienne orientée. Alors $\Omega^k(M)$ se décompose comme suit

$$\Omega^k(M) = d\Omega^{k-1}(M) - \delta(\Omega^{k-1}(M)) + Ham^k(M) \tag{3.40}$$

où $Harm^k(M)$ est l'ensemble des k-formes harmoniques M.

Ainsi

1. *$Harm^k(M)$ est de dimension finie.*
2. *Chaque classe de cohomologie de $H^k(M)$ $(0 \leq k \leq n = dim(M))$ contient précisément une k-forme harmonique.*
3. *$dimHarm^k(M) = dimH^k(M) = b_k$ où b_k est le k^{ieme} nombre de Betti et la caractéristique d'Euler $\chi(M)$, est donnée par $\chi(M) = \sum(-1)^k b_k$.*
4. *Soit $(M, g, S(TM))$ une hypersurface dégénérée fermée de dimension $(2m + 1)$ d'une variété lorentzienne orientée. Alors $\chi(M) = 0$*

La preuve des différents points de la remarque vient des équations (3.39),(3.40) et résulte de la dualité de Poincaré

$$\begin{aligned} H^k(M) \times H^{(2m+1)-k}(M) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ ([\alpha],[\beta]) &\longmapsto \int_M \alpha\wedge\beta. \end{aligned}$$

où α, β sont des représentants des classes de cohomologie $[\alpha]$, $[\beta]$ respectivement. Cette application est bien définie. Donc $dimH^k(M) = dimH^{2m+1-k}(M) = b_k$. Par conséquent $\chi(M) = \sum(-1)^k b_k = 0$

Comme exemple, le cône de lumière, hypersurface de $\mathbb{R}_1^{2n+2}$ a sa caractéristique d' Euler nulle.

Théorème 3.7.2 .
Il n'existe pas d'hypersurface de Monge dégénérée et compacte sans bord de $\mathbb{R}^4_1$ qui soit minimale.

Preuve
On suppose qu'il existe sur $\mathbb{R}^4_1$ une hypersurface de Monge, $(M^3, g, S(TM))$ compacte définie par l' exemple (3.2.1). Si l'immersion

$$\begin{aligned} f : (M^3, g, S(TM)) &\longrightarrow \mathbb{R}^4_1 \\ (u^1, u^2, u^3) &\longmapsto (F(u^1, u^2, u^3), u^1, u^2, u^3) \end{aligned}$$

minimale alors la fonction

$$\begin{aligned} F : M^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u^1, u^2, u^3) &\longmapsto F(u^1, u^2, u^3) \end{aligned}$$

est harmonique (Pour les calculs voir [21] Théorème 7.1 p. 131). D'après le théorème 3.7.1, $\Delta F = 0$ implique $dF = 0$. Ce qui contredit la relation (3.8) et le fait que $\theta^0 = dF$ est non nulle partout.

Remarque 3.7.2 .
Puisque la forme bilinéaire (..) est non dégénérée, il est possible de faire une extension de cette forme bilinéaire pour définir les normes de Sobolev [31], pour les hypersurfaces dégénérées.

CHAPITRE 4

THÉORÈME DE LA DIVERGENCE POUR LES VARIÉTÉS SEMI-RIEMANNIENNES AUX BORDS DÉGÉNÉRÉS

L' un des domaines de la recherche, en rélativité générale, est l'étude des systèmes isolés tels que le soleil, les étoiles et notre univers.
Il est bien établi qu'on peut avoir une bonne compréhension de ces systèmes isolés si on se refère à la géometrie des espace-temps qui sont asymptôtiquement plats. C'est-à-dire à une grande distance du centre, la métrique d'un tel système est de Minkwoski. La solution (équation d'Einstein) de Reissner-Nordström, $(\overline{M}, \overline{g})$ en est un example avec

$$\overline{g} = -(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})dt^2 + (1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

où m, e et r sont la masse, la charge et le rayon entre le centre et le bord de M. Le quadruplet (t, r, θ, ϕ) constitue un système de coordonnées locales.
Dans l'étude de ces variétés d'espace-temps asymptôtiquement plats (scindées en deux classes, les bornées et les non bornées), Penrose [45, 46] donnent les résultats suivants :

1. Si $\overline{M}$ satisfait aux équations d'Einstein jusqu'à l'entame du bord $\partial\overline{M}$, alors $\partial\overline{M}$ est de type isotrope. De plus si la matière est présente près du bord $\partial\overline{M}$ alors l'énergie au repos est nulle.
2. Si le tenseur de Weyl est nul sur $\partial\overline{M}$, alors $\overline{M}$ est asymptôtiquement plate.
3. Le bord isotrope $\partial\overline{M}$ est constitué de deux parties disjointes $\partial\overline{M}+$ et $\partial\overline{M}-$ qui sont (chacune) homéomorphes à $\mathbb{R} \times S^2$. Le bord $\partial\overline{M}+$ borde $\overline{M}$ au future et $\partial\overline{M}-$ borde $\overline{M}$ au passé.

Ainsi ces résultats montrent l'existence du bord dégénéré considéré comme hypersurface dégénéré de $\overline{M}$.

pour un

4.1 Théorème de la divergence d'un champ de vecteurs

Soit $(\overline{M},\overline{g})$ une variété semi-riemannienne orientée connexe avec un bord $\partial\overline{M}$. On pose $M := \partial\overline{M}$. Alors le bord M est une hypersurface de $\overline{M}$. Dans cette partie nous allons établir les formules traduisant le théorème de la divergence en semi-riemannien tout en mettant un accent particulier sur le cas des variétés aux bords dégénérés.

Définition 4.1.1 *Soient $\partial\overline{M}_+$, $\partial\overline{M}_-$ et $\partial\overline{M}_0$ les régions de ∂M où les vecteurs normaux sont respectivement de type espace, temps et lumière.*

Le bord ∂M est vu comme la réunion de $\partial\overline{M}_+$, $\partial\overline{M}_-$ et $\partial\overline{M}_0$

$$\begin{aligned}
\partial\overline{M}_+ &= \{p \in \partial\overline{M}, g_{|_{\partial\overline{M}_p^\perp}} > 0\} \\
\partial\overline{M}_- &= \{p \in \partial\overline{M}, g_{|_{\partial\overline{M}_p^\perp}} < 0\} \\
\partial\overline{M}_0 &= \{p \in \partial\overline{M}, g_{|_{\partial\overline{M}_p^\perp}} \quad \text{est dégénérée}\}.
\end{aligned}$$

La normale sortante N de la surface est donnée par :

$$N = \begin{cases} N_+ & \text{sur} \quad \partial\overline{M}_+ \\ N_- & \text{sur} \quad \partial\overline{M}_- \\ N_0 & \text{sur} \quad \partial\overline{M}_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Le vecteur N_0 est appelé vecteur transverse dans le cas de la surface dégénérée ∂M_0.

Lemme 4.1.1 .
Soit $(\overline{M},\overline{g})$ une variété pseudo-riemannienne orientée et $v_{\overline{M}}$ son élément de volume alors le bord ∂M est orienté et son élément de volume est donné par $\eta = i_N v_{\overline{M}}$.

Lemme 4.1.2 .
Soient $(\overline{M},\overline{g})$ une variété pseudo-riemannienne orientée, $v_{\overline{M}}$ son volume avec bord $\partial\overline{M}$ et soit X un champ de vecteurs de $\overline{M}$ à support compact. Alors

$$\int_{\overline{M}} div(X) v_{\overline{M}} = \int_{\overline{M}} d(trace(X \otimes v_{\overline{M}})) = \int_{\partial\overline{M}} trace(X \otimes v_{\overline{M}}). \tag{4.2}$$

Preuve
On suppose que $(\overline{M},\overline{g})$ une variété semi-riemannienne de dimension m et $\{V_i, i = 1,\ldots,m\}$ un système de repères sur $\overline{M}$. Ce système peut contenir des champs vecteurs isotropes [21]. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
div(X) v_{\overline{M}} &= L_X v_{\overline{M}} \\
&= d i_X v_{\overline{M}} \\
&= d(\overline{g}^{kj}\overline{g}(X, V_k) i_{V_j} v_{\overline{M}}) \quad \text{car} \quad X = \overline{g}^{kj}\overline{g}(X, V_k) V_j \\
&= d(trace(X \otimes v_{\overline{M}})).\square
\end{aligned}$$

Théorème 4.1.1 .
Soient $(\overline{M},\overline{g})$ une variété semi-riemannienne avec bord $\partial\overline{M}$ et X un champ de vecteurs sur $\overline{M}$ à support compact, alors

$$\int_{\overline{M}} div(X)v_{\overline{M}} = \int_{\partial\overline{M}_+} \overline{g}(X,N_+)\eta_+ - \int_{\partial\overline{M}_-} \overline{g}(X,N_-)\eta_- + \int_{\partial\overline{M}_0} \overline{g}(X,\xi)\eta_0 \tag{4.3}$$

où $\eta_\pm = i_{N_\pm}v_{\overline{M}}$, $\eta_0 = i_{N_0}v_{\overline{M}}$ et ξ est telle que $\overline{g}(\xi,N_0) = 1$

Preuve
On considère le système de repères $\{V_i, i = 1,\dots,m\}$ pseudo-orthonormé. On a alors

$$\begin{aligned} trace(X\otimes v_{\overline{M}}) &= \overline{g}^{kj}\overline{g}(X,V_k)i_{V_j}v_{\overline{M}} \\ &= \overline{g}^{kj}\overline{g}(X,V_k)\eta_j \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} trace(X\otimes v_{\overline{M}})_{|\partial\overline{M}} &= trace(X\otimes v_{\overline{M}})_{|\partial\overline{M}_+} + trace(X\otimes v_{\overline{M}})_{|\partial\overline{M}_-} \\ &\quad + trace(X\otimes v_{\overline{M}})_{|\partial\overline{M}_0} \\ &= \overline{g}(X,N_+)\eta_+ - \overline{g}(X,N_-)\eta_- + \overline{g}(X,\xi)\eta_0 \end{aligned}$$

Ceci est du au fait que si $V_k = N_+$ alors $\overline{g}^{jk} = \delta_{jk}$, si $V_k = N_-$ alors $\overline{g}^{jk} = -\delta_{jk}$ et si $V_k = N_0$ alors $V_j = \xi$ et $\overline{g}^{jk} = \overline{g}(N_0,\xi) = 1$.
D'après le lemme 4.1.2 et la proposition 3.4.1, on a

$$\begin{aligned} \int_{\overline{M}} div(X)v_{\overline{M}} &= \int_{\partial\overline{M}} trace(X\otimes v_{\overline{M}}) \\ &= \overline{M}^{kj}\varepsilon_j \int_{\partial\overline{M}_j} \overline{M}(X,V_k)\eta_j \end{aligned}$$

où $\varepsilon_{(0,1)} = 1$, $\varepsilon_{-1} = -1$, $j,k = -1,0,1$ et $V_{(-1,1)} = N_{(-1,1)}$ et $V_0 = \xi$.
D'où le résultat. □

Corollaire 4.1.1 .
Soit $(\overline{M},\overline{g})$ une variété semi-riemannienne avec bord $\partial\overline{M}$ et X un champ de vecteurs sur $\overline{M}$ à support compact. On suppose satisfaite l'une des conditions suivantes

1. *$\partial\overline{M}_0$ est de mesure nulle dans $\partial\overline{M}$*
2. *X est tangent à $\partial\overline{M}$ en tout point de $\partial\overline{M}_0$*

Alors

$$\int_{\overline{M}} (divX)v_{\overline{g}} = \int_{\partial\overline{M}_+} \overline{g}(X,N_+)\eta_+ + \int_{\partial\overline{M}_-} \overline{g}(X,N_-)\eta_- \tag{4.4}$$

Corollaire 4.1.2 .
Soit $(\overline{M}, \overline{g})$ une variété semi-riemannienne avec bord $\partial\overline{M}$ et X un champ de vecteurs sur $\overline{M}$ à support compact. Si l'une des conditions suivantes

- *X est tangent à $\partial\overline{M}$ aux points de $\partial\overline{M}_+$ et $\partial\overline{M}_-$,*
- *$\partial\overline{M}_+ = \partial\overline{M}_- = \emptyset$,*

est vérifiée, alors

$$\int_{\overline{M}} (divX) v_{\overline{g}} = \int_{\partial\overline{M}_0} \overline{g}(X, \xi)\eta_0 \tag{4.5}$$

Exemple 4.1.1 .
Soit $\overline{M} = S^1 \times [-1, 1]$ avec la métrique
$\overline{g} = \frac{1}{2}[d\theta \otimes dt + dt \otimes d\theta] + (1-t)d\theta \otimes d\theta$ *où θ est une coordonnée polaire de S^1, $t \in [-1, 1]$*
$\partial\overline{M} = (S^1 \times \{1\}) \cup (S^1 \times \{-1\})$ *est dégénéré c'est-à-dire $\partial\overline{M} = \partial\overline{M}_0$*
Soit $X = t\frac{\partial}{\partial t}$ et $v_{\overline{M}} = -\frac{1}{2}d\theta \wedge dt$, alors $\int_{\overline{M}} divX v_{\overline{M}} = 2\pi$
On a $\eta_0 = \frac{1}{2}d\theta$ et $\xi = \frac{\partial}{\partial\theta}$ alors

$$\int_{\partial\overline{M}_0} \overline{g}(X, \xi)\eta_0 = \int_{S^1\times\{1\}} \overline{g}(X, \xi)\eta_0 - \int_{S^1\times\{-1\}} \overline{g}(X, \xi)\eta_0 = 2\pi$$

Exemple 4.1.2 .
Soit $(\overline{M}, \overline{g})$ une variété de Minkowski de dimension 3 telle que le bord $\partial\overline{M}$ est défini par $x = F(y, z)$ où F est une fonction de classe C^∞ telle que $(F'_y)^2 + (F'_z)^2 = 1$ ($F'_\alpha = \frac{\partial F}{\partial\alpha}$). Alors il existe une submersion f telle que $f^{-1}(0) = \partial\overline{M}$. La fonction $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$ est donnée par la relation $f(x,y,z) = x - F(y, z)$ et $df = -dx + F'_y dy + F'_z dz \neq 0$. On constate que le bord $\partial\overline{M}$ est dégénéré ($\partial\overline{M} = \partial\overline{M}_0$).
$N_0 = \frac{1}{2}(-\frac{\partial}{\partial x} + F'_y\frac{\partial}{\partial y} + F'_z\frac{\partial}{\partial z})$ *et* $\xi = \frac{\partial}{\partial x} + F'_y\frac{\partial}{\partial y} + F'_z\frac{\partial}{\partial z}$
constituent la base de Duggal-Bejancu . On a l'élément de surface du bord qui donne,

$$\eta = i^*[-\frac{1}{2}(dy \wedge dz + F'_y dx \wedge dz - F'_z dx \wedge dy)] = du^1 \wedge du^2$$

où i est l'immersion

$$i(u^1, u^2) = (F(u^1, u^2), u^1, u^2).$$

Le champ de vecteurs $X = (X^1, X^2, X^3)$ est à support compact sur $\overline{M}$ et

$$\begin{aligned}
\int_M div(X)v_M &= \int_M d(X^1 dy \wedge dz) + \int_M d(X^2 dz \wedge dx) \int_M d(X^3 dx \wedge dy) \\
&= \int_{\partial M_0} i^*(X^1 dy \wedge dz + X^2 dz \wedge dx + X^3 dx \wedge dy) \\
&= \int_{\partial M_0} (X^1 - X^2 F_y - X^3 F_z) \circ i \;\; du^1 du^2 \\
&= \int_{\partial M_0} g(X, \xi)\eta
\end{aligned}$$

4.2 Théorème de la divergence pour un champ de $(0,2)$-tenseurs symétriques

Dans cette partie nous allons étendre le théorème de la divergence aux champs des $(0,2)$-tenseurs symétriques sur une variété semi-riemannienne à bord (dégénéré ou non). Ce travail généralise le lemme 2.3 de J. P. Ezin [24].
Soit T un champ de $(0,2)$-tenseurs symétriques sur $(\overline{M},\overline{g})$, la divergence de T est une 1-forme telle que pour tout $X \in \Gamma(T\overline{M})$ on a

$$div(T)(X) = \overline{g}^{kj}(\nabla_{V_k}T(X,V_j)$$

Lemme 4.2.1 .
Soit T un champ de $(0,2)$-tenseurs symétriques sur $\overline{M}$ alors

$$divT(X) = div[(TX)^\sharp] - \frac{1}{2}\overline{g}(L_X\overline{g},T) \qquad (4.6)$$

Preuve
On considère un système de repères $\{V_j,\ j=1,\dots,n\}$. Pour des raisons de simplification du calcul, on suppose que les vecteurs V_j sont parallèles ($\nabla V_j = 0,\ j=1,\dots,n$)

$$\begin{aligned} div(T)(X) &= \overline{g}^{kj}(\nabla_{V_k}T)(X,V_j) \\ &= \overline{g}^{kj}[\nabla_{V_k}(T(X,V_j)) - T(\nabla_{V_k}X,V_j) - T(X,\nabla_{V_k}V_j) \\ &= \overline{g}^{kj}\nabla_{V_k}(T(X,V_j)) - \overline{g}^{kj}\overline{g}^{lm}\overline{g}(\nabla_{V_k}X,V_l)T(V_j,V_m) \\ &= \overline{g}^{kj}\nabla_{V_k}(T(X,V_j)) - \frac{1}{2}\overline{g}(T,L_X\overline{g}) \\ &= \overline{g}^{kj}\nabla_{V_k}(\overline{g}((TX)^\sharp,V_j)) - \frac{1}{2}\overline{g}(T,L_X\overline{g}) \end{aligned}$$

or $div[(TX)^\sharp] = \overline{g}^{kj}\nabla_{V_k}\overline{g}((TX)^\sharp,V_j)$, d'où le résultat □

Proposition 4.2.1 .
Soit $(\overline{M},\overline{g})$ une variété semi-riemannienne orientée de volume $v_{\overline{M}}$ et de bord $\partial\overline{M}$ orienté. Soient T un champ de $(0,2)$-tenseurs symétriques et X un champ de vecteurs alors

$$\int_{\overline{M}} div(T)v_{\overline{M}} + \frac{1}{2}\int_{\overline{M}}\overline{g}(T,L_X\overline{g})v_{\overline{M}} = \int_{\partial\overline{M}} trace[(TX)^\sharp \otimes v_{\overline{M}}] \qquad (4.7)$$

Pour la preuve il suffit d'utiliser les relations (4.6) et(4.2).

Théorème 4.2.1 .
Soient $(\overline{M},\overline{g})$ une variété semi-riemannienne à bord et T un champ de $(0,2)-$tenseurs symétriques sur $\overline{M}$. Alors

$$\int_{\overline{M}} div(T)v_{\overline{M}} + \frac{1}{2}\int_{\overline{M}}\overline{g}(T,L_X\overline{g})v_{\overline{M}} = \int_{\partial\overline{M}_+} T(X,N_+)\eta_+ -$$

$$-\int_{\partial\overline{M}_-} T(X,N_-)\eta_- + \int_{\partial\overline{M}_0} T(X,\xi)\eta_0 \tag{4.8}$$

La preuve vient de l'équation (4:7) et du théorème 4.1.1

Exemple 4.2.1 .
Si $T=\overline{g}$ alors $div\overline{g}=0$ et $\overline{g}(\overline{g},L_X\overline{g})=2div(X)$ donc de (4.8), on obtient

$$\int_{\overline{M}} divX v_{\overline{M}} = \int_{\partial\overline{M}_+} \overline{g}(X,N_+)\eta_+ - \int_{\partial\overline{M}_-} \overline{g}(X,N_-)\eta_- + \int_{\partial\overline{M}_0} \overline{g}(X,\xi)\eta_0$$

4.3 Quelques conséquences du théorème de la divergence

Soient $(\overline{M},\overline{g})$ une variété semi-riemannienne à bord, T un $(0,2)$−tenseur symétrique sur $\overline{M}$ et N la normale sortante selon la relation 4.1.
Si $T=\varphi\overline{g}$ et $X=\nabla\psi$ alors de (4.8) on obtient le théorème de Green généralisé sur les variétés semi-riemanniennes.

$$\begin{aligned}\int_{\overline{M}}(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)v_{\overline{M}} &= \int_{\partial\overline{M}_+}\overline{g}(\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi,N_+)\eta_+\\ &- \int_{\partial\overline{M}_-}\overline{g}(\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi,N_-)\eta_- \qquad (4.9)\\ &+ \int_{\partial\overline{M}_0}\overline{g}(\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi,\xi)\eta_0\end{aligned}$$

Si $T=Ric-\frac{scal}{m}\overline{g}$, $m\geq 3$ alors, pour un champ de vecteurs conforme sur $\overline{M}$,

$$\begin{aligned}\int_{\overline{M}}L_X(scal)v_{\overline{M}} &= \frac{2m}{m-2}\int_{\partial\overline{M}_+}(Ric-\frac{scal}{m}\overline{g})(X,\nu)\eta_+\\ &- \frac{2m}{m-2}\int_{\partial\overline{M}_-}(Ric-\frac{scal}{m}\overline{g})(X,\nu)\eta_- \qquad (4.10)\\ &+ \frac{2m}{m-2}\int_{\partial\overline{M}_0}(Ric-\frac{scal}{m}\overline{g})(X,\nu)\eta_0\end{aligned}$$

Si $\partial\overline{M}=\partial\overline{M}_0$ et $X\in\Gamma(T\partial\overline{M})$ alors

$$\int_{\overline{M}}L_X(scal)v_{\overline{g}} = \frac{2m}{m-2}\int_{\partial\overline{M}_0}Ric(X,\xi)\eta_0 \tag{4.11}$$

Théorème 4.3.1 .
Il n'existe pas, sur une variété semi-riemannienne de Einstein compacte sans bord à courbure scalaire non nulle, un champ de vecteurs de Killing gradient non dégénéré.

Preuve
Le Hessien H^ϕ de la fonction ϕ nous donne [24]

$$\int_{\overline{M}} divH^\phi(X) = \int_{\overline{M}}(-d(\Delta\phi)(X)+Ric(\nabla\phi,X))\,v_{\overline{g}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\overline{M}} \overline{g}\left(H^{o}, L_X\overline{g}\right) v_{\overline{g}} + \int_{\partial\overline{M}_+} H^{\phi}(X, N_+)\eta_+ - \int_{\partial\overline{M}_-} H^{\phi}(X, N_-)\eta_-$$
$$+ \int_{\partial\overline{M}_0} H^{\phi}(X,\xi)\eta_0.$$

En particulier si X est un champ de vecteurs de Killing et $\partial\overline{M} = \emptyset$, alors

$$\int_M divH^{\phi}(X) = 0$$

ainsi

$$\int_{\overline{M}} (-d(\Delta\phi)(X) + Ric(\nabla\phi, X))\, v_{\overline{g}} = 0,$$

de plus

$$\int_{\overline{M}} d(\Delta\phi)(X) = 0.$$

Donc

$$\int_{\overline{M}} Ric\,(\nabla\phi, X)\, v_M = 0.$$

Si $\overline{M}$ est d'Einstein et $X = \nabla\phi$ alors on a $\int_{\overline{M}}\overline{g}\,(\nabla\phi, \nabla\phi)\, v_M = 0$. Ce qui contredit le fait que $|\nabla\phi|$ est de signe constant. □

4.4 Applications

Soit X un champ de vecteurs sur $\overline{M}$. Le champ X est dit solenoïdal si $divX = 0$ et X est dit concirculaire spéciale si $A_X = -\frac{1}{m}(divX)\mathbb{1}_{\Gamma(T\overline{M})}$ [58].
Soient w une $(m-1)-$ forme sur $\overline{M}$. x un élément du bord $\partial\overline{M}$ et $X_a = V_a + \lambda N_x$, $a = 2, \ldots, n$ $(m-1)$ vecteurs linéairement independants sur $\overline{M}$ où λ est une fonction définie sur $\partial\overline{M}$. Alors on a

$$w(X_2, \ldots, X_n) = w_t - \sum_{a=2}^{m}(-1)^{a+1}\lambda_a(w_N)(V_2, \ldots, \hat{V}_a, \ldots, V_m)$$

où $w_t = w(V_2, \ldots, V_m)$ est la partie tangente de w sur $\partial\overline{M}$,
$w_N(V_2, \ldots, \hat{V}_a, \ldots, V_m) = w(N, V_2, \ldots, \hat{V}_a, \ldots, V_m)$ est la partie normale de w et $\hat{V}_a$ signifie qu'on ote la a^{ieme} composante.

Proposition 4.4.1 *[26, 58].*
Soit $\overline{M}$ une variété semi-riemannienne orientée avec bord $\partial\overline{M}$ et $X \in \Gamma(T\overline{M})$ à support compact

$$\int_{\overline{M}} \{Ric(X, X) + trace(A_X)^2 - (traceA_X)^2\} v_{\overline{g}} = \int_{\partial\overline{M}} i_{(traceA_X - A_X X)} v_{\overline{g}} \qquad (4.12)$$

Si X est un vecteur tangent à $\partial\overline{M}$ alors de (4.12), on a

$$\int_{\overline{M}} \{Ric(X, X) + trace(A_X)^2 - (traceA_X)^2\} v_{\overline{g}} = \int_{\partial\overline{M}} B(X, X)\eta \qquad (4.13)$$

où B est la seconde forme fondamentale de $\partial\overline{M}$

Si X est vecteur concirculaire spéciale et tangent à $\partial\overline{M}$ en tout point $x \in \partial\overline{M}$ alors

$$\int_{\overline{M}}\{Ric(X,X) - \frac{m-1}{m}(divX)^2\}v_{\overline{g}} = \int_{\partial\overline{M}} B(X,X)\eta \tag{4.14}$$

Si X est vecteur concirculaire spéciale et transverse à $\partial\overline{M}$ en tout point $x \in \partial\overline{M}$ alors

$$\int_{\overline{M}}\{Ric(X,X) - \frac{m-1}{m}(divX)^2\}v_{\overline{g}} = -\frac{m-1}{m}\int_{\partial\overline{M}} f(divX)\eta \tag{4.15}$$

où $X = Z' + fN$ avec $Z' + fN \in \Gamma(\partial\overline{M})$ et f une fonction sur $\partial\overline{M}$

Ces différentes équations restent vraies dans le cas des variétés semi-riemanniennes aux bords dégénérés ou non.

Théorème 4.4.1 *[58].*
Soit $(\overline{M},\overline{g})$ une variété orientée de dimension m $(m \geq 2)$ et soit w une $(m-1)$-forme de Killing normale à $\partial\overline{M}$.

1. *Si pour tout $X \in \Gamma(T\overline{M})$ et pour $X' \in \Gamma(T\partial\overline{M})$ tous deux à support compact, on a $Ric(X,X) \leq 0$ et $B(X',X') \leq 0$, alors $\nabla w = 0$.*
2. *Si pour tout $X \in \Gamma(T\overline{M})$ et pour $X' \in \Gamma(T\partial\overline{M})$ tous deux à support compact, on a $Ric(X,X) \leq 0$ et $B(X',X') \leq 0$ et s'il existe au moins un point $x \in \overline{M}$ où $Ric(X,X) < 0$ alors w ne peut être que nulle.*

Théorème 4.4.2 .
Soit $(\overline{M},\overline{g})$ une variété lorentzienne orientée de dimension m et à bord dégénéré. Si ξ est un champ de vecteurs isotrope conforme tel que $Ric(\xi,\xi) \leq 0$ alors ξ est parallèle. De plus il n'existe pas un tel champ de vecteurs conforme qui satisfait à la condition $Ric(\xi,\xi) < 0$.

Preuve
Si $X = \xi$ est un champ de vecteur isotrope , alors $B(\xi,\xi) = 0$ (cela vient du fait que la seconde forme fondamentale d'une hypersurface dégénérée est dégénérée). Puisque ξ est un champ de vecteurs conforme alors

$$trace(A_\xi)^2 - (traceA_\xi)^2 \leq 0.$$

D'après la relation (4.13) on a la contradiction avec la condition $Ric(\xi,\xi) < 0$ □

Théorème 4.4.3 .
Soit $(\overline{M},\overline{g})$ une variété semi-riemannienne orientée de dimension m et à bord dégénéré. Si

un champ de vecteurs concirculaire spécial de norme constante sur $\partial\overline{M}_0$ et transverse ord $\partial\overline{M}_0$ en tout point, alors

$$\int_{\overline{M}} Ric(X,X)v_M \geq 0$$

Preuve

Soit $X \in \Gamma(T\overline{M})$ concirculaire spécial à support compact et transverse au bord $\partial\overline{M}_0$. On a alors la relation (4.16),

$$\int_{\overline{M}}\{Ric(X,X) - \frac{m-1}{m}(divX)^2\}v_M = -\frac{m-1}{m}\int_{\partial\overline{M}_0} f(divX)\eta$$

où $X = Z' + fN$, $Z' \in \Gamma(\partial\overline{M})$. Comme f une fonction constante sur $\partial\overline{M}$, alors

$$\int_{\partial\overline{M}_0} f(divX)\eta = 0. \qquad \square$$

Corollaire 4.4.1 .

Il n'existe pas sur une variété semi-riemannienne d'Einstein $(\overline{M},\overline{g})$, un champ de vecteurs concirculaire special de type temps et de norme contante sur $\partial\overline{M}$.

La preuve vient de théorème 4.4.3

Chapitre 5

Réduction de la codimension des sous-variétés dégénérées

Une généralisation du travail de Gauss en géométrie différentielle est l'étude de sous-variété M^m définie par des immersion isométrique, $f : M^m \longrightarrow M^{m+n}$ de codimension arbitraire n, d'une variété M^{m+n} de dimension $(m+n)$. De nombreuses extensions de ce travail ont été effectuées [6, 18, 21] . Parmi ces travaux on peut citer la réduction de la codimension des sous-variétés [2, 23, 60]. La réduction de la codimension d'une sous-variété est un processus qui consiste à déterminer la codimension substantielle d'une sous-variété.
En effet soit $f : M^m \longrightarrow M_c^{m+n}$ une immersion isométrique d'une variété connexe de dimension m dans une variété complète et connexe de dimension $(m+n)$ et à courbure constante.
Le problème de la réduction de la codimension va alors consister à déterminer une sous-variété propre Q totalement géodésique dans M_c^{m+n} et telle que $f(M^m) \subset Q$.
Cependant la plupart des travaux dans ce domaine sont limités aux cas pour lesquels la métrique induite est non-dégénérée [2, 23, 18, 60].

Pour le cas des sous-variétés dégénérées, le seul travail, en notre connaissance sur ce domaine vient de Atindogbé, Ezin et Tossa [4]. Ces derniers ont montré que les sous-variétés complètement isotropes, non totalement géodésiques munies d'une connexion transverse métrique et d'une distribution de rang constant du fibré transverse, parallèle par rapport à la connexion transverse et contenant le premier espace normal, admettent une réduction de leurs codimensions.
Nous allons étendre ce résultat aux sous-variétés proprement r-dégénérées. De plus nous allons établir des conditions sous lesquelles une sous-variété coisotrope ombilique d'un espace pseudo-euclidien admet une réduction de sa codimension.

5.1 Quelques résultats généraux sur la géométrie des sous-variétés dégénérées d'une variété semi-riemannienne

Rappelons les notations et les équations fondammentales des sous-variétés dégénérées. Elles viennent de Duggal et Bejancu [21].
Soient $(\overline{M}, \overline{g})$ une variété semi-riemanienne de dimension $(m+n)$ avec une métrique $\overline{g}$ d'indice constante $q \in \{1, \ldots, m+n-1\}$ et (M, g) une sous-variété de codimension n.

Soit $u \in M$, on définit l'orthogonal $T_xM^{\perp}$ de l'espace tangent T_xM par :

$$T_xM^{\perp} = \{V_x \in T_x\overline{M}, \overline{g}(V_x, W_x) = 0 \ \forall \ W_x \in T_xM\} \tag{5.1}$$

On rappelle,

$$RadT_xM = RadT_xM^{\perp} = T_xM \cap T_xM^{\perp}.$$

On dit que la sous-variété M de $\overline{M}$ est r-dégénérée si l'application

$$RadTM : \ x \in M \longmapsto RadT_xM \tag{5.2}$$

définie une distribution différentielle sur M de rang $r > 0$. Le fibré vectoriel $RadTM$ est appelé distribution radicale de M.

Il existe quatre types de sous-variétés dégénérées

- cas 1. $0 < r < min(m, n)$
- cas 2. $1 \leq r = n < m$
- cas 3. $1 \leq r = m < n$
- cas 4. $1 < r = m = n$.

5.1.1 Les sous-fibrés vectoriels

- Cas 1 ($0 < r < min(n, m)$) M est dite sous-variété proprement dégénérée.

Soit $S(TM)$ le complémentaire orthogonal de $Rad(TM)$ dans TM. Le sous-fibré $S(TM)$ est une distribution non dégénérée et

$$TM = Rad(TM) \perp S(TM). \tag{5.3}$$

Soit $S(TM^{\perp})$ la distribution complémentaire de $Rad(TM)$ dans $TM^{\perp}$, ce qui donne la décomposition suivante :

$$TM^{\perp} = Rad(TM) \perp S(TM^{\perp}). \tag{5.4}$$

Le sous-fibré vectoriel $S(TM^{\perp})$ est appélé fibré vectoriel écran transverse. Comme $S(TM)$, $S(TM^{\perp})$ joue aussi un rôle important dans l'étude de la géométrie des sous-variétés dégénérées. On denote très souvent ces dernières par le quadruplet $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$.

On considère le complémentaire orthogonal $S(TM)^{\perp}$ de $S(TM)$ dans $T\overline{M}$. Les sous-fibrés $S(TM)^{\perp}$ et $S(TM^{\perp})$ sont non dégénérés et vérifient

$$S(TM)^{\perp} = S(TM^{\perp}) \perp S(TM^{\perp})^{\perp}. \tag{5.5}$$

Le sous-fibré $S(TM^{\perp})^{\perp}$ est le complémentaire orthogonal de $S(TM^{\perp})$ dans $S(TM)^{\perp}$.

Théorème 5.1.1 *[21, p.144]*
Soit $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ une sous-variété r-dégénérée ($r \geq 1$) d'une variété semi-riemannienne $(\overline{M}, \overline{g})$ et $\mathcal{U}$ un ouvert de M. Alors il existe un unique sous-fibré $ltr(TM)$ complémentaire de $Rad(TM)$ dans $S(TM^{\perp})^{\perp}$ de rang r tel que

$$\overline{g}(N_i, \xi_j) = \delta_{ij}, \quad et \quad \overline{g}(N_i, N_j) = 0 \tag{5.6}$$

$\{\xi_i\}$ et $\{N_i\}$ sont respectivement des systèmes de repères sur $\Gamma(Rad(TM_{|\mathcal{U}}))$ et $\Gamma(ltr(TM_{|\mathcal{U}}))$.

Le fibré vectoriel $ltr(TM)$, appelé fibré transverse dégénéré de M dépend du couple $(S(TM). S(TM^{\perp}))$.
La décomposition de $T\overline{M}$ donne alors :

$$T\overline{M}_{|M} = TM \oplus tr(TM) = S(TM) \perp S(TM^{\perp}) \perp (Rad(TM) \oplus ltr(TM)) \tag{5.7}$$

Soient U un voisinage ouvert de M et $\{\xi_i, N_i, X_a, W_\alpha\}$ un système quasi-orthogonal relatif à U, où

1. $\{\xi_i\}$ et $\{N_i\}$, $i \in \{1. \dots, r\}$ sont des bases dégénérées de $\Gamma(Rad(TM_{|U}))$ et $\Gamma(tr(TM_{|U}))$ respectivement.
2. $\{X_a\}$, $a \in \{r+1. \dots, m\}$ est une base orthonormée de $\Gamma(S(TM)_{|U})$,
3. $\{W_\alpha\}$, $\alpha \in \{r+1. \dots, n\}$ est une base orthonormée de $\Gamma(S(TM^{\perp})_{|U})$.

- Cas 2. Dans ce cas $Rad(TM) = TM^{\perp}$. M est alors dite coisotrope et $S(TM^{\perp}) = \{0\}$. Les hypersurfaces dégénérées sont des examples de cette catégorie de sous-variété. La relation (5.7) devient

$$T\overline{M}_{|M} = TM \oplus ltr(TM) = S(TM) \perp (Rad(TM) \oplus ltr(TM)) \tag{5.8}$$

- cas 3. $Rad(TM) = TM$. M est alors dite isotrope et $S(TM) = \{0\}$.
Les courbes nulles sont des examples de cette catégorie de sous-variétés.
La relation (5.7) devient alors

$$T\overline{M}_{|M} = TM \oplus tr(TM) = (TM \oplus ltr(TM)) \perp S(TM^{\perp}). \tag{5.9}$$

- cas 4. $Rad(TM) = TM = TM^{\perp}$, M est dite totalement isotrope. Alors

$$T\overline{M}_{|M} = TM \oplus ltr(TM). \tag{5.10}$$

Comme example de cette catégorie, nous avons les géodésiques nulles d'une surface lorentzienne.

5.1.2 Les connexions induites

Soit $\overline{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de $\overline{M}$. Alors on retrouve les relations (1.20) et (1.21) pour les sous-variétés dégénérées qui donnent

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad \forall \ X, Y \in \Gamma(TM) \tag{5.11}$$

et

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^t_X V \quad \forall \ X \in \Gamma(TM), \ V \in \Gamma(tr(TM)) \tag{5.12}$$

où $\{\nabla_X Y, A_V X\}$ et $\{h(X,Y), \nabla^t_X V\}$ appartiennent à $\Gamma(TM)$ et $\Gamma(tr(TM))$ respectivement. On suppose que $S(TM^{\perp}) \neq \{0\}$ et on note L et S les projections respectives de $tr(TM)$ sur $ltr(TM)$ et $S(TM^{\perp})$.

$$\begin{aligned} L : tr(TM) &\longrightarrow ltr(TM) \\ S : tr(TM) &\longrightarrow S(TM^{\perp}). \end{aligned}$$

Alors la relation (5.11) devient

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^l(X, Y) + h^s(X, Y), \quad \forall \ X, Y \in \Gamma(TM) \tag{5.13}$$

où $h^l(X, Y) = L(h(X, Y))$, $\quad h^s(X, Y) = S(h(X, Y))$.
De même la relation (5.12) est donnée par

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + D^l_X V + D^s_X V, \quad \forall \ X \in \Gamma(TM), \ V \in \Gamma(tr(TM)) \tag{5.14}$$

où $D^l_X V = L(\nabla^t_X V)$; $D^s_X V = S(\nabla^t_X V)$
Les opérateurs D^l et D^s sont appelés des connexions (non linéaires) d'Otsuki sur le fibré vectoriel transverse par rapport aux morphismes de fibrés L et S [21, p. 27].
De ces connexions, on définit les opérateurs différentiels suivants : Pour tout $X \in \Gamma(TM)$

$$\nabla^l_X : \Gamma(ltr(TM)) \longrightarrow \Gamma(ltr(TM)), \qquad \nabla^l_X(LV) = D^l_X(LV) \tag{5.15}$$

et

$$\nabla^s_X : \Gamma(S(TM^{\perp})) \longrightarrow \Gamma(S(TM^{\perp})), \qquad \nabla^s_X(SV) = D^s_X(SV) \tag{5.16}$$

pour tout $V \in \Gamma(tr(TM))$.

Proposition 5.1.1 .
Les connexions ∇^l et ∇^s sont des connexions linéaires sur $ltr(TM)$ et $S(TM^{\perp})$ respectivement. On les appelle connexions isotrope et écran transverse.

On définit les aplications bilinéaires suivantes :

$$D^l : \Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM^\perp)) \longrightarrow \Gamma(ltr(TM)), \quad D^l(X, SV) = D^l_X(SV) \tag{5.17}$$

$$D^s : \Gamma(TM) \times \Gamma(ltr(TM)) \longrightarrow \Gamma(S(TM^\perp)), \quad D^s(X, LV) = D^s_X(LV) \tag{5.18}$$

pour $X \in \Gamma(TM)$ et $V \in \Gamma(tr(TM))$. Ainsi la relation (5.14) s'écrit

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + D^l(X, SV) + D^s(X, LV) + \nabla^l_X(LV) + \nabla^s_X(SV) \tag{5.19}$$

Ces différents objets géométriques vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\overline{g}(h^s(X,Y), W) + \overline{g}(Y, D^l(X, W)) &= \overline{g}(A_W X, Y) && (5.20)\\
\overline{g}(h^l(X,Y), \xi) + \overline{g}(Y, h^l(X,\xi)) &+ \overline{g}(Y, \nabla_X \xi) = 0 && (5.21)\\
\overline{g}(W, D^s(X, N)) &= \overline{g}(A_W X, N) && (5.22)\\
\overline{g}(A_N X, N') &= \overline{g}(A_{N'} X, Y) && (5.23)\\
\overline{g}(A_N X, PY) &= \overline{g}(N, \nabla_X PY) && (5.24)\\
h^l_i(X, \xi_j) &= h^l_j(X, \xi_i) && (5.25)
\end{aligned}$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$, $\xi_i \in \Gamma(Rad(TM))$, $W \in \Gamma(S(TM^\perp))$ et les h_i sont telles que

$$h_i(X,Y) = g(\overline{\nabla}_X Y, \xi_i) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM). \tag{5.26}$$

En considérant l'équation (5.26), on en déduit que les h^l_i ne dépendent pas de $S(TM)$, $S(TM^\perp)$ et de $ltr(TM)$. De plus ils s'annulent sur le radical $Rad(TM)$.

Proposition 5.1.2 .
La seconde forme fondamentale isotrope h^l est identiquement nulle pour les sous-variétés complètement isotropes et totalement isotropes.

Preuve
En considérant les relations (5.21) et (5.25) et en posant $X = \xi_i, Y = \xi_j$ et $\xi = \xi_i$, on en déduit

$$h^l_i(\xi_i, \xi_j) + h^l_j(\xi_j, \xi_i) = 0 \quad \text{et} \quad h^l_i(\xi_i, \xi_j) = h^l_j(\xi_j, \xi_i).$$

Alors $h^l_i(\xi_i, \xi_j) = h^l_j(\xi_j, \xi_i) = 0$ pour $i, j = 1, \ldots, r$. □

Il est à noter qu'en général les connexions ∇ induite sur M et transverse ∇^t de $tr(TM)$ ne sont pas métriques. Ainsi

$$(\nabla_X g)(X, Y) = \overline{g}(h^l(X,Y), Z) + \overline{g}(h^l(X, Z), Y) \tag{5.27}$$

et

$$\nabla^t_X(\overline{g})(V,V') = -(\overline{g}(A_V X, V') + \overline{g}(A_{V'}X, V)) \tag{5.28}$$

En conséquence, nous avons

Proposition 5.1.3 .

1. *Les connexions induites sur les sous-variétés complètement isotropes et totalement isotropes sont métriques.*
2. *Les sous-variétés r-dégénérées et coisotropes admettent des connexions induites métriques si et seulement si h^l est identiquement nulle sur M.*
3. *La géométrie des sous-variétés coisotropes est indépendante de la distribution écran.*

Preuve

1. Si M est complètement isotrope alors d'après la proposition 5.1.2, $h^l = 0$. Ainsi la relation (5.27) nous donne $\nabla g = 0$.
2. Il se déduit directement de la relation (5.27).
3. La preuve vient de la relation (5.26).□

Théorème **5.1.2** *[21, p. 159]*
Soit M^m une sous-variété proprement r-dégénérée ou une sous-variété complètement isotrope de $\overline{M}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) ∇^t est une connexion linéaire métrique sur $tr(TM)$.
ii) D^s est une connexion d'Otsuki métrique sur $tr(TM)$
iii) A_W est un opérateur linéaire à valeur dans $\Gamma(S(TM))$ pour $W \in \Gamma(S(TM-))$.
iv) $D^s(X, LV) = 0$ pour $X \in \Gamma(TM)$ et $V \in \Gamma(tr(TM))$.
v) Le fibré transverse dégénéré $ltr(TM)$ est parallèle par rapport à ∇^t.

Définition 5.1.1 .
Soit $f : M^m \longrightarrow M^{m+n}$ une immersion isométrique d'une variété r-isotrope $(1 \le r \le min(m,n))$ de dimension m dans une variété semi-riemannienne de dimension $(m+n)$, le premier espace transverse de f est défini par

$$T_1(x) = span\{h^l(X,Y) + h^s(X,Y), \quad X, Y \in T_x M\} \quad \forall x \in M$$

Lemme 5.1.1 .

Si la connexion induite ∇ sur M et la connexion transverse sont métriques, alors le premier espace transverse $T_1(x)$ de f se caractérise par :

$$T_1(x) = \{W \in S(T_xM^{\perp}) \subset tr(T_xM), D^l(.,W) = 0 \quad et \quad A_W = 0\}^{\perp}$$

pour tout $x \in M$

Preuve

Notons que ∇ est métrique si et seulement si $h^l = 0$.

Posons $N(x) = \{W \in S(T_xM^{\perp}) \subset tr(T_xM), D^l(.,W) = 0 \quad et A_W = 0\}^{\perp}$. Soit $V \in T_1(x)$ tel que $V = h^s(X,Y)$ et soit $W \in N^{\perp}(x)$.

$$\begin{aligned} \overline{g}(V,W) = \overline{g}(h^s(X,Y),W) &= \overline{g}(A_WX,Y) - \overline{g}(D^l(X,W),Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\forall\, V \in T_1(x)\ \overline{g}(V,W) = 0$, $\forall\, W \in N^{\perp}(x)$ et $\forall x \in M$.

ce qui implique que $V \in (N^{\perp}(x))^{\perp} = N(x)$.

Reciproquement soit $V \in T_1^{\perp}(x)$ tel que $\forall\, X,Y \in T_xM$

$$\overline{g}(h^s(X,Y),V) = \overline{g}(A_VX,Y) - \overline{g}(D^l(X,V),Y) = 0.$$

Si $Y \in Rad(T_xM)$, alors $\overline{g}(D^l(X.V.,Y) = 0$ et $D^l(X,.) = 0$ pour tout X.

Si $Y \in S(T_xM)$, alors $\overline{g}(A_VX,Y) = 0$ et $A_V = 0$.

Ainsi $V \in N^{\perp}(x)$ et $N(x) = (N^{\perp})^{\perp} x) \subset T_1(x)$ □

Corollaire 5.1.1 *[21].*

Si M est complètement isotrope et que ∇^t est métrique, alors M est totalement géodésique si et seulement si $D^l(.,W) = 0$ pour tout $W \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$.

Preuve

Si ∇^t est métrique alors d'après le thèoreme 5.1.2 $A_W \in \Gamma(S(TM))$ et M est complètement isotrope implique que $S(TM) = \{0\}$. Donc $A_W = 0\ \forall W \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$.

De plus M est complètement isotrope implique que ∇ est métrique. D'après le lemme précédent on a le résultat. □

5.2 Les résultats obtenus

5.2.1 Les sous-variétés r-dégénérées

Théorème 5.2.1 .

Soit $f : M^m \longrightarrow \overline{M}^{m+n}$ une immersion isométrique d'une sous-variété r-dégénérée

$(1 \leq r \leq m, \quad r \neq n)$ $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ dans une variété semi-riemannienne $(\overline{M}_c^{m+n}, \overline{g})$ complète, simplement connexe et à courbure sectionnelle constante c. On suppose que

1. *La connexion linéaire induite ∇ sur M et la connexion linéaire transverse ∇^t sur le fibré transverse $tr(TM)$ sont métriques.*
2. *Il existe un sous-fibré écran transverse P de $S(TM^{\perp})$ de rang constant p $(p < n)$, parallèle par rapport à la connexion ∇^s sur $S(TM^{\perp})$, tel que*

$$T_1(x) \subset P(x) \quad \forall x \in M$$

où $T_1(x)$ est le premier espace transverse de f en $x \in M$.

Alors la codimension de f peut être réduite à p.

Preuve

Le théorème comporte deux parties. La première partie est celle du cas complètement isotrope $(r = m \neq n)$. C'est le théorème 1 de [4]. La deuxième partie est le cas proprement r-dégénéré $(r < m)$ mais les preuves des deux parties sont similaires.

1^ere^ partie $r = m \neq n$, M^m est complètement isotrope. Pour ce cas $S(TM) = \{0\}$, ∇ est métrique et $A_W = 0$, $\quad W \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$. Ce qui montre que les hypothèses du théorème se ramenent aux hypothèses du cas complètement isotrope.

2^e^ partie $r < m$

Rappelons que P est dite parallèle par rapport à ∇^s si $\forall X \in \Gamma(TM)$ et $\forall W \in \Gamma(P)$, $\nabla^s_X W \in \Gamma(P)$.

Comme c est supposée constante, la preuve se fera en trois étapes.

Cas $c = 0$

La considération de ce cas permet d'identifier en chaque point l'espace tangent et la variété. Donc pour tout x_0, le vecteur $f(x_0)$ sera considéré comme vecteur de $T_{x_0}M$.

Soit x_0 un point quelconque de M. Il s'agit ici de montrer que $f(M) \subset T_{x_0}M \oplus P(x_0)$. Soit η un vecteur du complémentaire orthogonal $P^{\perp}(x_0)$ de $P(x_0)$ dans $S(TM^{\perp})$ et η_t le vecteur obtenu par transport parallèle du vecteur η dans $\Gamma(P^{\perp})$ le long d'une courbe quelconque $\gamma : I \longrightarrow M$ (I est un intervalle de $\mathbb{R}$) passant par x_0.

Comme $\overline{g}$ est non dégénérée sur $S(TM^{\perp})$ alors si P est parallèle, $P^{\perp}$ est aussi parallèle. Ainsi $\eta_t = \nabla^s_{\dot\gamma}\eta \in \Gamma(P^{\perp}(\gamma(t)))$ $\forall t \in I$

$$\overline{\nabla}_{\dot\gamma}\eta_t = -A_{\eta_t}\dot\gamma + D^l(\dot\gamma, \eta_t) + \nabla^s_{\dot\gamma}\eta_t$$

$\eta_t = \nabla^s_{\dot\gamma}\eta \in \Gamma(P^{\perp}(\gamma(t))) \Longrightarrow A_{\eta_t}\dot\gamma = 0$ et $D^l(\dot\gamma, \eta_t) = 0$.

Comme η_t est obtenu par transport parallèle de η le long de γ dans $\Gamma(P^{\perp})$ alors $\nabla^s_{\dot\gamma}\eta_t = 0$, $\forall t \in I$.

On a alors $\overline{\nabla}_{\dot\gamma}\eta_t = 0 \Longrightarrow \eta_t = \eta = cste$ dans $\mathbb{R}^{m+n}$(car $c = 0$ et $M^{m+n} = \mathbb{R}^{m+n}$).

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{g}(f(\gamma(t)) - f(x_0), \eta_t)\right) = g(f_*\dot\gamma, \eta) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad f(\gamma(t)) - f(x_0) \in \left(P^{\perp}(\gamma(t))\right)^{\perp} = P(\gamma(t))$$

Comme γ et η sont arbitraires alors

$$f(M) \subset T_{x_0}(M) \oplus P(x_0) \equiv \mathbb{R}^{m+p}$$

et $\mathbb{R}^{m+p}$ est totalement géodésique dans $\mathbb{R}^{m+n}$.

<u>Cas c > 0</u>

La sous-variété M^m est isométriquement immergé dans la pseudo-sphère S^{m+n} par l'immersion $f : M^m \longrightarrow S_q^{m+n}$. Notons $i : S_q^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}_q^{m+n+1}$ l'injection canonique de S_q^{m+n} dans $\mathbb{R}_q^{m+n+1}$. On considére alors l'immersion isométrique $\widehat{f} = i \circ f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}_q^{m+n+1}$.

On a alors les fibrés correspondants qui donnent pour tout $x \in M$:

$tr(\widehat{T}_x M) = tr(T_x M) \oplus < f(x) >$ où $< f(x) >$ est le sous-espace engendré par le vecteur position $\{f(x)\}$ dans $S(\widehat{T}M^{\perp})$.

On en déduit alors que

$$\widehat{T}_1(x) = T_1(x) \ominus < f(x) > \subset \ P(x) \oplus < f(x) > = \ \widehat{P}(x).$$

Les sous-espaces complémentaires de $\widehat{P}(x)$ dans $S(\widehat{T}_x M^{\perp})$ et de $P(x)$ dans $S(T_x M^{\perp})$ sont égaux et parallèles par rapport à $\widehat{\nabla}^s_{|S(T_x M^{\perp})} = \nabla^s$.

Comme $< f(x) > \subset \widehat{P}(x)$ et que $\widehat{P}(x)^{\perp} \subset S(\widehat{T}M^{\perp})$ est parallèle par rapport à $\widehat{\nabla}^s$ alors $\forall\ X \in \Gamma(TM)$ et $W \in \Gamma(\widehat{P}(x)^{\perp})$,

$$\begin{aligned} \overline{g}(\widehat{\nabla}^s_X f(x), W) &= \overline{\nabla}_X \overline{g}(f(x), W) - \overline{g}(f(x), \widehat{\nabla}^s_X W) \ (car\ \overline{g}(f(x), W) = 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\widehat{\nabla}^s_X f(x) \in \widehat{P}(x)$. D'où $\widehat{P}(x)$ est parallèle par rapport à $\widehat{\nabla}^s$.

Comme $ltr(T_x M) = ltr(\widehat{T}_x M)$ est parallèle, alors $\forall N \in ltr(T_x M)$

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X < f(x), N > &= 0 \\ &= < \overline{\nabla}_X f(r), N > + < f(x), \overline{\nabla}_X N > \\ &= - < \widehat{A}_{f(x)} X. N > \end{aligned}$$

Ainsi $\widehat{\nabla}^t$ est une connexion métrique . Comme au cas $c = 0$ on obtient

$$\widehat{f}(M) \subset \widehat{T}_x M \oplus \widehat{P}(x) = T_x M \ominus P(x) \oplus f(x) \cong \mathbb{R}_q^{m+p+1}$$
$$f(M) \subset S_q^{m+p} \cap \mathbb{R}_q^{m+p+1}.$$

Ce qui achève la preuve pour le cas $c \geq 0$.

<u>Cas c < 0</u>

La preuve de ce cas est identique à celle du cas $c > 0$. On utiise l'immersion de M^m dans $\mathbb{R}_{q+1}^{m+n+1}$ (cas c = 0) On considère l'immersion $\hat{f} = M^m \longrightarrow \mathbb{R}_{q+1}^{m+n+1}$ telle que $\hat{f} = i \circ f$ où

$i : \mathbb{H}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}_{q+1}$ est l'injection canonique de l'espace pseudo-hyperpobilique $\mathbb{H}^{m+n}$ dans $\mathbb{R}^{m+n+1}_{q+1}$. On a

$$\hat{f}(M) \subset \hat{T}_x M \oplus \hat{P}(x) = T_x M \ominus P(x) \ominus f(x) \cong \mathbb{R}^{m+p+1}$$
$$f(M) \subset \mathbb{H}^{m+n}_q \cap \mathbb{R}^{m+n+1}_{q+1}.$$

Ce qui achève la preuve du théorème. □

Théorème 5.2.2 .
Soit $f : M^m \longrightarrow \overline{M}^{m+n}$ une immersion isométrique d'une sous-variété r-dégénérée ($r \leq m$, $r \neq n$) $(M, g, S(TM), S(TM^\perp))$ dans une variété semi-riemannienne $(\overline{M}_c^{m+n}, \overline{g})$ complète, simplement connexe non totalement géodésique et à courbure sectionnelle constante c. Si ∇ et ∇^t sont métriques, alors il existe un entier naturel p ($p \leq n - r$) tel que M^m admet une réduction de sa codimension à p.

Preuve
Si ∇ et ∇^t sont métriques alors $ltr(TM)$ est parallèle par rapport à ∇^t. Donc $S(TM^\perp)$ est parallèle par rapport à ∇^t, en particulier parallèle par rapport à ∇^s. Puisque $T_1(x) \subset S(T_x M^\perp)$ et $S(TM^\perp)$ est de rang constant $n - r$ alors s'il existe une distribution P parallèle par rapport à ∇^s de rang constant p et telle que $T_1(x) \subset P(x) \subseteq S(T_x M^-)$ (La distribution P peut être égale à $S(TM)$). Alors f admet une réduction de codimension à p $(0 < p \leq n - r)$.
□

Corollaire 5.2.1 .
Si f est une immersion 1-régulière. et que $T_1 = S(TM^\perp)$ alors la codimension de f peut être réduite à $(n - r)$.

Exemple 5.2.1 .
On considère la surface M de $\mathbb{R}^4_2$, espace euclidien de $\mathbb{R}^4$ muni d'une métrique semi-riemannienne de signature $(-, -, +, +)$, définie par les équations[21. p.151] :

$$\begin{cases} x^1 &= v^1 \\ x^2 &= v^2 \\ x^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + x^2) \\ x^4 &= \frac{1}{2}\log(1 + (x^1 - x^2)^2) \end{cases} \tag{5.29}$$

$TM = vect\{V_1, V_2\}$
où

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial v^1} = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{x^1 - x^2}{1 + (x^1 - x^2)^2}\frac{\partial}{\partial x^4}$$
$$V_2 = \frac{\partial}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{x^1 - x^2}{1 + (x^1 - x^2)^2}\frac{\partial}{\partial x^4}$$

t $TM^{\perp} = vect\{H_1, H_2\}$,
avec

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\partial}{\partial x^1} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x^3} \\ H_2 &= 2(x^2 - x^1)\frac{\partial}{\partial x^2} + \sqrt{2}(x^2 - x^1)\frac{\partial}{\partial x^3} + (1 + (x^2 - x^1)^2)\frac{\partial}{\partial x^4}. \end{aligned}$$

De plus $H_1 = V_1 + V_2$, *et*

$$Rad(TM) = TM \cap TM^{\perp} = vect\{\xi = H_1\}$$

est une distribution de rang constant égal à 1.

Alors la surface M *est une surface* 1*-dégénérée de* $\mathbb{R}^4_2$. *Le sous-fibré* $S(TM^{\perp})$, *complémentaire du radical* $rad(TM)$ *dans* $TM^{\perp}$ *est engendré par* H_2.

$$S(TM^{\perp}) = vect\{H_2\}.$$

La construction du fibré transverse dégénéré, $ltr(TM)$ *donne :*

$$ltrTM = vect\{N = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x^3}\}$$

avec $\overline{g}(N, N) = 0, \quad \overline{g}(N, \xi) = 1$
Posons $H_1 = \xi$, $H_2 = W_2$ *et* $U = \sqrt{2}(1 + (x^1 - x^2))V_2$.
Ainsi

$$tr(TM) = ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}) = vect\{N, W\}.$$

Par un calcul direct on a :

$$\overline{\nabla}_U U = 2(1 + (x^2 - x^1)^2)\{2(x^2 - x^1)\frac{\partial}{\partial x^2} + \sqrt{2}(x^2 - x^1)\frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^4}\}$$

$\overline{\nabla}_\xi U = \overline{\nabla}_X \xi = \overline{\nabla}_X N = 0 \qquad \forall X \in \Gamma(TM)$
En utilisant les relations de Gauss et de Weigenten, on obtient

$$h^l = 0, \quad h^s(X, \xi) = 0, \quad h^s(U, U) = W$$

$$\nabla_X U = \frac{2\sqrt{2}(x^1 - x^2)^3}{1 + (x^1 - x^2)^2} X^2 U \quad avec \quad X = X^1\xi + X^2 U \in \Gamma(TM)$$

$A_\xi = 0, \quad D^l(X, W) = 0, \quad A_W \xi = 0$ *et* $A_W U = -2U$

Conclusion

La surface M *est non totalement géodésique et les connexions induites* ∇ *et transverse* ∇^t *sont métriques. Le premier espace transverse est donné par*

$$T_1(x) = \{h^s(X, Y), X, Y \in \Gamma(TM)\} = S(T_x M^{\perp}).$$

La distribution T_1 *est de rang constant* 1. *Donc la codimension de* M *peut être réduit à* 1.

Contrexemple

Nous construisons un exemple qui montre la pertinence de l'hypothèse sur la connexion transverse métrique. On considère une surface M de l'espace semi-eucludien $\mathbb{R}^5_2$ muni de la métrique $\overline{g}$ de signature $(-,-,+,+,+)$. La surface M est définie par l'immersion isométrique suivante.

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R}^4_2 \\ (v^1, v^2) & \longmapsto & (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \end{array}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^1 & = & v^1 + v^2 \\ x^2 & = & \cosh(v^1 + v^2) \\ x^3 & = & v^2 \\ x^4 & = & \sinh(v^1 + v^2) \\ x^5 & = & v^2. \end{array} \right.$$

Le fibré tangent TM est donné par $TM = span\{V_1, V_2\}$
où

$$\begin{array}{rl} V_1 = & (1, x^4, 0, x^2, 0) \\ V_2 = & (1, x^4, 1, x^2, 1) \end{array}$$

et le fibré cotangent est donné par and $TM^{\perp} = span\{H_1, H_2, H_3\}$,
où

$$\begin{array}{lcl} H_1 & = & (0, 0, -1, 0, 1) \\ H_2 & = & (x^2, 0, 0, 1, 0) \\ H_3 & = & (-x^4, 1, 0, 0, 0). \end{array}$$

On obtient alors le fibré radical

$$Rad(TM) = TM \cap TM^{\perp} = span\{\xi = V_1 = x^2 H_2 + x^4 H_3\}.$$

Il est de rang constant égal à 1.

La surface M est alors une surface 1-dégénérée de $\mathbb{R}^5_2$. Le sous-fibré vectoriel $S(TM^{\perp})$, complémentaire du radical $rad(TM)$ dans $TM^{\perp}$ est engendré par

$$S(TM^{\perp}) = span\{W_1, W_2\}$$

où

$$W_1 = (0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad W_2 = (-\frac{x^4}{x^2}, \frac{1}{x^2}, 0, 0, 0)$$

La construction du sous-fibré transversal $ltr(TM)$ donne :

$$ltrTM = span\{N = \frac{1}{4}\left(2\frac{(x^4)^2}{(x^2)^2} - 3, -2\frac{x^4}{(x^2)^2} - x^4, -2, \frac{1-(x^4)^2}{x^2}, -2\right)\}$$

et $\overline{g}(N,N) = 0$, $\quad \overline{g}(N,\xi) = 1$.
Alors

$$tr(TM) = ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}) = span\{N, W_1, W_2\}.$$

Un calcul très facile donne

$$\overline{\nabla}_{V_i}V_j = \frac{x^4}{x^2}V_1 + W_2$$

$$\overline{\nabla}_{V_i}N = \frac{1}{4}\left(4\frac{x^4}{(x^2)^3}, \frac{2(x^4)^2-(x^2)^4-2}{(x^2)^3}, 0, \frac{(x^4)((x^2)^2-2)}{(x^2)^2}, 0\right)$$

En utilisant les rélations de Gauss Weingarten on obtient

$$h^l = 0, \quad h^s(V_i,V_j) = W_2$$

$$D^s(V_i,N) = -\frac{(x^2)^2+2}{4(x^2)2}, \ \overline{g}(\overline{\nabla}_{V_i}N, V_j) = -\frac{x^4}{x^2}; \ \overline{g}(\overline{\nabla}_{V_i}N,N) = 0$$

$$A_N V_i = -\frac{x^4}{x^2}V_2; \quad D^l(X,W) = 0. \quad A_{W_2}V_i = \frac{1}{4}\left(2(\frac{x^4}{x^2})^2 - 3\right)V_1 + V_2 \text{ and}$$

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_X W_i, W_j) = \overline{g}(\overline{\nabla}_{V_i}N, W_i) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X N, N) = 0 \ ; \ \overline{g}(\overline{\nabla}_{V_i}W_2, N) = \frac{1}{4}\left(2(\frac{x^4}{x^2})^2 - 3\right).$$

Conclusion

La surface M n'est pas non totalement géodésique. La connexion induite ∇ est métrique. Mais la connexion transverse ∇^t n'est pas métrique. Le premier espace transverse est donné par

$$T_1(x) = \{h^s(X,Y), X,Y \in \Gamma(TM)\} = \{W_2\}.$$

La distribution T_1 est de rang constant égal à 1. Conséquence la codimension de M ne peut pas être réduite à 1.

Corollaire 5.2.2 .

La variété obtenue après réduction, Q^{m+p} contenant $f(M^m)$ et totalement géodésique dans $\overline{M}^{m+n}$ est une sous-variété dégénérée de $\overline{M}^{m+n}$.

De plus

- *Si $p < n-r$, alors Q^{m+p} est r-dégénérée.*
- *Si $p = n-r$, alors Q^{m+p} est coisotrope.*

Preuve

Puisque $h^l = 0$ et $T_1(x) \subset P(x) \subset S(TM^{\perp})$, on a alors $\forall\, x \in M$, $\ T_xM \oplus P(x)$ contient r-vecteurs dégénérés. D'où Q est r-dégénérée.

Puisque

$$T_xQ = T_xM \oplus P(x) = S(T_xM) \oplus Rad(T_xM) \oplus P(x), \quad \forall\, x \in M.$$

De plus

$$T_x\overline{M} = T_xM \oplus P(x) \oplus P^{\perp}(x) \ominus ltr(T_xM) = T_xQ + \overline{tr(T_xM)}, \quad \forall\, x \in M.$$

où $\overline{tr(T_xM)} = P^{\perp}(x) \oplus ltr(T_xM)$.
Si $p < n - r$, alors le rang de $P^{-}(x)$ est non nul. Donc Q est une variété r-proprement dégénérée.
Si $p = n - r$, alors le rang de $P^{\perp}(x)$ est nul et $\overline{tr(T_xM)} = ltr(T_xM)$. Donc Q est alors une variété coisotrope.□

5.2.2 Les sous-variétés coisotropes

Définition 5.2.1 .
Soit $f : M^m \longrightarrow M^{m+n}$ une immersion isométrique d'une variété coisotrope $(M^m, S(TM), g)$ de dimension m dans une variété semi-riemannienne de dimension $(m+n)$. On suppose que la connexion induite ∇ n'est pas métrique. Le premier espace radical de f est défini par

$$R_1(x) = Span\{\xi \in Rad(T_xM),\ \exists X \in T_xM \text{ et } \dot{A}_\xi X \neq 0\}$$

Théorème 5.2.3 .
Soit $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}_q^{m+n}$ une immersion isométrique non totalement géodésique d'une sous-variété dégénérée coisotrope $(M, g, S(TM))$ dans une variété semi-riemannienne $(\mathbb{R}_q^{m+n}, \overline{g})$ complète, simplement connexe et à courbure sectionnelle constante c. On suppose qu'il existe un sous-fibré radical P de $Rad(TM)$ de rang constant p $(p < n)$, parallèle par rapport à la connexion $\dot{\nabla}^t$ sur $Rad(TM)$, tel que

$$R_1(x) \subset P(x), \quad \forall x \in M$$

et que tout complementaire de $P(x)$ dans $Rad(T_xM)$ est parallèle par rapport à $\dot{\nabla}^t$. Alors la codimension de f peut être réduite à p.

Pour la preuve du théorème nous allons avoir besoin des lemmes suivants.

Lemme 5.2.1 .
Si M^m est une sous-variété coisotrope non totalement géodésique, alors pour tout $x \in M$, l'ensemble $R_1(x)$ caractérise le premier espace $T_1(x)$.

preuve
Soient $x \in M$ et π_x la projection de T_xM sur $S(T_xM)$. Si $U \in T_1(x)$, alors il existe $X, Y \in T_xM$ tels que $U = h^l(\pi_xY, X)$ et $\xi \in rad(T_xM)$ tel que $g(h^l(\pi_xY, X), \xi) \neq 0$.

Donc $g(h^l(X,(\pi_x Y)),\xi) = g(\dot{A}_\xi X, \pi_x Y) \neq 0$ (voir la relation (5.21)). Ainsi $\dot{A}_\xi X \neq 0$, d'où $\xi \in R_1(x)$. Réciproquement, si $\xi \in R_1(x)$ alors il existe $X \in T_xM$ tel que $\dot{A}_\xi X \neq 0$. Donc $g(\dot{A}_\xi X, \dot{A}_\xi X) = g(h(X, \dot{A}_\xi X), \xi) \neq 0$ et $U = h(X, \dot{A}_\xi X) \in T_1(x)$. □

Définition 5.2.2 *Les sous-fibrés P de $Rad(TM)$ et $\widetilde{P}$ de $ltr(TM)$ sont dit correspondants si pour tout $x \in M$, $\xi \in P(x)$, $\exists N \in \widetilde{P}(x)$ tel que $\overline{g}(N,\xi) \neq 0$ et pour tout $N \in ltr(T_xM)\backslash P(x)$, $\overline{g}(N,\xi) = 0$ et vice versa.*

Lemme 5.2.2 .
Si $P(x)$ est parallèle par rapport à $\dot{\nabla}^t$ alors son correspondant $\widetilde{P}(x) \supset T_1(x)$ est aussi parallèle par rapport ∇^t.

Preuve
Soit $x \in M$, on note $\overline{P}(x)$ un complémentaire de $P(x)$ dans $Rad(T_xM)$. Si $P(x)$ est parallèle, $\overline{P}(x)$ est aussi parallèle. Si $\xi \in \overline{P}(x)$, alors $\dot{A}_\xi = 0$. Donc $\forall U \in \widetilde{P}(x)$, $\overline{g}(\xi, U) = 0$ et $\forall X \in T_xM$,

$$\overline{\nabla}_X \overline{g}(\xi, U) = 0 \iff \overline{g}(\dot{\nabla}^t_X \xi, U) + \overline{g}(\xi, \nabla^t_X U) = 0$$
$$\iff \overline{g}(\dot{\nabla}^t_X \xi, U) = -\overline{g}(\xi, \nabla^t_X U) = 0$$

$\overline{g}(\xi, \nabla^t_X U) = 0 \iff \nabla^t_X U \in \widetilde{P}(x)$. D' où $\widetilde{P}(x)$ est parallèle □

Preuve du théorème 5.2.3
Soit $x \in M$. Nous allons montrer que $f(M) \subset T_xM \oplus \widetilde{P}(x)$ et que $T_xM \ominus \widetilde{P}(x)$ est totalement géodésique dans $\mathbb{R}^{m+n}_q$ où $\widetilde{P}(x)$ est le correspondant de $P(x)$ contenant $T_1(x)$.
Soit η un vecteur de $\overline{P}(x) = Rad(T_xM)\backslash P(x)$ le complémentaire de $P(x)$ dans $Rad(T_xM)$ et η_t le transport parallèle de η dans $\overline{P}$ le long d'une courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ ($I \subset \mathbb{R}$) passant par x. La relation (5.11) donne

$$\overline{\nabla}_{\dot\gamma}\eta_t = \nabla_{\dot\gamma}\eta_t + h^l(\dot\gamma, \eta_t) \quad \forall\, t \in I.$$

La relation de Weingarten conformément à la décomposition (5.2) donne

$$\nabla_{\dot\gamma}\eta_t = -\dot{A}_{\eta_t}\dot\gamma + \dot{\nabla}_{\dot\gamma}\eta_t$$

$\eta_t \in \Gamma(\overline{P}) \Longrightarrow \dot{A}_{\eta_t}\dot\gamma = 0$. Comme η_t est obtenu par transport parallèle de η le long de γ dans $\Gamma(\overline{P})$ alors $\dot{\nabla}^t_{\dot\gamma}\eta_t = 0$, $\forall t \in I$. On a alors $\nabla_{\dot\gamma}\eta_t = 0$.
D'après la relation (5.21), $h(\eta_t, \dot\gamma) = 0$, d' où $\overline{\nabla}_{\dot\gamma}\eta_t = 0 \Longrightarrow \eta_t = \eta = cste$.

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{g}\left(f(\gamma(t)) - f(x), \eta_t\right)\right) = \overline{g}(f_*\dot\gamma, \eta) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad f(\gamma(t)) - f(x) \in \widetilde{P}(\gamma(t))$$

Comme γ et η sont arbitraires alors

$$f(M) \subset T_x(M) \oplus \widetilde{P}(x) \equiv \mathbb{R}^{m+p}$$

et $\mathbb{R}^{m+p}$ est totalement géodésique dans $\mathbb{R}^{n+m}$

Ce qui achève la preuve du théorème. □

Corollaire 5.2.3 *Si f est 1-régulière avec R_1 de rang p et tel que R_1 et tout complementaire de R_1 dans $Rad(TM)$ sont chacun parallèles par rapport à $\dot{\nabla}^t$ alors la codimension de f peut être réduit à p.*

Corollaire 5.2.4 .
Si f est une immersion 1-régulière et que

$$R_1(x) = Rad(T_x M) \quad \forall x \in M,$$

alors f n'admet pas de réduction de sa codimension.

Exemple 5.2.2 .
On considère la sous-variété M de $\mathbb{R}^5_2$, espace euclidien de $\mathbb{R}^5$ muni d'une métrique semi-riemannienne de signature $(-,-,+,+,+)$, définie par les équations [21, p.152] :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^1 & = & u \\ x^2 & = & ((v^1)^2 + (v^2)^2)^{\frac{1}{2}} \\ x^3 & = & v^1 \\ x^4 & = & u \\ x^5 & = & v^2 \end{array}\right. \qquad x^3 > 0,\ x^5 > 0. \tag{5.30}$$

Le fibré tangent est donné par $TM = vect\{U_1, U_2, U_3\}$ où

$$\begin{aligned} U_1 = \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^4} \\ U_2 = \frac{\partial}{\partial v^1} &= \frac{x^3}{x^2}\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \\ U_3 = \frac{\partial}{\partial v^2} &= \frac{x^5}{x^2}\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^5} \end{aligned}$$

et le fibré cotangent est $TM^\perp = vect\{\xi_1 = U_1, \xi_2 = x^3 U_2 + x^5 U_3\}$.
On a le fibré radical $Rad(TM) = TM \cap TM^\perp = TM^\perp$. Alors la sous-variété M est coisotrope.
La construction du fibré transverse dégénéré, $ltr(TM)$ donne :

$$ltrTM = vect\{N_1, N_2\} \qquad \text{où}$$

$N_1 = \frac{1}{2}(-\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^4})$ et $N_2 = \frac{1}{2(x^3)^2}(-x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3} - x^5\frac{\partial}{\partial x^5})$

avec $\overline{g}(N_i, N_j) = 0, \quad \overline{g}(N_i, \xi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2$

On considère alors que $TM = vect\{\xi_1, \xi_2, V\}$ *où* $V = x^2 U_3$. *Par un calcul direct dans* $\mathbb{R}^5_2$, *on obtient*

$$\overline{\nabla}_V \xi_1 = \overline{\nabla}_{\xi_2}\xi_1 = \overline{\nabla}_{\xi_1}\xi_2 = \overline{\nabla}_{\xi_1}V = 0, \quad \overline{\nabla}_V\xi_2 = V.$$
$$\overline{\nabla}_{\xi_2}\xi_2 = \xi_2, \quad \overline{\nabla}_{\xi_2}V = V, \quad \overline{\nabla}_V V = x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^5\frac{\partial}{\partial x^5}.$$

Ainsi les formule de Gauss et de Weingarten donnent

$\nabla_V\xi_2 = V, \quad \nabla_{\xi_1}\xi_2 = \nabla_{\xi_1}V = 0, \quad \nabla_{\xi_2}\xi_2 = \xi_2, \quad \nabla_{\xi_2}V = V,$

$\nabla_V V = \frac{1}{2}\xi_2, \quad \nabla_X\xi_1 = 0, \qquad \forall\, X \in \Gamma(TM)$

et

$$h_1^l(X,Y) = 0, \quad h_2^l(X,\xi) = 0, \quad h_2^l(V,V) = -(x^3)^2 \neq 0, \quad \forall\, x \in M$$

Alors la connexion induite ∇ *sur* M, *n'est pas métrique, donc* M *n'est pas totalement géodésique. De plus on a*

$$\dot{A}_{\xi_1}X = \dot{A}_{\xi_2}\xi = 0 \quad \dot{A}_{\xi_2}V = -V, \quad \forall X \in \Gamma(TM) \text{ et } \xi \in \Gamma(TM^\perp).$$

On a alors le premier espace transverse dégénéré et le premier espace radical qui donnent,

$$T_1(x) = vect\{h^l(V,V)\} = vect\{N_2\} \quad \text{et} \quad R_1(x) = vect\{\xi_2\}.$$

$\overline{g}(\overline{\nabla}_V\xi_2, N_1) = 0$. *Ce qui implique que* $R_1(x)$ *est parallèle* $\forall x \in M$. *La distribution* R_1 *est de rang 1 donc* f *admet une réduction de sa codimension à 1.*

Définition 5.2.3 .

Soit $(M, S(TM), g)$ *une sous-variété dégénérée d'une variété semi-riemannienne* $(\overline{M}, \overline{g})$. *La sous-variété* M *est dite totalement ombilique dans* $\overline{M}$, *s' il existe un champ de vecteurs,* $N \in tr(TM)$ *de classe* $C^\infty(M)$ *tel que* $h(X,Y) = \overline{g}(X,Y)N$ *avec* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *et* h *la seconde forme fondamentale.*

Théorème 5.2.4 .

Soit $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}_q$ *une immersion isométrique non totalement géodésique d'une sous-variété dégénérée* $(M, g, S(TM))$ *coisotrope et totalement ombilique (i.e* $h^l(X,Y) = \overline{g}(X,Y)N$, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ *et* $N \in \Gamma(tr(TM))$ *) dans une variété pseudo-euclidien* $(\mathbb{R}^{m+n}_q, \overline{g})$. *On suppose que* N *est parallèle par rapport à la connexion* ∇^t *sur* $ltr(TM)$. *Alors la codimension de* f *peut être réduite à 1.*

Preuve

La sous-variété M est totalement ombilique donc $T_1(x) = span\{N_x\}$, $\forall x \in M$. Or N est un champ de vecteurs global et parallèle alors T_1 est une distribution de rang 1, donc il en est de même pour le premier espace radical R_1. On utilise alors le théorème 5.2.3 pour conclure la preuve □

Remarque 5.2.1 .
La condition sur le vecteur N peut être réduite à la condition
$\nabla^t_{\xi_i} N = \alpha(\xi_i)N$ *où* $\alpha(\xi_i)$ *est une fonction de classe* $C^\infty(M)$, *car* $\nabla^t_X N = 0, \forall X \in \Gamma(S(TM))$ *(K. Honda [29]).*

Théorème 5.2.5 *[29].*
Soit (M^m, g) *une sous-variété coisotrope totalement ombilique* ($h(X,Y) = \overline{g}(X,Y)N$) *de dimension* $m(\geq 3)$ *d'une variété semi-riemannienne* $(\overline{M}^{m+n}, \overline{g})$ *à courbure constante c. Alors*

$$\tau_i(\xi_k) - \overline{\tau}_k(N)\overline{\tau}_i(N) = 0$$

où $\overline{\tau}_k(N) = \overline{g}(N, \xi_k)$, $\tau_i(X) = \overline{g}(\nabla^l_X N, \xi_i)$ *et* $\xi_k \in Rad(TM)$. *De plus*

$$\tau_i(X) = 0 \quad \text{pour tout} \quad X \in \Gamma(S(TM)), \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Définition 5.2.4 .
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions m et n respectivement et
$\mathrm{B} : E \times E \longrightarrow F$ *une application bilinéaire symétrique sur E.*
Pour tout u tel que $1 \leq u \leq n$ et pour tout sous-espace $U^u \subset F$ de dimension u, on définit
$\mathrm{B}_{U^u}(X,Y) = \pi_{U^u} \circ \mathrm{B}(X,Y)$ *où* $\pi_{U^u} : F \longrightarrow U^u$ *est la projection orthogonale.*
On appelle u-nullité de B *la quantité*

$$\nu_u = \max_{U^u \subset F}\{dim \mathrm{N}(\mathrm{B}^u_U)\}$$

où N *est le sous-espace annulateur de l' application bilinéaire*

$$\mathrm{N}(\mathrm{B}_{U^u}) = \{X \in E; \mathrm{B}^u_U(X,Y) = 0, \forall Y \in E\}$$

Théorème 5.2.6 .
Soit $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}_q$ *une immersion isométrique d'une sous-variété* $(M, g, S(TM))$ *coisotrope et totalement ombilique d'un espace pseudo-euclidien* $\mathbb{R}^{m+n}_q$. *Si* $\nu_u < m - u$ *pour tout* $1 \leq u \leq n$ *alors f admet une réduction de sa codimension à* 1.

Preuve
Si M est coisotrope alors L'équation de Codazzi dans ce cas est donnée par

$$0 = R(X,Y)Z + A_{h^l(X,Z)}Y - A_{h^l(Y,Z)}X + (\nabla_X h^l)(Y,Z) - (\nabla_Y h^l)(X,Z) \qquad (5.31)$$

où

$$(\nabla_X h^l)(Y,Z) = \nabla^t_X(h^l(Y,Z)) - h^l(\nabla_X Y, Z) - h^l(Y, \nabla_X Z)$$

pour $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, R désigne le tenseur de courbures sur M. Comme M est totalement ombilique donc il existe un champ de vecteurs global N tel que $h^l(X,Y) = \overline{g}(X,Y)N\ \forall X, Y \in \Gamma(TM)$. De même il existe un champ de vecteurs ξ de $Rad(TM) = TM^{\perp}$ tel que $g(N,\xi) = 1$. La preuve consiste à montrer que pour tout $x_0 \in M$, $\varphi(X) = \dot{\nabla}^t_X\xi = 0$, $\forall X \in T_{x_0}M$. On pose $u' = Im\varphi$. Ainsi pour tous $X, Y, Z \in T_{x_0}M$

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)Z,\xi\right) = \overline{g}\left(\left(\nabla_X h^l\right)(Y,Z) - \left(\nabla_Y h^l\right)(X,Z),\xi\right)\\
&= \overline{g}\left(\nabla^t_X\left(h^l(Y,Z)\right),\xi\right) - \overline{g}\left(h^l(\nabla_X Y,Z),\xi\right) - \overline{g}\left(h^l(Y,\nabla_X Z),\xi\right) -\\
&- \overline{g}\left(\nabla^t_Y\left(h^l(X,Z)\right),\xi\right) + \overline{g}\left(h^l(\nabla_Y X,Z),\xi\right) + \overline{g}\left(h^l(X,\nabla_Y Z),\xi\right)\\
&= \overline{g}(Y,Z)\overline{g}(\nabla^l_X N,\xi) - \overline{g}(X,Z)\overline{g}(\nabla^l_Y N,\xi)\\
&= \overline{g}(Y,Z)\overline{g}(N,\dot{\nabla}^t_X\xi) - \overline{g}(X,Z)\overline{g}(N,\dot{\nabla}^t_Y\xi).
\end{aligned}$$

Si $X \in \ker\varphi$ avec $X \in S(T_{x_0}M)$ (voir théorème 5.2.5) alors $\overline{g}(X,Z)\overline{g}(N,\dot{\nabla}^t_Y\xi) = 0$, donc $\overline{g}(h^l(X,Z),\dot{\nabla}^t_Y\xi) = 0$ et $1 \le u' \le n$. D' où $\overline{g}\left(h^l(\ker\varphi, T_{x_0}M), Im\varphi\right) = 0$. Ce qui implique que $\ker\varphi = m - u' \le \nu_u$. Ce qui contredit les hypothèses du thórème. D' où $u' = 0$ et ξ parallèle, par consqúent N est parallèle. On utilise alors le théorème 5.2.4 pour achever la preuve. □

Théorème 5.2.7 .

Soit $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}_q$ une immersion isométrique d'une sous-variété coisotrope $(M, g, S(TM))$ dans un espace pseudo-euclidien $\mathbb{R}^{m+n}_q$. On suppose que

1. *Il existe $\xi \in \Gamma(Rad(TM))$ un champ de vecteurs global omblique (i.e $A_\xi X = \lambda\pi X$, $\forall X \in \Gamma(TM)$ où $\lambda \neq 0$ est une fonction partout non nulle sur M et π est la projection de TM sur $S(TM)$.*
2. *$\nu_u < m - u$ pour tout $1 \le u \le n$.*

Alors $f(M^m)$ est contenue dans une hypersurface ombilique de $\mathbb{R}^{m+n}_q$ (i.e f admet une réduction de codimension d'ordre 1).

Preuve.

La technique de la preuve est la même que le théorème précédent. Soit $x_0 \in M$, posons $\varphi(X) = \dot{\nabla}^t_X\xi$, $\forall X \in T_{x_0}M$ et considérons l'équation de Codazzi (5.31). Alors pour $Z \in S(T_{x_0}M)$ et $X, Y \in T_{x_0}M$, on a

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)Z,\xi\right) = \overline{g}\left((\nabla_X h^l)(Y,Z) - (\nabla_Y h^l)(X,Z),\xi\right)\\
&= \overline{g}\left(\nabla^t_X(h^l(Y,Z)),\xi\right) - \overline{g}\left(h^l(\nabla_X Y,Z),\xi\right) - \overline{g}(h^l(Y,\nabla_X Z),\xi) -\\
&- \overline{g}\left(\nabla^t_Y(h^l(X,Z)),\xi\right) + \overline{g}\left(h^l(\nabla_Y X,Z),\xi\right) + \overline{g}\left(h^l(X,\nabla_Y Z),\xi\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -\overline{g}\left(h^l(Y,Z),\dot{\nabla}^t_X\xi\right) + X.\left(\overline{g}(h^l(Y,Z),\xi)\right) + \overline{g}\left(\nabla_X Y, \dot{A}_\xi Z\right) + \\
&+ \overline{g}\left(\nabla_X Z, \dot{A}_\xi Y\right) + \overline{g}\left(h^l(X,Z),\dot{\nabla}^t_Y\xi\right) - Y.\left(\overline{g}(h^l(X,Z),\xi)\right) - \\
&- \overline{g}\left(\nabla_Y X, \dot{A}_\xi Z\right) - \overline{g}(\nabla_Y Z, \dot{A}_\xi X) \\
0 &= \overline{g}\left(Z, \dot{A}_{\dot{\nabla}^t_X\xi}Y\right) - \overline{g}\left(Z, \dot{A}_{\dot{\nabla}^t_Y\xi}X\right) - X.(\lambda)\overline{g}(Y,Z) + Y.(\lambda)\overline{g}(X,Z)
\end{aligned}$$

Si on pose $Y = Z \in S(T_{x_0}M) \cap \ker\varphi$ et $X \in \ker\varphi$, $S(T_{x_0}M) \cap \ker\varphi \neq \emptyset$ (voir théorème 5.2.5), alors

$$\dot{A}_{\dot{\nabla}^t_X\xi}Y - X.(\lambda)Y = \dot{A}_{\dot{\nabla}^t_Y\xi}X + Y.(\lambda)X \tag{5.32}$$

et $X.(\lambda) = 0$. Donc pour $X \in \ker\varphi$, $X.(\lambda) = 0$.
De plus si on pose $\delta = \varphi(X) - \dfrac{X(\lambda)}{\lambda}\xi$ alors. pour $Y \in \ker\varphi$ on a,

$$\begin{aligned}
\dot{A}_\delta Y &= \dot{A}_{\varphi(X)}Y - \frac{X(\lambda)}{\lambda}\dot{A}_\xi Y \\
&= \dot{A}_{\dot{\nabla}^t_X\xi}Y + X(\lambda)Y \\
&= \dot{A}_{\dot{\nabla}^t_Y\xi}X + Y(\lambda)X \text{ (d' après la relation 5.32)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Soit $J = \{\delta = \varphi(X) - \dfrac{X(\lambda)}{\lambda}\xi, X \in Im\varphi\} \cong Im\varphi$ alors, on a $\overline{g}(\dot{A}_\delta Y, X) = \overline{g}(h^l(X,Y),\delta) = 0$.
Donc $\overline{g}(h^l(\ker\varphi, T_{x_0}M), Im\varphi) = 0$. Ce qui implique que $\ker\varphi = m - u' \leq \nu'_u$ or $1 \leq u' \leq n$.
D' où la contradiction avec les hypothèses du thórème. D' où $u' = 0$ et ξ parallèle.
Soit γ une courbe de M passant par x_0.

$$\frac{d}{dt} < f(\gamma(t)), \xi > = < f_*\gamma_*(t), \xi > = 0$$

alors $< f(\gamma(t)), \xi >$ est constante.
Pour le cas $c = 0$, on a $f(x) = f(x_0) + kN$ où k est une constante et N est tel que $\overline{g}(\xi, N) = 1$.
De plus si ξ est ombilique alors N l'est aussi. On peut voir

$$\overline{g}(h^l(X,\pi Y),\xi) = \overline{g}(\dot{A}_\xi X, \pi Y) = \lambda\overline{g}(\pi X, \pi Y) = \lambda\overline{g}(X,Y).$$

D' où $f(M)$ est inclu dans une hypersurface totalement ombilique de $\mathbb{R}^{m+n}_q$. □

Remarque 5.2.2 .
De manière générale s'il existe pour tout $x_0 \in M$, k vecteurs non colinéiares et non nuls, $\xi_1, \ldots, \xi_k \in Rad(T_{x_0}M)$ $(k < n)$ tels que $\dot{A}_{\xi_i}X = \lambda_i\pi X$, $\forall X \in T_{x_0}M$ et vérifiant les conditions du théorème 5.2.7, alors f admet une réduction de sa codimension à l'ordre k.

CONCLUSION

Le travail entrepris dans cette thèse est loin d'être fini. D'où la possibilité d'étendre les différents résultats contenus dans celle-ci.

quelques extensions possibles à court terme

1. Avec la détermination des opérateurs de type de star de Hodge et de Laplace Beltrami, pour les hypersurfaces dégénérées, on peut étudier la théorie de Hodge et établir des théorèmes d'obstructions sur l'existence de tel type d'hypersurfaces.
2. Dans le chapitre 4, nous avons donné le théorème de la divergence pour un champ de $(0,2)$-tenseurs symétriques. Nous pouvons envisager le théorème de la divergence un champ de tenseurs quelconques et pour une 2-forme symplectique d'une variété semi-riemannienne de signature (p,p).
3. Pour nos résultats sur la réduction de la codimension des sous-variétés r-dégénérées, nous avons faire l'hypothèse des connexions induite et transverse métriques. Nous envisageons le cas des connexions induites et transverses quelconques. On cherche à déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que le premier espace transverse (radical) soit parallèle. Enfin nous envisageons étendre les résultats aux sous-variétés coisotropes d'une variété semi-riemannienne à courbure constante non nulle.

Les extensions possibles à long terme

1. Visiblement les formules (2.2) et (2.5) sont insuffisantes pour caractériser les harmoniques pour les variétés proprement semi-riemanniennes. D'où la nécessité de trouver une autre approche (soit par le théorème de divergence pour les formes différentielles quelconques) ou une autre théorie. 11
2. Avec la détermination de l'élément de volume sur les hypersurfaces dégénérées, on pourrait établir la formule de Gauss-Bonnet pour ce type d'hypersurfaces.
3. On pourrait faire une étude globale de la géométrie des sous-variétés dégénérées en utilisant les groupes de Lie munis des métriques indéfinies bi-invariantes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. A. Akivis and V. V. Goldberg, The geometry of lightlike hypersurfaces of the de Sitter space, Acta Appl. Math. 53 (1998)

[2] C. D. Allendoerfer, Imbedding of Riemann spaces in the large, Duke Math. J. 3 (1937) 317-333

[3] C. Atindogbé, J-P. Ezin, J. Tossa, Pseudo-inversion of degenerate metrics IJMMS (2003) 55 3479-3501

[4] C. Atindogbé, J-P. Ezin, J. Tossa, Reduction of the codimension for lightlike isotropic submanifolds. J. Geom. Phys. 42 (2002), no. 1-2, 1-11.

[5] A. Ashetekar, G. J. Galloway, some uniqueness Results for Dynamical Horizons arXiv : gr-qc/0503109 v3 2005

[6] B.Y. Chen, *Geometry of submanifolds* Marcel dekker N. Y. 1973.

[7] J. K Beem, P. E. Ehrlich, K. L. Easley, *Global lorentzian geometry*, Second Edition, Pure and Applied Math. num. 202, Dekker, (1996)

[8] P.H. Bérard From Vanishing Theorems to Estimating Theorems (the Bochner Technique Revisted.) Bull Amec. Math. Soc., Vol 19 ; (1988)

[9] G. Berger, *Riemannian geometry during the second half of twentieth century, AMS, vol17 2000*

[10] A. L. Besse, *Einstein manifolds,* Springer Verlag 1987

[11] G. Bitis, On the operators and stokes theorem in metric manifolds with torsion, Tensor N. S 40 (1983), 267-279.

[12] S. Bochner Vector Field and Ricci Curvature .Bull. Amer. Math. Soc 52 ; (1946)

[13] S. Bochner and K. Yano , Tensor fields in non symmetric connections, Ann. Math. 56 (1952) 504-515

[14] W. B. Bonnor, Null hypersurfaces in Minkowski Space-Time Tensor, N. S.vpl 24 (1972)

[15] S. S. Chern, M. do Carmo, and S. Kobayashi, *minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant lenght,* Functional Analysis and Related Fields, Springer, Berlin, 1970

[16] B. Carter, Killing horizon and orthogonality transitive groups in space-time J. Math. Phys.10, 70-81 (1969)

[17] G. D'Ambra, Isometry groups of Lorentz manifolds, Invent. Math.92 (1988), 555-565.

[18] M. Dajczer and all, *Submanifolds and isometric immersion* Math. Lect. Series 13 (1990)

[19] S. Deshmukh Rigidity of compact minimal submanifolds in a sphere Pacific journal of mathematics vol. 193, No.1 (2000) 31-44

[20] K. L. Duggal, Affine conformal vector fields in semi-Riemannian manifolds Acta appl. math. 23 (1991) 275-294

[21] K. L. Duggal and A. Bejancu, *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*. Mathematics and Its Applications, Kluwer acad. Publishers dordrecht, (1996).

[22] G.F. R Ellis And S. W. Hawking *Large scale structure of spacetimes* cambridge univ press (1972).

[23] J. Erbacher, Reduction of the codimension of an isometric immersions, J. Differential Geom. 5 (1971), 333–340.

[24] J- P. Ezin, Remarks on identity by R. Schoen and others, Jour. of the Nigerian math. Soc., Vol. 10(1991). 19-24.

[25] J-P. Ezin, M. Hassirou, J. Tossa Technique Bochner in indefinite metrics and application to maximal spacelike submanifolds (preprint).

[26] J-P. Ezin, M. Hassirou, J. Tossa, Divergence theorem for symmetric $(0,2)$-tensor fields on semi-Riemannian manifolds with boundary Preprint : ICTP \ IC2005060 and (in Proof) in Kodai Math. Jour.

[27] J-P. Ezin, M. Hassirou, J. Tossa, Reduction of codimension for degenerate submanifolds submitted to IJMMS (January 2006).

[28] H. Hayde, Subspaces of a space with torsion, Proc. London math. soc. 34 (1932) 27-50

[29] K. Honda, Some Lightlike Submanifolds, SUT jour. of Math. vol. 37, N0 1 (2001) 69-78

[30] T Ishihara Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian space of constant curvature Michigan Math. J. 35 (1988), 345-352.

[31] Jûrgen Jost *Riemannian Geometry and Geometric Analysis* Springer Verlag

[32] Y. Kamishima Completeness of Lorentz manifolds of constant curvature admitting Killing vector fields. J. Diff. Geo. 37(1993) 569-601

[33] S. Kobayashi and K. Nomizu foundations of differential geometry N.Y. int Publish 1963

[34] O. Kobayashi, Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3, Tokyo J. Math. vol. 6, No2, (1983).

[35] K. Kodaira, *On a Differential Geometric Method in Theory of Analytic Stacks*, Proc. Nat. Acad.Sci USA ; 1218- 1273. (1953)

[36] D. N. kupeli, Degenerate submanifolds in semi-Riemannian geometry Geo. dedicata 24(1987) 337-361

[37] D. N. kupeli, Degenerate manifolds Geo. dedicata 23(1987)no3 259-290.

[38] H. B. Lawson. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces, Ann. of Math,(2) 89 (1968), 187-195.

[39] A. Lichnerowic, *Géométrie des groupes de transformations,* Paris : Dunod, 1958.

[40] A. Maseillo, *Variationnel Methods in Lorentzian Geometry,* Pitman Res. notes math. ser. 309 (Longman Sci. Tech., Harlow 1994).

[41] J. Milnor, *Morse theory,* Princeton university press 1963.

[42] S.B. Myers, Riemannian Manifolds with Positive Mean Curvature. Duke Math. J.8 ; 401 -404 ; (1941)

[43] A. Nersessian, E. Ramos Massive spinning particules and Geometry of null curves Phys lett B. 445 (1998) 123-128.

[44] S. Nishikawa , On maximal spacelike hypersurfaces in Lorentzian manifold Nagoya Math. J. 95(1984), 117-124.

[45] Penrose R. Zero rest mass fields including gravitation asymptotique behavior procedure Roy. Soc. London A 285 (1965) 159-203

[46] Penrose R. Remarkable property of planes waves in general relativity, Rev. Mod. Phys. 37 (1965) 215-220

[47] G. Pereleman. Ricci flow with surgery on three manifolds arxiv : Math.DG \ 0303109V1 10-03-2003

[48] G. Pereleman. The entropie formula for Ricci flow and its geometric applications arxiv : Math.DG\0211159V1 11-11-2002

[49] P. Pertersen, *Geometry Riemannian*Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 1997

[50] G. de Rham, *Differentiable Manifolds,* Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 1984

[51] A. Romero and M. Sànchez, An integral inegality on compact Lorentz manifolds and its applications, Bull. London Math. Soc. 28(1996) 509-513.

[52] A. Romero, The Introduction of Bochner's Technique on Lorentzian Manifolds Nonlinear Anal. 47 (2001) 3047-3059.

[53] A. Romero and M. Sànchez, Bochner's Technique on Lorentzien and Infinitesimal Conformally Symmetrics Pacific Journ. of Math. Vol. 186, No. 1, 1998

[54] A. Romero, M. Sànchez, Projective vector fields on Lorentzian manifolds, Geo Dedicata 93 (2002) 95-105

[55] M. Sànchez, Lorentzian manifolds admitting a Killing vector field,Proc. Second World Congress on Nonlinear Anal. 30 (1997) 643-654

[56] R. K. Sachs and H. Wu, *General relativity for mathematicians* Springer Verlag, .New-York (1977)

[57] J. Rosen, Embedding of various relativistic Riemannian spaces. Rev. of Modern Phys. 37 (1) 1965 p.204-214.

[58] S.E. Stepanov, New Methods of Bochner technique and theirs applications vol113 No3 514-536

[59] S.E. Stepanov, An Analytic Method in General RelativityTheorical and Mathematical Physics Vol 122, No 3,(2000)

[60] K. Tenenblat, R. Tribuzy, Reduction of the codimension of isometric immersions in space forms . Topology 25 (4) (1986) 541–548.

[61] B. Ünal, Divergence theorem in semi-Riemannian geometry, Acta Appl. Math. 40(1995), 173 - 178.

[62] I. V. de Woestijne, *Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space* Geometry and Topology II 344-369 world sci Publish (1990)

[63] K. Wolfgang. *Differential geometry : Curves-Surface-Manifolds* Stud. Math. Libr. AMS (2000) vol 16

[64] H. WU, *The Bochner Technique In Differential Geometry* Math. Reports Vol 3 ; 289-538 ; Harwood Academic Publishers (1988)

[65] K. Yano, *Integral Formulas in Riemannian Geometry* Marcel Dekker Inc. New-York (1970)